

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

Τεύχος 2

ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Ο Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης γεννήθηκε στην Καλλιθέα Αττικής το 1950. Τελείωσε το Γυμνάσιο (1965) και το Λύκειο (1968) στον Πειραιά. Είναι διπλωματούχος Μηχανολόγος-Ηλεκτρολόγος Μηχανικός (1973) του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.) και Διδάκτωρ Μηχανικός (1976) πάλι του Ε.Μ.Π. Η διπλωματική εργασία του (1973) και η διδακτορική διατριβή του (1976) αναφέρονται στην Ελαστικότητα και στη Θραυστομηχανική.

Από το 1970 σαν σπουδαστής ήταν ανεπίσημος συνεργάτης του Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Το 1976 υπήρξε ερευνητής στο ίδιο εργαστήριο. Από το 1976 μέχρι το 1980 ήταν Επιμελητής στις Έδρες Μηχανικής Α και Β του Ε.Μ.Π. Από το 1980 μέχρι το 1982 ήταν Έκτακτος Καθηγητής και από το 1982 μέχρι σήμερα είναι Καθηγητής της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών. Από το 1982 σαν Καθηγητής εργάζεται στο Γενικό Τμήμα στον Τομέα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής.

Στο Ε.Μ.Π. συμμετέσχε στα εργαστήρια Πειραματικής Αντοχής Υλικών και έκανε φροντιστήρια μαθημάτων Μηχανικής. Επίσης δίδαξε ένα εξάμηνο το μάθημα Αντοχή Υλικών. Στην Πολυτεχνική Σχολή του Πανεπιστημίου Πατρών δίδαξε μαθήματα Μαθηματικών, Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Πιθανοθεωρίας-Στατιστικής σε διάφορα τμήματα. Κατά τα τελευταία έτη διδάσκει αποκλειστικά στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III και εκτελεί τα σχετικά εργαστήρια στο Υπολογιστικό Κέντρο του Τμήματος. Διδάσκει επίσης το μεταπτυχιακό μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά πάλι στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών.

Το ερευνητικό έργο του αναφέρεται στη Μηχανική, τη Θραυστομηχανική, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, τη Μιγαδική Ανάλυση, τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, την Αριθμητική Ανάλυση (Αριθμητική Ολοκλήρωση και επίλυση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων) και τους Συμβολικούς Υπολογισμούς στη Μηχανική. Είναι συγγραφέας και συσυγγραφέας πολλών επιστημονικών εργασιών που έχουν δημοσιευθεί στην Αγγλική γλώσσα σε πολλά διεθνή περιοδικά των πιο πάνω επιστημονικών περιοχών (και μία εργασία στη Θεωρία Προσεγγίσεως) σε διάφορες χώρες. Σαν μεγαλύτερη ερευνητική συμβολή του θεωρεί την αναγωγή προβλημάτων ρωγμών σε ιδιόμορφες και υπεριδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις και την επίλυσή τους με χρήση της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσεως.

Πέρα από τις επιστημονικές εργασίες του έχει κρίνει πολλές εργασίες άλλων συγγραφέων για διεθνή επιστημονικά περιοδικά της Μηχανικής, της Θραυστομηχανικής, των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Αριθμητικής Αναλύσεως. Υπήρξε κριτής για τα περιοδικά κριτικών *Applied Mechanics Reviews* και *Mathematical Reviews* και μέλος της Εκδοτικής Επιτροπής του περιοδικού *International Journal of Solids and Structures*.

Κατά τα τελευταία έτη καταβάλλει συστηματική προσπάθεια για την αναβάθμιση των μαθημάτων Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που διδάσκει στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών: στην αίθουσα διδασκαλίας, στο εργαστήριο, μέσω συχνών εξετάσεων προόδου και εργαστηρίου και μέσω των διδακτικών αυτών βιβλίων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III που απευθύνονται αποκλειστικά σε Πολιτικούς Μηχανικούς και όχι γενικά σε Μηχανικούς. Στην προσπάθειά του αυτή έχει τύχει πολύτιμης βοήθειας και συμπαράστασεως κάθε μορφής από πολλούς συναδέλφους του καθώς και της ενεργής συμμετοχής των φοιτητών και φοιτητριών του Πολιτικών Μηχανικών και είναι ευγνώμων σε όλους και όλες γι' αυτά.

Τέλος στα Πανεπιστημιακά θέματα η θέση του ήταν και είναι υπέρ του Πανεπιστημίου στην κλασική του μορφή, όπως την έχει ζήσει και τη ζει και ο ίδιος επί πολλά χρόνια. Επομένως είναι εναντίον κάθε επιχειρηματικής ή οικονομικής διεισδύσεως τρίτων στον Πανεπιστημιακό χώρο. Είναι επίσης θερμός υποστηρικτής της ελεύθερης έρευνας στα Πανεπιστήμια με την έννοια ότι τα ερευνητικά αποτελέσματα πρέπει να είναι απόλυτα προσιτά σε κάθε μέρος του κόσμου χωρίς περιορισμούς μέσω της δημοσιεύσεώς τους είτε σε βιβλία είτε σε περιοδικά είτε στο διαδίκτυο. Τούτο έχει πράξει και ο ίδιος χωρίς καμία εξαίρεση.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

Τεύχος 2

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΝΟΤΕΒΟΥΚΣ ΙΙ
για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

*Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής,
Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών*

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης (συγγραφέας, Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών)
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, Τεύχος 2:
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΝΟΤΕΒΟΥΚΣ ΙΙ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ
1η Έκδοση: Φεβρουάριος 2008

Copyright © 2008 GOTSIS Εκδόσεις

ISBN 978-960-98187-3-5 (Αυτό το τεύχος. Παράκληση για χρήση του ISBN για παραγγελίες.)

ISBN SET 978-960-98187-1-1 (Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς SET)

ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ, ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΚΔΟΤΗ

Βιβλιοπωλείο «Γνώση», Οδός Αράτου 41, 262.21 ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνο: (+30) 2610 226453, Fax: (+30) 2610 226690,

E-mail: gnosis@otenet.gr

- Όλα τα δικαιώματα διατηρούνται από τις **GOTSIS Εκδόσεις**. Η πνευματική ιδιοκτησία αποκτάται χωρίς καμία διατύπωση και χωρίς την ανάγκη ρήτρας απαγορευτικής των προσβολών της. Σημειώνεται η ισχύς του Νόμου 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει, και της διεθνούς συμβάσεως της Βέρνης για την πνευματική ιδιοκτησία, η οποία έχει κυρωθεί με το Νόμο 100/1975.
- Απαγορεύεται απολύτως η αναδημοσίευση ή η αναπαραγωγή αυτού του βιβλίου (ολική ή μερική είτε στην παρούσα μορφή του είτε σε παραφρασμένη ή διασκευασμένη μορφή του) ή η διανομή του με οποιοδήποτε τρόπο (αντιγραφή, φωτοτυπία, εκτύπωση, μικροφίλμ, σάρωση ή/και αποθήκευση σε αρχείο ή αρχεία υπολογιστή, διαθεσιμότητα σε ιστοσελίδα ή σε βάσεις δεδομένων, διανομή μέσω του διαδικτύου, ηχογράφηση ή γενικά με οποιοδήποτε μηχανικό ή ηλεκτρονικό ή άλλο τρόπο είτε ήδη διαθέσιμο σήμερα είτε που θα υπάρξει στο μέλλον) χωρίς τη ρητή γραπτή άδεια των **GOTSIS Εκδόσεις**. Επίσης ανάλογα απαγορεύεται και η ολική ή μερική μετάφραση του παρόντος βιβλίου και γενικότερα η κάθε μορφής εκμετάλλευσή του στο σύνολό του ή σε μέρος του.
- Εντούτοις χορηγείται από τώρα η άδεια συνηθισμένου απλού δανεισμού για μελέτη του βιβλίου αυτού από αναγνώστες και αναγνώστριες Πανεπιστημιακών και μη βιβλιοθηκών.

ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ

«Ταχύτυπο», Ταχυεκτυπώσεις – Γραβάνης Ε.Π.Ε., Πάροδος Διοδώρου 160, Βελβίτσι, 264.43 ΠΑΤΡΑ
Τηλέφωνα: (+30) 2610 461780 έως (+30) 2610 461790, E-mail: info@tachytypo.gr

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ

Η κεντρική είσοδος και ένα πολύ μικρό τμήμα του κτιρίου του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών στην Πανεπιστημιούπολη στο Ρίο Πατρών

ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής

Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών

Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 265.04 ΡΙΟ, ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνα: (+30) 2610 432257, (+30) 2610 997378,

E-mail: n.ioakimidis@upatras.gr, <http://www.des.upatras.gr/amm/ioakimidis/ioakimidis.htm>

ΑΠΟΠΟΙΗΣΗ ΕΥΘΥΝΗΣ

Τόσο ο συγγραφέας όσο και ο εκδότης κατέβαλαν κάθε δυνατή προσπάθεια, ώστε το παρόν βιβλίο ακόμη και στην παρούσα 1η Έκδοσή του να μην περιέχει οποιασδήποτε μορφής λάθη. Εντούτοις είναι προφανές ότι αυτό δεν είναι απόλυτα δυνατόν να συμβεί. Επομένως δεν μπορούν να αναλάβουν καμιάς μορφής ευθύνη για οποιαδήποτε άμεση ή έμμεση ζημιά που θα μπορούσε να προκύψει στο χρήστη και στη χρήστρια αυτού του βιβλίου από λάθη που έχουν παρεισφρύσει. Παράκληση για την ενημέρωσή τους για κάθε λάθος, ώστε αυτό να διορθωθεί στην επόμενη έκδοση.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	v-vi
• ΠΡΟΛΟΓΟΣ	vii-viii
• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ix-x
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	1-74
A1. Άσκηση Μεταδόσεως Θερμότητας (Άσκηση A1)	1
A1.1. Ψύξη υλικού σημείου (Άσκηση A1)	1
A2. Ασκήσεις Περιβαλλοντικής Μηχανικής (Ασκήσεις A2 έως A8)	1
A2.1. Καθαρισμός νερού (Ασκήσεις A2 έως A5)	1
A2.2. Περιβαλλοντική υδραυλική (Ασκήσεις A6 έως A8)	2
A3. Ασκήσεις Ρευστομηχανικής (Ασκήσεις A9 έως A20)	3
A3.1. Εκροή ρευστού από οριζόντιο σωλήνα (Ασκήσεις A9 έως A10)	3
A3.2. Διδιάστατη ροή (Ασκήσεις A11 έως A20)	4
A4. Ασκήσεις Μηχανικής των Υλικών (Ασκήσεις A21 έως A71)	7
A4.1. Δοκοί με συνηθισμένη φόρτιση (Ασκήσεις A21 έως A29)	7
A4.2. Δοκοί με συγκεντρωμένα φορτία και ροπές, συναρτήσεις Macaulay (Ασκήσεις A30 έως A36)	10
A4.3. Δοκοί επί ελαστικής βάσεως, υπόθεση του Winkler (Ασκήσεις A37 έως A42) ..	13
A4.4. Στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός (Ασκήσεις A43 έως A59)	15
A4.5. Στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός υπό το ίδιο βάρος (Άσκηση A60)	21
A4.6. Δοκοί-στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός (Ασκήσεις A61 έως A70)	22
A4.7. Επίπεδη ελαστικότητα με κυκλική συμμετρία, τασική συνάρτηση του Airy (Άσκηση A71)	26
A5. Ασκήσεις Πλακών (Ασκήσεις A72 έως A80)	27
A5.1. Πλάκες με κυκλική συμμετρία (Ασκήσεις A72 έως A76)	27
A5.2. Λυγισμός πλακών με κυκλική συμμετρία (Άσκηση A77)	29
A5.3. Ταλαντώσεις πλακών με κυκλική συμμετρία (Άσκηση A78)	29
A5.4. Επιμήκειες πλάκες, πλακοταινίες (Άσκηση A79)	30
A5.5. Ορθογωνικές πλάκες (Άσκηση A80)	30
A6. Ασκήσεις Δυναμικής (Ασκήσεις A81 έως A112)	31
A6.1. Εξαναγκασμένη ευθύγραμμη κίνηση (Ασκήσεις A81 έως A82)	31
A6.2. Ευθύγραμμη κίνηση με αντίσταση (Ασκήσεις A83 έως A89)	31
A6.3. Κατακόρυφη κίνηση με αντίσταση (Ασκήσεις A90 έως A99)	33
A6.4. Κίνηση σε περιστρεφόμενο σωλήνα (Ασκήσεις A100 έως A111)	36
A6.5. Περιστροφή κυκλικού δίσκου (Άσκηση A112)	39
A7. Ασκήσεις ταλαντώσεων (Ασκήσεις A113 έως A173)	40
A7.1. Ταλαντώσεις μονοβάθμιων μηχανικών συστημάτων (Ασκήσεις A113 έως A160)	40
A7.2. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση: συντονισμός (Ασκήσεις A161 έως A166)	53
A7.3. Ενεργειακή θεώρηση των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση (Ασκήσεις A167 έως A170)	55
A7.4. Ελεύθερες ταλαντώσεις διβάθμιων μηχανικών συστημάτων (Ασκήσεις A171 έως A173)	57

A8. Ασκήσεις Δυναμικής των Κατασκευών (Ασκήσεις A174 έως A222)	59
A8.1. Δοκοί (Ασκήσεις A174 έως A179)	59
A8.2. Υδατόπυργοι (Ασκήσεις A180 έως A182)	61
A8.3. Μονώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως: φόρτιση ανέμου (Άσκηση A183)	62
A8.4. Μονώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως: σεισμική φόρτιση (Ασκήσεις A184 έως A187)	63
A8.5. Διώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως (Ασκήσεις A188 έως A217)	64
A8.6. Πολυώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως (Ασκήσεις A218 έως A222)	73
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ II:	
ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΑ ΕΒΔΟΜΑΔΑ	75-132
Ομάδα EMII-A (Ασκήσεις EMII-A1 έως EMII-A8)	75
Ομάδα EMII-B (Ασκήσεις EMII-B1 έως EMII-B5)	77
Ομάδα EMII-C (Ασκήσεις EMII-C1 έως EMII-C4)	79
Ομάδα EMII-D (Ασκήσεις EMII-D1 έως EMII-D5)	83
Ομάδα EMII-E (Ασκήσεις EMII-E1 έως EMII-E8)	86
Ομάδα EMII-F (Ασκήσεις EMII-F1 έως EMII-F9)	91
Ομάδα EMII-G (Ασκήσεις EMII-G1 έως EMII-G8)	96
Ομάδα EMII-H (Ασκήσεις EMII-H1 έως EMII-H4)	101
Ομάδα EMII-I (Ασκήσεις EMII-I1 έως EMII-I5)	105
Ομάδα EMII-J (Ασκήσεις EMII-J1 έως EMII-J5)	112
Ομάδα EMII-K (Ασκήσεις EMII-K1 έως EMII-K3)	121
Ομάδα EMII-L (Ασκήσεις EMII-L1 έως EMII-L5)	125
Ομάδα EMII-M (Ασκήσεις EMII-M1 έως EMII-M8)	130
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ II:	
ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕ NOTEBOOKS	133-212
Ασκήσεις του Notebook EMII-MA (Ασκήσεις EMII-MA1 έως EMII-MA2)	134
Notebook EMII-MA (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MA1 έως EMII-MA2)	135
Ασκήσεις του Notebook EMII-MB (Ασκήσεις EMII-MB1 έως EMII-MB6)	140
Notebook EMII-MB (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MB1 έως EMII-MB6)	142
Ασκήσεις του Notebook EMII-MC (Ασκήσεις EMII-MC1 έως EMII-MC6)	147
Notebook EMII-MC (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MC1 έως EMII-MC6)	149
Ασκήσεις του Notebook EMII-MD (Ασκήσεις EMII-MD1 έως EMII-MD10)	157
Notebook EMII-MD (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MD1 έως EMII-MD10)	159
Ασκήσεις του Notebook EMII-ME (Ασκήσεις EMII-ME1 έως EMII-ME10)	167
Notebook EMII-ME (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-ME1 έως EMII-ME10)	169
Ασκήσεις του Notebook EMII-MF (Ασκήσεις EMII-MF1 έως EMII-MF7)	179
Notebook EMII-MF (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MF1 έως EMII-MF7)	182
Ασκήσεις του Notebook EMII-MG (Ασκήσεις EMII-MG1 έως EMII-MG7)	191
Notebook EMII-MG (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MG1 έως EMII-MG7)	193
Ασκήσεις του Notebook EMII-MH (Ασκήσεις EMII-MH1 έως EMII-MH9)	201
Notebook EMII-MH (Λύσεις των Ασκήσεων EMII-MH1 έως EMII-MH9)	203
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ	213-232
Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-NEWTON: Νόμος του Νεύτωνα	214
Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-FALL: Ελεύθερη Πτώση Υλικού Σημείου	219
• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ	231-260
Notebook Animations-MassSpringVibrations: Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μηχανικού Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου	233
Notebook Animations-BuildingVibrations: Ταλαντώσεις Μονώροφου Κτιρίου	241

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν Τεύχος 2 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** με τίτλο **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks II για Πολιτικούς Μηχανικούς** έρχεται σαν συνέχεια του Τεύχους 1 του ίδιου συγγράμματος. Το Τεύχος 1 αφορά κυρίως στη θεωρία των Εφαρμοσμένων Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (το Μέρος Α) για Πολιτικούς Μηχανικούς. Πέρα από τη σχετική θεωρία το Τεύχος 1 που προαναφέρθηκε περιλαμβάνει κι έναν πολύ μεγάλο αριθμό λυμένων παραδειγμάτων και εφαρμογών στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Έχοντας λοιπόν μελετήσει το Τεύχος 1 ο φοιτητής και η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός θα έχουν αποκτήσει τις θεωρητικές γνώσεις που αναπτύσσονται σ' αυτό για τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Θα έχουν όμως επιπλέον κατανοήσει και τις σχετικές εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Σύμφωνα και με τον τίτλο του το παρόν Τεύχος 2 περιλαμβάνει **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks II για Πολιτικούς Μηχανικούς** και αποτελείται από πέντε μέρη: δύο μέρη για Εφαρμοσμένες Ασκήσεις II και τρία μέρη για Εφαρμοσμένα Notebooks II όλα για Πολιτικούς Μηχανικούς.

1. Το πρώτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό άλυτων εφαρμοσμένων ασκήσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτές είναι σκόπιμο να λυθούν σε όσο γίνεται μεγαλύτερο βαθμό με το χέρι (χωρίς τη χρήση του υπολογιστή!) ή και με τη χρήση του υπολογιστή αποκλειστικά όμως για τη στοιχειοθεσία των λύσεων με το χέρι. Οι σχετικές γνώσεις έχουν ήδη αποκτηθεί από το Τεύχος 1. Οι παρούσες εφαρμοσμένες ασκήσεις (222 συνολικά) αναφέρονται όλες τους στο Μέρος Α της ύλης των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς, δηλαδή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Οι εφαρμοσμένες αυτές ασκήσεις συνήθων διαφορικών εξισώσεων ταξινομούνται με βάση τις περιοχές της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού στις οποίες αναφέρονται. Με τον τρόπο αυτό ο φοιτητής/η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να θελήσει να επιλύσει εκείνες από τις εφαρμοσμένες ασκήσεις που δίνονται και που ταιριάζουν με τα θέματα που τον/την ενδιαφέρουν. Σε κάθε άσκηση αναφέρονται επιπλέον και τα κεφάλαια του Τεύχους 1 που είναι σχετικά με τη λύση της καθώς και οι περιοχές της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού όπου ανήκει η άσκηση αυτή. Σημειώνεται τέλος ότι κάθε άσκηση υποδιαιρείται σε ερωτήματα και κάθε ερώτημα έχει τη δική του βαρύτητα, η οποία αναφέρεται και αυτή μέσα στην άσκηση.
2. Το δεύτερο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει κι αυτό άλυτες ασκήσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II για Πολιτικούς Μηχανικούς που είναι ταξινομημένες σε δεκατρείς ομάδες: Ομάδα Α έως και Ομάδα Μ. Οι ασκήσεις αυτές είναι σκόπιμο να λύνονται κατά τη διάρκεια των αντίστοιχων δεκατριών εβδομάδων του διδακτικού εξαμήνου. Το χαρακτηριστικό αυτών των ομάδων ασκήσεων είναι ότι συνδυάζουν την άμεση επίλυσή τους σε χαρτί με την επίλυσή τους με χρήση του υπολογιστή κι εδώ της Mathematica. Στις ασκήσεις αυτές, μερικές φορές και στα ερωτήματά τους υπάρχουν οι ενδείξεις [X] για χειρόγραφη επίλυση, [Y] για επίλυση με τη χρήση του υπολογιστή, δηλαδή εδώ της Mathematica, και [X και Y] για επίλυση και με το χέρι και με τον υπολογιστή. Έτσι ο φοιτητής/η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός κατανοεί τη χρησιμότητα του υπολογιστή σαν μια εναλλακτική δυνατότητα επίλυσεως. Σε δύσκολα μάλιστα προβλήματα της επιστήμης του σαν τη μοναδική πρακτική δυνατότητα επίλυσεως. Σημειώνεται επίσης ότι αρκετές από τις ασκήσεις και αρκετά από τα ερωτήματα με τον υπολογιστή περιλαμβάνουν και σαφείς υποδείξεις για τη λύση τους με τη Mathematica.
3. Το τρίτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει οκτώ ομάδες εφαρμοσμένων ασκήσεων το χαρακτηριστικό των οποίων είναι ότι είναι έτσι γραμμένες, ώστε να ζητείται η λύση

των ερωτημάτων τους με τη Mathematica. Οι απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα όλων των ασκήσεων κάθε ομάδας περιλαμβάνονται σε σχετικό notebook που ακολουθεί την ομάδα ασκήσεων. Έχουμε έτσι οκτώ ομάδες ασκήσεων και παράλληλα οκτώ notebooks της Mathematica που ακολουθούν την κάθε ομάδα με πάνω από 700 εντολές της Mathematica συνολικά.

4. Το τέταρτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει δύο εφαρμοσμένα notebooks της Mathematica. Συγκεκριμένα το πρώτο από αυτά αναφέρεται στο νόμο του Νεύτωνα και το δεύτερο στην ελεύθερη πτώση υλικού σημείου. Πρόκειται για δύο notebooks ιδιαίτερου ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού που επιχειρούν να δώσουν σαφείς εικόνες για τα περιεχόμενά τους παράλληλα βέβαια με την επίδειξη των σχετικών υπολογιστικών δυνατοτήτων της Mathematica. Παραπέρα χαρακτηριστικό αυτών των δύο notebooks είναι η επιμελημένη προετοιμασία τους, έτσι ώστε να καταστεί σαφές πως η Mathematica έχει τη δυνατότητα να επιτρέπει τη δημιουργία με αυτή notebooks τα οποία να μοιάζουν με επιστημονικές εργασίες.
5. Τέλος το πέμπτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει δύο εφαρμοσμένα notebooks της Mathematica που αναφέρονται σε animations: σε κινούμενα σχήματα. Συγκεκριμένα το πρώτο από αυτά αναφέρεται σε ελεύθερες ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου, ενώ το δεύτερο σε ταλαντώσεις μονώροφου κτρίου, οι οποίες περιλαμβάνουν και την περίπτωση σεισμικής φορτίσεως. Και τα notebooks αυτά προετοιμάσθηκαν με αρκετή προσοχή και επιμέλεια, έτσι ώστε να δίνουν όλες τις αναγκαίες λεπτομέρειες στα θέματα που πραγματεύονται, να εξηγούν λεπτομερώς πώς μπορούν να προετοιμασθούν οι σχετικές animations και τέλος να δίνουν σειρά διαδοχικών σχημάτων για τις animations αυτές. Εντούτοις εύλογα οι αληθινές animations δε μπορούν να παρουσιασθούν σε χαρτί, αλλά μόνο στην οθόνη του υπολογιστή. Αυτό είναι βέβαια και εύκολο και εντυπωσιακό με βάση τα notebooks αυτά.

Σημειώνεται τέλος ότι για τη χρήση της Mathematica στις εφαρμοσμένες ασκήσεις και στα εφαρμοσμένα notebooks αυτού του Τεύχους 2 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** είναι ασφαλώς προαπαιτούμενες οι βασικές γνώσεις για τη Mathematica.

Επαναλαμβάνεται ότι ο όρος «η Mathematica» που χρησιμοποιείται εδώ αντί για τον πολύ ευρύτερα διαδεδομένο όρο «το Mathematica» για το ίδιο πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών φαίνεται να οφείλεται στο Στέφανο Τραχανά, που τον εισήγαγε στο βιβλίο του για τη Mathematica το 2001.

Όπως και στα κύρια μέρη αυτών των διδακτικών συγγραμμάτων **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς**, έτσι κι εδώ έχουν συμπεριληφθεί τόσο στις ασκήσεις όσο και στα notebooks της Mathematica πολλές εφαρμογές από την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού: Δυναμική, Ταλαντώσεις, Δυναμική των Κατασκευών, Μηχανική των Υλικών (Δοκοί, Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως, Λυγισμός, Ελαστικότητα), Πλάκες, Ρευστομηχανική και Περιβαλλοντική Μηχανική.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα πρώτα-πρώτα να ευχαριστήσω τους φοιτητές και τις φοιτήτριές μου Πολιτικούς Μηχανικούς για το ενδιαφέρον τους στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ξανά τις **GOTSIS Εκδόσεις** στην Πάτρα και ιδιαίτερα τον υπεύθυνό τους κ. Άγγελο Γκότση για το ενδιαφέρον τους στο παρόν βιβλίο και την τόσο επιμελημένη προετοιμασία και εκτύπωσή του. Τούτο αποτελεί ιδιαίτερα αξιόπαινη πρωτοβουλία των **GOTSIS Εκδόσεις** και μάλιστα ουσιαστικά χωρίς σημαντικό οικονομικό όφελος απλά λόγω του εξειδικευμένου χαρακτήρα αυτών των διδακτικών βιβλίων που απευθύνονται μόνο σε Πολιτικούς Μηχανικούς.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να σημειώσω πως με μεγάλη χαρά μου θα δεχθώ κάθε υπόδειξη για τη βελτίωση και αυτού του βιβλίου είτε με τη διόρθωση λαθών που έχουν παρεισφρύσει είτε και με ουσιαστικότερες υποδείξεις ως προς την επιλογή και την ταξινόμηση των ασκήσεων και των notebooks που έχουν περιληφθεί εδώ. Θα είμαι πραγματικά ευγνώμων για κάθε τέτοια υπόδειξη!

Πάτρα, Φεβρουάριος 2008

Νικόλαος Ι. Ιωακείμιδης

e-mail: n.ioakimidis@upatras.gr

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Το περιεχόμενο αυτού του Τεύχους 2 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II για Πολιτικούς Μηχανικούς** αφορά σε **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks II για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Το περιεχόμενο αυτό είναι απόλυτα κλασικό (τόσο στις εφαρμοσμένες ασκήσεις όσο και στα εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica* που περιλαμβάνονται εδώ) και βασίζεται στη σχετική πάρα πολύ εκτενή μαθηματική και τεχνική βιβλιογραφία για τις **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις**. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και στα άλλα τέσσερα διδακτικά βιβλία της παρούσας σειράς πέντε βιβλίων **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Η συμβολή του γράφοντα περιορίζεται απλά στον τρόπο παρουσίασεως της τόσο κλασικής αυτής ύλης, εδώ μέσω εφαρμοσμένων ασκήσεων καθώς και εφαρμοσμένων notebooks της *Mathematica*. Η παρουσίαση αυτή δίνει πολύ μεγάλη έμφαση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Ένα μεγάλο μέρος των περιεχομένων αυτού του Τεύχους 2 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II για Πολιτικούς Μηχανικούς**, που αφορά σε **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks II για Πολιτικούς Μηχανικούς**, κάνει χρήση του μαθηματικού προγράμματος *Mathematica*. Το πρόγραμμα αυτό έχει ευρύτατες ικανότητες τόσο για συμβολικούς και αριθμητικούς υπολογισμούς όσο και για γραφικές παραστάσεις. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η έκδοση (version) 4.1 της *Mathematica*, η οποία είναι διαθέσιμη στο γράφοντα. Σημειώνεται ότι ένα αρκετά μεγάλο μέρος αυτού του τεύχους αποτελείται από notebooks της *Mathematica*. Υπάρχουν επιπλέον και εκφωνήσεις πολλών εφαρμοσμένων ασκήσεων που πάλι βασίζονται στη χρήση της *Mathematica* ιδίως ως προς τις υποδείξεις για την επίλυσή τους. Από εκπαιδευτικής απόψεως ο χρήστης κι η χρήστρια της *Mathematica* Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να παίρνουν τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα για τις ίδιες εντολές, εφόσον βέβαια χρησιμοποιούν την έκδοση (version) 4.1 της *Mathematica*. Για άλλες εκδόσεις της *Mathematica* προφανώς θα υπάρχουν κάποιες μικροδιαφορές, όχι όμως ιδιαίτερα σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΘΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Η *Mathematica* είναι ένα εξαιρετικά αξιόπιστο μαθηματικό πρόγραμμα συμβολικών και αριθμητικών υπολογισμών επιπλέον και με εκπληκτικές δυνατότητες στις γραφικές παραστάσεις. Εντούτοις κάθε σύνθετο πρόγραμμα, όπως είναι και η *Mathematica*, είναι πιθανό να περιέχει έναν πολύ μικρό αριθμό λαθών. Κατά συνέπεια, ενώ τα αποτελέσματα των υπολογισμών με τη *Mathematica* στα notebooks της *Mathematica* που περιλαμβάνονται σ' αυτό το τεύχος είναι σωστά στη συντριπτική πλειονότητά τους, εντούτοις σε εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις μπορεί να είναι εσφαλμένα. Επομένως είναι καλό ο Πολιτικός Μηχανικός να επαληθεύει τα αποτελέσματα της *Mathematica*. Αυτό μπορεί να γίνεται είτε (α) με άμεση επαλήθευση, για παράδειγμα αντικαθιστώντας τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης στη διαφορική εξίσωση που καταλήγει έτσι σε ταυτότητα είτε (β) κάνοντας τους υπολογισμούς και με δεύτερο, διαφορετικό τρόπο και βρίσκοντας το ίδιο (ή απόλυτα ισοδύναμο) αποτέλεσμα, για παράδειγμα λύνοντας μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (i) με τον κλασικό τρόπο και (ii) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και συγκρίνοντας τα δύο αποτελέσματα.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΣΗΜΑ MATHEMATICA

Η λέξη *Mathematica* αποτελεί κατατεθειμένο εμπορικό σήμα (registered trademark, σήμα κατατεθέν) της εταιρείας Wolfram Research, Inc., 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, Η.Π.Α. Δικτυακός τόπος: <http://www.wolfram.com>. Η χρήση της λέξεως *Mathematica* εδώ γίνεται με πλήρη αναγνώριση του εμπορικού αυτού σήματος της εταιρείας Wolfram Research, Inc.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ

Με την εξαίρεση των notebooks της *Mathematica* η βασική γραμματοσειρά στα παρόντα διδακτικά βιβλία είναι η Optima, μια γραμματοσειρά κυρίως νεοκλασικού τύπου. Η Optima σχεδιάστηκε από το διάσημο σχεδιαστή γραμματοσειρών Hermann Zapf μεταξύ των ετών 1952 και 1955 και διατέθηκε εμπορικά αρχικά από την εταιρεία Linotype το 1958. Η Ελληνική παραλλαγή της, η MgOptima, που χρησιμοποιείται εδώ, διατίθεται από την εταιρεία Magenta στην Αθήνα σε CD-ROM Ελληνικών γραμματοσειρών. Και η Ελληνική παραλλαγή της Optima, η Optima Greek, σχεδιάστηκε αρχικά από τον ίδιο το Zapf και κυκλοφόρησε πρώτα επίσης από τη Linotype το 1971.¹ Το κείμενο και οι μαθηματικοί τύποι στοιχειοθετήθηκαν με τα γνωστά προγράμματα στοιχειοθεσίας Y&Y TEX και ΕTEX στην Ελληνική παραλλαγή τους. Τα προγράμματα αυτά είναι ισχυρότατα ιδίως για τη στοιχειοθεσία μαθηματικού κειμένου και υποστηρίζουν γραμματοσειρές PostScript. Τα τελικά αρχεία είναι σε μορφές DVI (Device Independent) και PDF (Portable Document Format). Φυσικά, όπως συμβαίνει συνήθως, στην τελική εκτύπωση χρησιμοποιήθηκε η μορφή PDF. Αυτή είναι και η πιο εύχρηστη και γενικά χρησιμοποιούμενη στις εκτυπώσεις.

¹Όλες αυτές οι πληροφορίες για τη γραμματοσειρά Optima προέρχονται από το τόσο ενδιαφέρον βιβλίο του Bringhurst, R. (2001), *Στοιχεία της Τυπογραφικής Τέχνης* (Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτότυπου: *The Elements of Typographic Style*, 2η Έκδοση. Hartley & Marks, 1996). Εταιρεία Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων και Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, σ. 292.

Ενδιαφέροντα σχόλια για την Optima αναφέρονται επίσης και στο βιβλίο των Grosvenor, J., Morrison, K. and Pim, A. (1992), *The PostScript Font Handbook: A Directory of Type 1 Fonts* (αναθεωρημένη έκδοση). Addison-Wesley, Wokingham, England, σ. 308. Μεταξύ αυτών των σχολίων αναφέρεται ότι η Optima είναι ίσως η πιο πρωτότυπη σχεδίαση (γραμματοσειράς εννοείται) του Hermann Zapf. Επίσης η εμφάνισή της το 1958 προκάλεσε «θόρυβο» στον κόσμο της τυπογραφίας. Έχει αρκετά παχείς και σαφείς χαρακτήρες και θεωρείται κατάλληλη όχι μόνο για τίτλους, αλλά και για συνεχές κείμενο, όπως συμβαίνει εδώ.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

A1. ΑΣΚΗΣΗ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

A1.1. Ψύξη υλικού σημείου¹

ΑΣΚΗΣΗ A1 (Κεφάλαιο A3, Μετάδοση Θερμότητας: Ψύξη Υλικού Σημείου): Σύμφωνα με το γνωστό νόμο της ψύξεως του Νεύτωνα στη Μετάδοση Θερμότητας κατά την ψύξη υλικού σημείου λόγω της εισαγωγής του σε ένα περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T_0 η θερμοκρασία $T = T(t)$ του υλικού σημείου (με t το χρόνο) επαληθεύει την απλή διαφορική εξίσωση

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_0$$

με το k γνωστή θετική σταθερά ($k > 0$). Ζητούνται: (α:2) Η επίλυση της αντίστοιχης ομογενούς (με $T_0 = 0$) διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως που οδηγεί στη χαρακτηριστική εξίσωση. (β:2) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα, αλλά τώρα σαν εξίσωσης χωριζομένων μεταβλητών. (γ:4) Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα και υποχρεωτικά με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου η εύρεση της γενικής λύσεως της πιο πάνω μη ομογενούς (τώρα με $T_0 \neq 0$) διαφορικής εξίσωσης. (Ο σχετικός τελικός τύπος δε θεωρείται γνωστός!)

A2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

A2.1. Καθαρισμός νερού

ΑΣΚΗΣΗ A2 (Κεφάλαια A3, A4, Περιβαλλοντική Μηχανική: Καθαρισμός Νερού): Στον Καθαρισμό Νερού σε ιδανικό αντιδραστήρα πλήρους ανάμιξης (δηλαδή με ομοιόμορφη, σταθερή τη συγκέντρωση $c(t)$ ενός συστατικού στον όγκο V του αντιδραστήρα) και ασυνεχούς τροφοδοτήσεως (αντιδραστήρας CMBR: completely mixed batch reactor) θεωρούμε την αποδόμηση συστατικού (εδώ ρύπου A) με μονόδρομη χημική αντίδραση πρώτης τάξεως: $A \rightarrow B$. Ισχύει η διαφορική εξίσωση του ισοζυγίου μάζας

$$\frac{dc}{dt} = -kc \quad \text{εδώ με} \quad c(0) = c_0 > 0 \quad \text{και} \quad c = c(t)$$

τη συγκέντρωση του ρύπου και k (με $k > 0$) το συντελεστή του ρυθμού αντίδρασης (εδώ διάσπασης του ρύπου). Ζητούνται: (α:1) Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. (β:1) Από αυτήν η λύση του πιο πάνω προβλήματος αρχικής τιμής. (γ:1) Κατευθείαν με ορισμένες (αντί αόριστες) ολοκληρώσεις η εύρεση της ίδιας λύσεως. (δ:2) Ο υπολογισμός του χρόνου ημιζωής $t_{1/2}$ του ρύπου, δηλαδή για συγκέντρωση του ρύπου $c(t_{1/2}) = c_0/2$. Θεωρούμε τώρα τη χημική αντίδραση να είναι δευτέρας τάξεως: $2A \rightarrow B$. Τότε το πιο πάνω πρόβλημα αρχικής τιμής παίρνει τη μορφή

$$\frac{dc}{dt} = -kc^2 \quad \text{πάλι με} \quad c(0) = c_0 > 0 \quad \text{και} \quad c = c(t).$$

¹ Σε όλες τις ασκήσεις και σε κάθε ερώτημα, π.χ. στο ερώτημα (ε:2), ο αριθμός μετά την άνω και κάτω τελεία, εδώ το 2, δείχνει τη βαρύτητα του ερωτήματος, εδώ του πέμπτου ερωτήματος, του ερωτήματος (ε:2), μέσα στην άσκηση.

Ζητούνται: (ε:2) Η συγκέντρωση του ρύπου $c_f := c(t_f)$ τη χρονική στιγμή t_f . (στ:2) Ο χρόνος t_f που απαιτείται, ώστε η συγκέντρωση του ρύπου να μειωθεί από c_0 αρχικά σε c_f τελικά: χρόνος αντίδρασης στον αντιδραστήρα CMBR. (ζ:1) Ο χρόνος ημιζωής $t_{1/2}$ του ρύπου στον αντιδραστήρα.

ΑΣΚΗΣΗ A3 (Κεφάλαια A3, A4, Περιβαλλοντική Μηχανική: Καθαρισμός Νερού): Συνεχίζουμε εδώ την προηγούμενη άσκηση. Θεωρούμε ξανά την πρώτη διαφορική εξίσωση εκεί (για χημική αντίδραση πρώτης τάξεως) μαζί με τη σχετική αρχική συνθήκη: πρόβλημα αρχικής τιμής. Για την επίλυσή του χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard με

$$c_1(t) = c_0.$$

Ζητούνται: (α:1) Ο σχετικός επαναληπτικός (ή αναδρομικός) τύπος. Στη συνέχεια οι προσεγγίσεις (β:1) $c_2(t)$, (γ:1) $c_3(t)$ και (δ:1) $c_4(t)$. (ε:2) Εκτίμηση για την προσέγγιση $c_k(t)$. (στ:2) Εκτίμηση για το τελικό αποτέλεσμα $c_\infty(t)$ με (ζ:2) σύγκρισή με τη λύση που βρέθηκε στην προηγούμενη άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ A4 (Κεφάλαιο A17, Περιβαλλοντική Μηχανική: Καθαρισμός Νερού): Σε υδατικό σύστημα, π.χ. έναν αντιδραστήρα στον Καθαρισμό Νερού, προκύπτει για τη συγκέντρωση $c = c(t)$ ρύπου A με αποδόμηση πρώτης τάξεως η διαφορική εξίσωση

$$V \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = w(t)$$

με τα V και K γνωστές σταθερές και $w(t)$ το ρυθμό (μάζας) εισόδου του ρύπου στον αντιδραστήρα. Εδώ η συνάρτηση $w(t)$ θεωρείται περιοδική με περίοδο T . Ζητούνται: (α:1) Πρώτα να αναφερθούν η σχετική μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier και ο τύπος για τους συντελεστές της W_n . (β:5) Στη συνέχεια με γνωστή αυτήν τη σειρά Fourier η αντίστοιχη σειρά Fourier για τη συγκέντρωση $c(t)$ του ρύπου A στον αντιδραστήρα. (γ:2) Ποια είναι εδώ η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας ω ;

ΑΣΚΗΣΗ A5 (Κεφάλαια A3, A14, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική, Υδατικά Συστήματα, Καθαρισμός Νερού): Σε υδατικό σύστημα (π.χ. σε *αντιδραστήρα* καθαρισμού πόσιμου νερού ή αποβλήτων ή σε λίμνη με δύο ποτάμια: ένα εισροής και ένα εκροής του νερού) με το νερό να περιέχει ρύπο A με συγκέντρωση $c(t)$ προκύπτει τελικά η διαφορική εξίσωση

$$V \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = w(t)$$

με αρχική συνθήκη τη $c(0) = c_0$, με τα V και K γνωστές σταθερές και με $w(t)$ γνωστή συνάρτηση εισροής του ρύπου στο υδατικό σύστημα. Ζητούνται: (α:4) Με εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής της παραμέτρου (ο τελικός τύπος της δε θεωρείται γνωστός!) η λύση $c(t)$ αυτής της διαφορικής εξισώσεως με αρχική συνθήκη, που αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικής τιμής. (β:2) Με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, με τη χρήση του συμβόλου της αθροίσεως \sum και με $w(t) = 0$ (δηλαδή ομογενής εξίσωση!) η ανάλογη λύση $c_h(t)$ τελικά (γ:2) με τη γραφή της με όρους μέχρι και t^4 .

A2.2. Περιβαλλοντική υδραυλική

ΑΣΚΗΣΗ A6 (Κεφάλαια A1, A2, A3, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Στη μόνιμη (σταθερή) κίνηση ρύπου σε υδατόρρευμα με ταχύτητα V μόνο με μεταγωγή (χωρίς διάχυση ούτε διασπορά), ενώ παρουσιάζεται ταυτόχρονα και αποδόμηση του ρύπου πρώτης τάξεως με σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως k_0 , προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$Vc'(x) = -kc(x) \quad \text{και καλύτερα} \quad c'(x) = -\hat{k}c(x) \quad \text{με} \quad \hat{k} := \frac{k}{V}$$

και $c(x)$ τη συγκέντρωση του ρύπου. Αρχική συνθήκη είναι η $c(0) = c_0$. Ζητούνται: (α:2) Πρώτα-πρώτα ο σχηματισμός της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως με χρήση κατάλληλου όγκου ελέγχου. Στη συνέχεια με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard (β:1) Ο σχετικός επαναληπτικός (ή αναδρομικός) τύπος. (γ:1) Οι προσεγγίσεις $c_1(x)$ (αυτή απλά υποτίθεται), $c_2(x)$ και $c_3(x)$.

(δ:3) Με χρήση της επαγωγικής μεθόδου η μαθηματική απόδειξη (όχι η εικασία!) της n -τάξεως προσεγγίσεως

$$c_n(x) = c_0 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{\hat{k}^i x^i}{i!}.$$

και από αυτήν (ε:1) η οριακή συνάρτηση $c_\infty(x)$ σε κλειστή μορφή χωρίς σειρά.

ΑΣΚΗΣΗ Α7 (Κεφάλαια Α1, Α2, Α3, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική):

Στη μόνιμη (σταθερή) μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα (π.χ. σε ποτάμι) με μεταγωγή και με αποδόμηση του ρύπου πρώτης τάξεως (με σταθερά k , $k > 0$) και με εισαγωγή ρύπου ανά μονάδα όγκου του υδατορρεύματος $r(x)$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$Vc'(x) = -kc(x) + r(x)$$

με V την ταχύτητα του νερού στο υδατόρρευμα και $c(x)$ τη συγκέντρωση του ρύπου. Η συνάρτηση $r(x)$ είναι γνωστή, αλλ' εδώ αυθαίρετη (όχι συγκεκριμένη). Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξισώσεως (χωρίς επεξηγήσεις). (β:1) Ο έλεγχος της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως εάν ή όχι είναι πλήρης (ή ακριβής). (γ:1) Ο προσδιορισμός του σχετικού ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(x)$ στην παρούσα περίπτωση χωρίς όμως τη χρήση γενικού τύπου. (δ:1) Η γενική λύση $c_g(x)$ της ίδιας διαφορικής εξισώσεως και (ε:1) η μερική (ή ειδική) λύση της $c_p(x)$ που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $c(0) = c_0$. Η επαλήθευση της μερικής αυτής λύσεως $c_p(x)$ (στ:1) ως προς την αρχική συνθήκη και (ζ:2) ως προς την ίδια τη διαφορική εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΗ Α8 (Κεφάλαια Α3, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική: Διαλυμένο Οξυγόνο): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική με βάση τις εξισώσεις των Streeter-Phelps (1925) για το έλλειμμα $D = D(x)$ της συγκεντρώσεως διαλυμένου οξυγόνου (ως προς τη συγκέντρωση κορεσμού του) στο νερό ποταμού προκύπτει στο τέλος η διαφορική εξίσωση²

$$V \frac{dD}{dx} = k_d L_0 e^{-k_d x/V} - k_a D \quad \text{με} \quad D = D(x)$$

και με τις ποσότητες V , k_d , k_a και L_0 γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται (κανένας τύπος δε θεωρείται γνωστός!): (α:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η γενική λύση $D_h(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως. (β:2) Με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου η γενική λύση $D_g(x)$ της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. (γ:2) Η μερική λύση $D_p(x)$ που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $D(0) = D_0$. (δ:2) Η πλήρης επαλήθευση της μερικής λύσεως $D_p(x)$.

Α3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Α3.1. Εκροή ρευστού από οριζόντιο σωλήνα

ΑΣΚΗΣΗ Α9 (Κεφάλαια Α1, Α3, Α4, Ρευστομηχανική: Εκροή Ρευστού από Οριζόντιο Σωλήνα):

Θεωρούμε την εκροή ασυμπίεστου ρευστού από έναν οριζόντιο σωλήνα μήκους L στο κάτω μέρος δοχείου με ύψος του ρευστού στο δοχείο h . Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Υπό τις συνθήκες αυτές η άγνωστη ταχύτητα του ρευστού $v = v(t)$ (με t το χρόνο) επαληθεύει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση, που προκύπτει στο παρόν πρόβλημα από την εξίσωση Bernoulli:

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = gh.$$

Ζητούνται: (α:1) Για τη συνάρτηση $w = \tanh x$ να αποδειχθεί ότι

$$w = \tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

²Οι εξισώσεις των Streeter-Phelps αναφέρονται π.χ. στο σύγγραμμα του Schnoor J. L. (2003), *Περιβαλλοντικά Μο- ντέλα: Τύχη και Μεταφορά Ρύπων στον Αέρα, Νερό και Έδαφος*. Μετάφραση από την Αγγλική Έκδοση (Wiley, 1996). Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, Ενότητα 6.3, σσ. 263-267.

(β:1) Για την αντίστροφη της συνάρτησης $x = \tanh^{-1} w$ να αποδειχθεί ότι

$$x = \tanh^{-1} w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w}.$$

(γ:1) Στη συνέχεια να αποδειχθούν οι δύο τύποι παραγωγίσεως (με το δεύτερο από τον πρώτο)

$$\frac{d}{dw} (\tanh^{-1} w) = \frac{1}{1-w^2} \quad \text{και} \quad \frac{d}{dw} (\tanh^{-1} \frac{w}{b}) = \frac{b}{b^2-w^2}.$$

(δ:1) Να δοθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης. (ε:2) Με τη χρήση του συμβόλου

$$v_{\infty} = \sqrt{2gh}$$

καθώς και της αρχικής συνθήκης $v(0) = 0$ (μηδενική αρχική ταχύτητα) να βρεθεί η λύση $v_p(t)$ του σχετικού προβλήματος αρχικής τιμής. (στ:1) Από την πιο πάνω λύση $v_p(t)$ να υπολογισθεί το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} v_p(t)$. (ζ:1) Τέλος να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της λύσεως $v_p(t)$ φυσικά για $t \geq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ A10 (Κεφάλαια A4, A20, Ρευστομηχανική, Εκροή Ρευστού από Οριζόντιο Σωλήνα):

Σε πρόβλημα εκροής ιδεατού ρευστού από δοχείο μέσω οριζόντιου σωλήνα μήκους L προκύπτει (με βάση τη γνωστή εξίσωση του Bernoulli στη Ρευστομηχανική) η μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{\infty}^2 - v^2}{2L} \quad \text{με} \quad t \geq 0,$$

με t το χρόνο, $v = v(t)$ την άγνωστη συνάρτηση (η οποία σχετίζεται με την ταχύτητα του ρευστού στο άκρο του σωλήνα, που υποτίθεται ότι ανοίγει ακριβώς τη χρονική στιγμή $t = 0$, προηγουμένως ήταν κλειστό) και v_{∞} την τελική ταχύτητα του ρευστού στο ίδιο άκρο (για $t \rightarrow \infty$, δηλαδή μετά το μεταβατικό φαινόμενο). Αυτή θεωρείται γνωστή σταθερά. Η αρχική ταχύτητα του ρευστού είναι προφανώς μηδενική: $v(0) = 0$. Ζητούνται: (α:6) Η επίλυση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με την προσεγγιστική μέθοδο Taylor και με όρους του χρόνου t μέχρι και t^5 . (β:2) Να αναφερθούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα, εάν υπάρχουν, της μεθόδου Taylor σε σύγκριση με την λίγο πιο αριθμητική συγγενή της προσεγγιστική μέθοδο Euler. (γ:3) Τώρα με την προσεγγιστική μέθοδο Euler και με βάση την αρχική τιμή $v_0 = v(0) = 0$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(t)$ ο υπολογισμός των αμέσως επόμενων τιμών της $v_1 \approx v(h)$, $v_2 \approx v(2h)$ και $v_3 \approx v(3h)$ με το h γνωστό μικρό χρονικό διάστημα ($h = \Delta t$) εδώ χωρίς συγκεκριμένη αριθμητική τιμή και. (δ:2) Ποιος γενικότερος τύπος δίδει την τιμή $v_n \approx v(nh)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(t)$ τη χρονική στιγμή $t_n = nh$ σαν συνάρτηση της αντίστοιχης γνωστής προσεγγιστικής τιμής $v_{n-1} \approx v((n-1)h)$ τη χρονική στιγμή $t_{n-1} = (n-1)h$; (ε:2) Να αναφερθούν (χωρίς αποδείξεις) τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα, εάν υπάρχουν βέβαια, της μεθόδου Euler σε σύγκριση με την ακριβέστερη αριθμητική μέθοδο Runge-Kutta τετάρτης τάξεως με έμφαση στις τάξεις των δύο μεθόδων, δηλαδή ως προς τα σφάλματά τους. (στ:1) Σε ποιο μάθημα εξετάζονται εκτενέστερα οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσεως διαφορικών εξισώσεων;

A3.2. Διδιάστατη ροή

ΑΣΚΗΣΗ A11 (Κεφάλαιο A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή):

Εδώ ζητούνται: (α:1) Σε ποια τέσσερα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζονται ορθογώνιες τροχιές και πώς καλούνται όλες οι σχετικές καμπύλες; (β:1) Η οικογένεια των περιφερειών με κέντρο πάνω στον άξονα y που περνάνε από την αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$. (γ:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση. (δ:1) Η διαφορική εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών τους και (ε:2) η γενική λύση της. (στ:1) Τι ακριβώς καμπύλες παριστάνει η πιο πάνω λύση; (ζ:1) Τί παριστάνουν όλες οι πιο πάνω καμπύλες, δηλαδή οι αρχικές περιφέρειες και οι ορθογώνιες τροχιές τους που βρέθηκαν, στη Ρευστομηχανική;

ΑΣΚΗΣΗ A12 (Κεφάλαιο A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή):

Σε διδιάστατη (επίπεδη), μόνη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική μέσα σε άπειρο μέσον που οφείλεται σε σημειακή πηγή στην αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$ οι γραμμές ροής είναι οι ευθείες

γραμμές που διέρχονται από τη σημειακή πηγή. Ζητούνται: (α:1) Οι αλγεβρικές εξισώσεις των γραμμών ροής. (β:1) Η διαφορική εξίσωση που επαληθεύουν. (γ:4) Ποιες είναι οι ισοδυναμικές γραμμές που αποτελούν τις ορθογώνιες τροχιές των γραμμών ροής υποχρεωτικά με τη μέθοδο των διαφορικών εξισώσεων, εδώ και της διαφορικής εξίσωσης των ισοδυναμικών γραμμών, και στη συνέχεια με την επίλυση της διαφορικής αυτής εξίσωσης; (δ:2) Ποιο ακριβώς είναι το φυσικό ανάλογο στη Μετάδοση Θερμότητας; (με πολλές λεπτομέρειες).

ΑΣΚΗΣΗ A13 (Κεφάλαιο A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Θεωρούμε την οικογένεια των περιφερειών ακτίνας a

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

στο επίπεδο Oxy . Ζητούνται: (α:1) Ο σχηματισμός της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με απαλοιφή της αυθαίρετης σταθεράς (της ακτίνας) a . (β:2) Η διαφορική εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών των πιο πάνω περιφερειών. (γ:2) Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης των ορθογωνίων αυτών τροχιών. (δ:1) Τι ακριβώς σχήματα στο επίπεδο Oxy δηλώνει η λύση του προηγούμενου ερωτήματος; Να γίνει και το σχετικό πλήρες (αν και πρόχειρο) σχήμα. (ε:1) Σε ποιο πρόβλημα της Ρευστομηχανικής παρουσιάζονται ορθογώνιες τροχιές και τί γνωρίζετε γι' αυτές; (με λεπτομέρειες). Εδώ ποιες είναι οι γραμμές ροής και οι ισοδυναμικές γραμμές (ή αντίστροφα); (στ:1) Σε ποια άλλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζονται επίσης ορθογώνιες τροχιές;

ΑΣΚΗΣΗ A14 (Κεφάλαιο A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Στη Ρευστομηχανική (ή τη Μηχανική των Ρευστών) σε συγκεκριμένο πρόβλημα διδιάστατης (επίπεδης), μόνιμης (σταθερής) και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού οι ισοδυναμικές γραμμές δίνονται από τις εξισώσεις

$$\Phi(x, y) = x^3 - 3xy^2 = C_1$$

με $\Phi(x, y)$ το δυναμικό ταχύτητας και C_1 σταθερά. (Φυσικά η σταθερά αυτή C_1 μεταβάλλεται από τη μία ισοδυναμική γραμμή στην άλλη.) Ζητούνται: (α:3) Με απαλοιφή της σταθεράς C_1 η διαφορική εξίσωση η οποία ισχύει για όλες τις ισοδυναμικές γραμμές $\Phi(x, y) = C_1$ με άγνωστη συνάρτηση την $y = y(x)$. (β:4) Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση για τις γραμμές ροής $\Psi(x, y) = C_2$ με $\Psi(x, y)$ τη ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) και C_2 επίσης σταθερά. Υπενθυμίζεται ότι οι ισοδυναμικές γραμμές $\Phi(x, y) = C_1$ και οι γραμμές ροής $\Psi(x, y) = C_2$ αποτελούν σύστημα ορθογωνίων τροχιών στο επίπεδο Oxy της ροής. (γ:1) Τέσσερις χαρακτηρισμοί της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ A15 (Κεφάλαια A3, A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Συνεχίζουμε εδώ την προηγούμενη άσκηση. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y' = -\frac{6xy}{3(x^2 - y^2)} \quad \text{με } y = y(x).$$

Ζητούνται: (α:2) Ο έλεγχος εάν πρόκειται ή όχι για πλήρη (ή ακριβή) διαφορική εξίσωση. (β:3) Σε καταφατική περίπτωση η γενική λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης σε πεπλεγμένη (όχι αναγκαστικά λυμένη ως προς y) μορφή $\Psi(x, y) = C_2$ με το C_2 αυθαίρετη σταθερά. (γ:3) Η επαλήθευση της ορθογωνιότητας των ισοδυναμικών γραμμών $\Phi(x, y) = C_1$ της προηγούμενης ασκήσεως και των καμπύλων $\Psi(x, y) = C_2$, δηλαδή των γραμμών ροής, που προέκυψαν στο προηγούμενο ερώτημα αυτής της ασκήσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A16 (Κεφάλαια A3, A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Θεωρούμε τη διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή), αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι εδώ γνωστές και έχουν τη μορφή

$$x^2 - y^2 + x = C_\phi$$

με το C_ϕ αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση και από αυτήν (β:1) η διαφορική εξίσωση των γραμμών ροής. (γ:1) Για την τελευταία, δηλαδή για τη διαφορική εξίσωση των γραμμών ροής, ο έλεγχος ισχύος της συνθήκης ολοκληρωσιμότητας ή πληρότητας. (δ:3) Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης των γραμμών ροής υποχρεωτικά με τη

μέθοδο των πλήρων (ή ακριβών) διαφορικών εξισώσεων στη συνήθη μορφή της (χωρίς τέχνασμα). (ε:1) Οι εξισώσεις των γραμμών ροής. (στ:1) Σε ποια άλλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζονται ορθογώνιες τροχιές;

ΑΣΚΗΣΗ A17 (Κεφάλαια A3, A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Θεωρούμε τη διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) και αστροβίλη ροή ιδεατού ρευστού. Οι γραμμές ροής είναι εδώ γνωστές και έχουν τη μορφή

$$3x^2y_1 - y_1^3 = C_\psi$$

με το C_ψ αυθαίρετη σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση και από αυτήν (β:1) η διαφορική εξίσωση των ισοδυναμικών γραμμών. Για την τελευταία, δηλαδή τη διαφορική εξίσωση των ισοδυναμικών γραμμών, (γ:2) η αναγωγή της σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και (δ:2) η λύση της σε τελική μορφή, δηλαδή η εξίσωση των ισοδυναμικών γραμμών $\Phi(x, y_2) = C_\phi$. (ε:2) Τέλος με βάση τις εξισώσεις των ισοδυναμικών γραμμών $\Phi(x, y_2) = C_\phi$ και των γραμμών ροής $\Psi(x, y_1) = C_\psi$ η επαλήθευση της ορθογωνιότητάς τους στο παρόν συγκεκριμένο πρόβλημα ροής.

ΑΣΚΗΣΗ A18 (Κεφάλαια A1, A3, A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Θεωρούμε εδώ τη διαφορική εξίσωση

$$\cos x \sinh y \, dx + \sin x \cosh y \, dy = 0$$

με μεταβλητές τις x και y . Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη ότι πρόκειται για μια πλήρη (ή ακριβή) διαφορική εξίσωση. (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της: είδος, τάξη, βαθμός, τύπος, κλπ. (γ:4) Η γενική λύση της σε πεπλεγμένη μορφή. Στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού η λύση αυτή μπορεί να εκφράζει τις γραμμές ροής του ρευστού. (δ:1) Η επαλήθευση της λύσεως αυτής.

ΑΣΚΗΣΗ A19 (Κεφάλαια A3, A4, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Στη διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή με το χρόνο) και αστροβίλη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική οι ισοδυναμικές γραμμές (με το δυναμικό ταχύτητας ροής σταθερό κατά μήκος τους) και οι γραμμές ροής του ρευστού (με τη ροϊκή συνάρτηση ή συνάρτητη ροής επίσης σταθερή κατά μήκος τους) αποτελούν σύστημα ορθογωνίων τροχιών. Σε μια συγκεκριμένη ροή βρέθηκε πειραματικά ότι οι γραμμές ροής δίδονται από εξίσωση της μορφής $f(x, y, C_1) = 0$, πιο συγκεκριμένα από την εξίσωση

$$\cosh x \cos y = C_1$$

που γράφεται αμέσως και στη μορφή $f(x, y, C_1) = 0$ με το C_1 αυθαίρετη πραγματική σταθερά που βέβαια αλλάζει από την μια γραμμή ροής στην άλλη. Ζητούνται: (α:2) Ποια είναι η διαφορική εξίσωση της χαμηλότερης δυνατής τάξεως (δηλαδή εν προκειμένω πρώτης τάξεως) που επαληθεύουν οι πιο πάνω γραμμές ροής; Να γίνει και η σχετική επαλήθευση με την εύρεση της γενικής λύσεως της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (β:2) Ποια είναι επομένως η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση για τις ισοδυναμικές γραμμές, δηλαδή για τις ορθογώνιες τροχιές των γραμμών ροής που ήδη αναφέρθηκαν; Ποια είναι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξισώσεως, δηλαδή η εξίσωση των ισοδυναμικών γραμμών $g(x, y, C_2) = 0$; Να γίνει και επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε. (γ:2) Τελικά να επαληθευθεί επίσης ότι στη ροή την οποία εξετάζουμε σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο (x, y) του επιπέδου η γραμμή ροής και η ισοδυναμική γραμμή που περνούν ακριβώς από το σημείο αυτό πραγματικά τέμνονται κάθετα (γι' αυτό και καλούνται ορθογώνιες τροχιές). (δ:2) Σε ποιο άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα (πέρα από τη Ρευστομηχανική) παρουσιάζονται ορθογώνιες τροχιές; (Η απάντηση με πολλές σχετικές λεπτομέρειες).

ΑΣΚΗΣΗ A20 (Κεφάλαιο A15, Ρευστομηχανική: Διαδιάστατη Ροή με Λεπτά Εμπόδια, Θραυστομηχανική: Ρωγμές): Θεωρούμε τα γνωστά πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους $T_n(x)$ που αποτελούν σύστημα ορθογωνίων πολυωνύμων στο διάστημα $[-1, 1]$ με συνάρτηση βάρους τη συνάρτηση

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1)$$

Συγκεκριμένα ισχύει

$$\int_{-1}^1 w(x) T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{για } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{για } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{για } m = n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Επίσης θεωρείται γνωστή η σχέση

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad \text{με } x = \cos \theta \quad \text{και επομένως } \theta = \cos^{-1} x \equiv \arccos x. \quad (3)$$

Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη των τριών σχέσεων (2). (β:2) Οι ρίζες x_k (με $k = 1, 2, \dots, n$) του πολυωνύμου $T_n(x)$. (γ:1) Τα πολυώνυμα Chebyshev $T_0(x)$, $T_1(x)$ και $T_2(x)$. (δ:1) Αναφορά για τη μορφή των ολοκληρωμάτων όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως με κόμβους τις n ρίζες x_k του πολυωνύμου $T_n(x)$ και κατάλληλα βάρη A_k . (ε:1) Αναφορά ενός παραδείγματος σε στερεό όπου είναι χρήσιμη η χρήση αυτού του κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως (με επεξηγήσεις) και ανάλογα (στ:1) σε ρευστό, εδώ και με την αναγκαία επιπρόσθετη επεξήγηση.

A4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

A4.1. Δοκοί με συνηθισμένη φόρτιση

ΑΣΚΗΣΗ A21 (Κεφάλαιο A5, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Σε μια συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) με φόρτιση απλά καμπτικές ροπές M_0 και M_L στα δύο άκρα της προκύπτει η εξής πάρα πολύ απλή ομογενής διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως:

$$v''''(x) = 0 \quad \text{με } 0 < x < L,$$

με x τη θέση κατά μήκος της δοκού και $v(x)$ το βέλος κάμψεως της δοκού, το οποίο σχηματίζει την ελαστική γραμμή της στην κάμψη. Ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:2) Η απόδειξη ότι οι θεμελιώδεις λύσεις που παρουσιάζονται στη γενική αυτή λύση είναι γραμμικά ανεξάρτητες τόσο με άμεσο τρόπο, δηλαδή με βάση τον ορισμό των γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων, όσο και (γ:1) με τη χρήση ορίζουσας Wronski. (δ:3) Η μερική λύση που αντιστοιχεί σε υποτιθέμενες γνωστές αρχικές συνθήκες

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI} \quad \text{και} \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}$$

με M_0 την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) που ήδη αναφέρθηκε, Q_0 την τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού και EI τη δυσκαμψία της δοκού.

ΑΣΚΗΣΗ A22 (Κεφάλαια A1, A2, A3, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε το πρόβλημα συνηθούς δοκού σε κάμψη. Ζητούνται: (α:1) Πότε ακριβώς μια δοκός καλείται συνήθης; (β:1) Ποια είναι η γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως για το βέλος κάμψεως (την ελαστική γραμμή) $v(x)$ της δοκού με γνωστή σταθερή δυσκαμψία της δοκού EI και με επίσης γνωστή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$; (γ:2) Να δοθούν λεπτομερείς επεξηγήσεις για τη γραμμικοποίηση που προηγήθηκε στην ακριβέστερη αντίστοιχη μη γραμμική διαφορική εξίσωση, ώστε να προκύψει τελικά η γραμμική διαφορική εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος. (δ:3) Με βάση τη διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (β) ποια είναι η τελική και απλοποιημένη έκφραση του βέλους κάμψεως (της ελαστικής γραμμής) $v(x)$ προβόλου μήκους L και υπό γνωστή σταθερή κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0$; Ο πρόβλος θεωρείται ελεύθερος στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και πακτωμένος στο δεξιό $x = L$. (ε:1) Ποια είναι η μέγιστη τιμή v_{\max} του βέλους κάμψεως $v(x)$ του προβόλου αυτού;

ΑΣΚΗΣΗ A23 (Κεφάλαια A1, A2, A3, A5, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη αμφιέρειστη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και σταθερής δυσκαμψίας EI υπό ομοιόμορφη κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x) = p_0$. Ζητούνται: (α:1) Απλά να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση και να δοθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (β:2) Να λυθεί το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

με προσδιορισμό του βέλους κάμψεως $v_p(x)$ της παρούσας αμφιέριστης δοκού σε απλοποιημένη κατά το δυνατόν μορφή. Στη συνέχεια να υπολογισθούν (γ:1) η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$ και (δ:1) η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(x)$. (ε:1) Επίσης να γίνει επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών από τη λύση $v_p(x)$ που βρέθηκε. (στ:1) Χωρίς τη χρήση οριζουσας να αποδειχθεί ότι οι πέντε συναρτήσεις $v_k(x) = x^k$ (με $k = 0, 1, 2, 3, 4$) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (ζ:1) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα, τώρα όμως με τη χρήση κατάλληλης οριζουσας.

ΑΣΚΗΣΗ A24 (Κεφάλαια A2, A3, A5, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε μια συνήθη μονόπακτη υπερστατική δοκό μήκους L και δυσκαμψίας EI υπό σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση p_0 . Η πάκτωση είναι στο αριστερό άκρο της $x = 0$, ενώ η κύλιση στο δεξιό άκρο της $x = L$. Ζητούνται: (α:1) Να αναφερθεί πλήρως το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. (β:2) Να υπολογισθεί η γενική λύση $v_g(x)$ της σχετικής διαφορικής εξίσωσης και από αυτήν (γ:3) Να υπολογισθεί η λύση $v_p(x)$ του πιο πάνω προβλήματος συνοριακών τιμών. (δ:2) Να επαληθευθεί αυτή η λύση $v_p(x)$ ως προς όλες τις εξισώσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών: τόσο τη διαφορική εξίσωση όσο και τις συνοριακές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ A25 (Κεφάλαια A1, A2, A3, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε το πρόβλημα της κάμψεως συνήθους δοκού (αρχικά ευθύγραμμης, ομογενούς, ισότροπης, γραμμικά ελαστικής και σταθερής διατομής υπό τις συνήθεις παραδοχές της θεωρίας των Bernoulli-Euler) κατά μήκος του άξονα Ox στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στην Μηχανική των Υλικών. Η δυσκαμψία της δοκού είναι EI : γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας E του υλικού της επί τη ροπή αδρανείας I της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονά της στην κάμψη. Το βέλος κάμψεως, που δημιουργεί την σχετική ελαστική γραμμή, δηλώνεται με $v = v(x)$, ενώ η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) κατά μήκος της δοκού με $M = M(x)$. Η σχετική θεμελιώδης εξίσωση που προκύπτει στη Μηχανική των Υλικών είναι $M = EI\kappa$ με $\kappa = \kappa(x)$ την καμπυλότητα της δοκού σε κάμψη, εδώ την προσημασμένη καμπυλότητα. Η προσημασμένη καμπυλότητα κ δίνεται από το γνωστό τύπο

$$\kappa = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}}.$$

Επομένως η σχετική διαφορική εξίσωση είναι μη γραμμική και έχει την μορφή

$$\frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = \frac{M}{EI}.$$

Για την επίλυση της μη γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης χρησιμοποιείται η αλλαγή μεταβλητής $v' = \tan \theta$ ($v' = v'(x)$) με $\theta = \theta(x)$ τη γωνία κλίσεως ή γωνία στροφής (ή απλά στροφή) κατά μήκος της δοκού. Ζητούνται: (α:2) Ποια μορφή παίρνει τώρα, δηλαδή μετά αυτήν την αλλαγή μεταβλητής, η διαφορική εξίσωση της δοκού; (β:1) Τι χαρακτηρισμούς μπορείτε να κάνετε γι' αυτή; (γ:2) Με την καμπτική ροπή $M = M(x)$ γνωστή και τη δοκό να θεωρείται πακτωμένη στο αριστερό άκρο της $x = 0$ (οπότε $\theta(0) = 0$) ποια είναι η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης ως προς τη γωνία κλίσεως ή γωνία στροφής (ή απλά στροφή) $\theta = \theta(x)$; (δ:2) Πέραπέρα η αντίστοιχη έκφραση για το βέλος κάμψεως $v = v(x)$; (ε:1) Ποια μορφή παίρνει η απάντηση στο ερώτημα (γ), εάν $M = (L - x)P$ με τα L (μήκος) και P (συγκεντρωμένο φορτίο, δύναμη) σταθερές; (στ:1) Ποια μορφή παίρνουν οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα, εάν γίνει (όπως συνήθως γίνεται) γραμμικοποίηση της διαφορικής εξίσωσης της δοκού; (ζ:1) Είναι συνήθως δικαιολογημένη αυτή η γραμμικοποίηση; Γιατί ακριβώς;

ΑΣΚΗΣΗ A26 (Κεφάλαια A1, A2, A3, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε το πρόβλημα συνήθους δοκού σε κάμψη. Ζητούνται: (α:1) Ποια είναι η γραμμική διαφορική εξίσωση για το βέλος κάμψεως (που σχηματίζει την ελαστική γραμμή) $v(x)$ της δοκού με γνωστή τη σταθερή δυσκαμψία της δοκού EI και με επίσης γνωστή την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$; (β:2) Να δοθούν λεπτομερείς επεξηγήσεις για τη γραμμικοποίηση που προηγήθηκε στην ακριβέστερη αντίστοιχη μη γραμμική διαφορική εξίσωση, έτσι ώστε να προκύψει τελικά η γραμμική διαφορική εξίσωση του

προηγούμενου ερωτήματος. (γ:3) Με βάση τη διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α) ποια είναι η τελική κι απλοποιημένη έκφραση του βέλους κάμψεως (της ελαστικής γραμμής) $v(x)$ αμφιέριστης δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και υπό γνωστή σταθερή κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0$; (δ:2) Να γίνει η επαλήθευση όλων των συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της αμφιέριστης δοκού για τη λύση $v(x)$ που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα.

ΑΣΚΗΣΗ A27 (Κεφάλαια A2, A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Στην Τεχνική Θεωρία Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών θεωρούμε το πάρα πολύ απλό, τετριμμένο σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως

$$EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} = M(x) \quad \text{και} \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = p(x) \quad \text{με} \quad 0 < x < L,$$

με τα EI και L γνωστές θετικές σταθερές, x την ανεξάρτητη μεταβλητή, $v(x)$ και $M(x)$ τις δύο άγνωστες συναρτήσεις και $p(x)$ γνωστή αυθαίρετη (όχι συγκεκριμένη, οποιαδήποτε) τμηματικά συνεχή συνάρτηση υπό γνωστές αρχικές (για $x = 0$) συνθήκες: $v(0) = v_0$, $v'(0) = \theta_0$, $M(0) = M_0$ και $M'(0) = Q_0$. Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς βασικό πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού αντιστοιχεί το πιο πάνω τόσο απλό σύστημα διαφορικών εξισώσεων; (με λεπτομέρειες για όλα τα μεγέθη!) (β:1) Η αναγωγή του ίδιου συστήματος των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με χρήση και των συμβολισμών $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ και $M_L(s) = \mathcal{L}\{M(x)\}$. (γ:2) Η επίλυση του συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους άγνωστους μετασχηματισμούς Laplace $V(s)$ και $M_L(s)$. (δ:2) Με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $M_L(s)$ η εύρεση της άγνωστης συναρτήσεως $M(x)$. (ε:2) Απολύτως ανάλογα και για την άγνωστη συνάρτηση $v(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ A28 (Κεφάλαια A2, A3, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Εδώ θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI . Η δοκός είναι μονόπακτη υπερστατική με κύλιση στο αριστερό άκρο της $x = 0$ και πάκτωση στο δεξιό $x = L$ υπό ομοιόμορφη (σταθερή) κατανεμημένη κάθετη φόρτιση p_0 σε όλο το μήκος της. Ζητούνται: (α:1) Απλά να αναφερθούν η σχετική γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως ως προς το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού και οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν. (β:2) Να βρεθεί η γενική λύση της. (γ:1) Να υπολογισθούν οι σχετικές εκφράσεις της στροφής $\theta(x)$, της ροπής κάμψεως $M(x)$ και της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$. (δ:1) Να χρησιμοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες για $x = 0$ στην πιο πάνω λύση για τον προσδιορισμό δύο από τις σταθερές. (ε:1) Ανάλογα και για $x = L$ για την αναγωγή του προσδιορισμού και των άλλων δύο σταθερών σε ένα σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (χωρίς όμως την επίλυση του!). (στ:3) Σε περίπτωση μη σταθερής (μεταβλητής) δυσκαμψίας $EI = EI(x)$ κατά μήκος της δοκού να βρεθεί η σχετική γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως στην πιο σύντομη μορφή της. (Όλοι οι σχετικοί τύποι για την εύρεσή της, Γεωμετρίας, Στατικής και Μηχανικής των Υλικών, θεωρούνται γνωστοί.) (ζ:1) Τέλος να αναφερθεί ένα πολύ κοινό σε συνηθισμένες κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού παράδειγμα προβόλου με μη σταθερή δυσκαμψία $EI = EI(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ A29 (Κεφάλαια A2, A5, A13, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε κατακόρυφη αμφίπακτη δοκό ύψους h (με $0 \leq x \leq h$) και δυσκαμψίας EI . Όμως η κάτω πάκτωση (στο σημείο $x = 0$) έχει οριζόντια μετατόπιση d_1 (κάθετα στη δοκό), ενώ η πάνω πάκτωση (στο σημείο $x = h$) έχει οριζόντια μετατόπιση d_2 (και πάλι κάθετα στη δοκό). Ζητούνται: (α:1) Κατευθείαν η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες. (β:1) Υποχρεωτικά με εκθετική αντικατάσταση η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως και (γ:1) η απόδειξη γραμμικής ανεξαρτησίας των συναρτήσεων οι οποίες εμφανίζονται σ' αυτήν τόσο χωρίς τη χρήση οριζουσας όσο και με τη χρήση οριζουσας. (δ:3) Το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού (εδώ κατά την οριζόντια κατεύθυνση) λαμβάνοντας υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες. (ε:1) Η σχετική τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(x)$ και (στ:1) τι παρατηρείται γι' αυτήν; (ζ:1) Πού ακριβώς είναι χρήσιμο το αποτέλεσμα της παρούσας ασκήσεως για την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ και (η:1) πώς ακριβώς προκύπτει η χρησιμότητά του αυτή; (με χρήση κατάλληλου σχήματος και σχετικές επεξηγήσεις).

A4.2. Δοκοί με συγκεντρωμένα φορτία και ροπές, συναρτήσεις Macaulay

ΑΣΚΗΣΗ A30 (Κεφάλαια A2, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συγκεντρωμένα Φορτία, Συναρτήσεις Macaulay): Θεωρούμε μια συνήθη αμφίπακτη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI . Ζητούνται: (α:1) Να αναφερθεί η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με φόρτιση $p(x)$ απλά ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο στη θέση $x = \xi$ (με $0 \leq \xi \leq L$) με γραφή της τόσο με τη χρήση κλασικής γενικευμένης συναρτήσεως όσο και σχετικής συναρτήσεως Macaulay. (β:2) Υποθέτοντας τώρα ότι $v''(0) = A$ και $v'''(0) = B$ και με τη χρήση συναρτήσεων Macaulay η λύση $v(x)$ της προηγούμενης διαφορικής εξισώσεως που να πληροί και τις συνοριακές συνθήκες στο αριστερό άκρο $x = 0$ της αμφίπακτης δοκού. (γ:2) Με μαθηματικό τρόπο το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των σταθερών A και B στην παρούσα αμφίπακτη δοκό. (δ:1) Θα μπορούσαν να βρεθούν οι ίδιες σταθερές με καθαρά στατικό τρόπο ή όχι και γιατί; (ε:2) Με τη λύση $v(x)$ που ήδη βρέθηκε να δηλώνεται τώρα σαν $G(x, \xi)$, επειδή εξαρτάται και από τη θέση ξ του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου, η πρακτική (όχι μαθηματική) αλλά δικαιολογημένη εύρεση του τύπου που ισχύει για αυθαίρετη φόρτιση $p(x)$ της δοκού. Σημειώνεται ότι η συνάρτηση $G(x, \xi)$ (που δεν έχει καμία σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$) καλείται συνήθως συνάρτηση Green και πληροί τόσο τη διαφορική εξίσωση όσο και τις συνοριακές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ A31 (Κεφάλαια A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συγκεντρωμένα Φορτία, Συναρτήσεις Macaulay): Θεωρούμε συνήθη πρόβολο μήκους $L = 2a$ (με $0 \leq x \leq 2a$) και δυσκαμψίας EI με την πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$. Ο πρόβολος καταπονείται από ομοιόμορφη (σταθερή) κατανεμημένη φόρτιση p_0 σε όλο το μήκος του και επίσης από συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον του $x = a$. Ζητούνται: (α:2) Απλά η παράσταση της συνολικής φορτίσεως του $p(x)$ με τη χρήση *συναρτήσεως* ή *συναρτήσεων Macaulay* (ή *συναρτήσεων ιδιομορφίας*). (β:2) Από τη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως για το βέλος κάμψεως $v(x)$ του προβόλου και με γνωστές την αντίδραση Q_0 και τη ροπή πακτώσεως M_0 στην πάκτωση $x = 0$ ζητείται ο μετασχηματισμός Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ και από αυτόν (γ:3) το βέλος κάμψεως $v(x)$ του προβόλου. (δ:1) Τέλος απλά από τη φόρτιση του προβόλου να υπολογισθούν οι δύο ποσότητες Q_0 και M_0 στην πάκτωση $x = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ A32 (Κεφάλαια A2, A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συγκεντρωμένα Φορτία, Συναρτήσεις Macaulay): Θεωρούμε το πρόβλημα του προβόλου στην Τεχνική Θεωρία Κάμψεως συνήθων δοκών στη Μηχανική των Υλικών, πιο συγκεκριμένα πρόβολο μήκους $L = 2a$ και σταθερής δυσκαμψίας EI (με $EI > 0$) κατά μήκος του άξονα Ox (με $0 \leq x \leq 2a$) πακτωμένο στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και με ελεύθερο το δεξιό άκρο του $x = 2a$. Το ίδιο βάρος του προβόλου αμελείται. Μοναδική φόρτιση πάνω στον πρόβολο αποτελεί ένα κάθετο συγκεντρωμένο φορτίο (μια δύναμη) P στο μέσον του $x = a$. Υπό την επίδραση του συγκεντρωμένου αυτού φορτίου P ο πρόβολος κάμπτεται. (Έχει δυσκαμψία EI , όχι ακαμψία, όπως μάλλον εσφαλμένα γράφεται αρκετά συχνά σε βιβλία ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτό συμβαίνει, επειδή, αν ο πρόβολος ήταν άκαμπτος, δε θα εκάμπτετο: είναι απλά δύσκαμπτος.) Εξαιτίας του βέλους κάμψεως $v = v(x)$ προκαλείται από την κάμψη (με $0 \leq x \leq 2a$) δημιουργείται η καλούμενη ελαστική γραμμή του προβόλου μετά την καμπτική παραμόρφωσή του. Πρόκειται για ένα ιδιαίτερα στοιχειώδες πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού στην Τεχνική Θεωρία Κάμψεως δοκών υπό τις απλοποιητικές παραδοχές της θεωρίας των Bernoulli-Euler που χρησιμοποιούνται συνήθως.

Πολύ δυσκολότερα και πρακτικά χρησιμότερα προβλήματα ελαστικής γραμμής $v = v(x)$ δοκών ασφαλώς αποτελούν ενδιαφέροντα και πρακτικά χρήσιμα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Τέτοια προβλήματα μπορεί να αφορούν σε πολύπλοκη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$, πολλά συγκεντρωμένα φορτία P_m και πολλές ροπές M_n σε διάφορα σημεία κατά μήκος του προβόλου. Συνήθως όμως απαιτούν και τη χρήση του υπολογιστή για την επίλυσή τους εξαιτίας του μεγάλου όγκου των απαιτούμενων υπολογισμών και μάλλον δεν είναι κατάλληλα σε μια απλή άσκηση.

Στην παρούσα άσκηση ζητούνται:

(α:2) Με πολλές λεπτομέρειες να εξηγηθεί πώς το πιο πάνω τεχνικό πρόβλημα της κάμψευς του προβόλου παριστάνεται μαθηματικά μέσω προβλήματος αρχικών τιμών από μίας διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως συγκεκριμένα την εξίσωση

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = P \delta(x - a) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq 2a$$

(με $\delta(x)$ την ωστική συνάρτηση δέλτα του Dirac, αν και ο όρος ωστική είναι μάλλον άστοχος εδώ) και τις εξής τέσσερις αρχικές συνθήκες:

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2 v}{dx^2}(0) = \frac{Pa}{EI}, \quad \frac{d^3 v}{dx^3}(0) = -\frac{P}{EI}.$$

Δίνουμε έμφαση στις δύο τελευταίες από τις αρχικές αυτές συνθήκες, οι οποίες χρειάζονται ασφαλώς κάποια επεξήγηση.

Ας σημειωθεί επίσης ότι η συνάρτηση $\delta(x - a)$ στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση συμπίπτει (σύμφωνα με την καθιερωμένη ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού) με την συνάρτηση Macaulay (ή συνάρτηση ιδιομορφίας) τάξεως $n = -1$, δηλαδή

$$\delta(x - a) \equiv \langle x - a \rangle^{-1}.$$

Οι συναρτήσεις Macaulay (που συχνά καλούνται και συναρτήσεις ιδιομορφίας) αποδεικνύονται ιδιαίτερα εύχρηστες για τον Πολιτικό Μηχανικό στο έργο του του συμβολισμού ποικίλων φορτίων πάνω σε δοκούς, πλάκες, κλπ. στη Μηχανική των Υλικών και στην Ανάλυση Κατασκευών γενικότερα. Εδώ όμως ο ισοδύναμος συμβολισμός $\delta(x - a)$ για μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο αρκεί.

(β:2) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace να εφαρμόζεται ακριβώς πάνω στην παραπάνω διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, δηλαδή χωρίς ολοκλήρωσή της, να βρεθεί η λύση $v = v(x)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών με μαθηματικά ενιαία έκφραση της λύσεως αυτής $v = v(x)$ σε όλο το μήκος του προβόλου: $0 \leq x \leq 2a$.

(γ:1) Να γραφεί αναλυτικότερα η ίδια λύση $v = v(x)$, τώρα όμως με διάκριση περιοχών (i) στο αριστερό ήμισυ του προβόλου ($0 \leq x \leq a$) και (ii) στο δεξιό ήμισυ του προβόλου ($a \leq x \leq 2a$) χωρίς πια τη χρήση της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside. Τι παρατηρείται στο δεξιό ήμισυ του προβόλου; Φυσικά μιλώντας, γιατί παρουσιάζεται το φαινόμενο αυτό;

(δ:1) Προς αποφυγή υπολογιστικών σφαλμάτων (κανένας δε μπορεί να τα αποκλείσει, ιδίως σε υπολογισμούς με το χέρι!) να γίνει και πλήρης επαλήθευση της λύσεως $v(x)$ που βρέθηκε τόσο ως προς τη διαφορική εξίσωση όσο και ως προς τις αρχικές συνθήκες.

(ε:2) Ποιες είναι οι συνοριακές συνθήκες στο δεξιό άκρο του προβόλου; Πληρούνται και αυτές; Εάν ναι, απλά κατά τύχη ή όχι; Γιατί προτιμήθηκε παραπάνω η μαθηματική μοντελοποίηση του παρόντος προβλήματος του προβόλου σαν πρόβλημα αρχικών τιμών αντί σαν πρόβλημα συνοριακών τιμών; Ποια ακριβώς θα ήταν η δεύτερη, εναλλακτική αυτή δυνατότητα μοντελοποίησης, δηλαδή σαν πρόβλημα συνοριακών τιμών; Ποια από τις δύο αυτές δυνατότητες χρησιμοποιεί συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός; Γιατί;

(στ:2) Τέλος να υπολογισθούν το βέλος κάμψευς $v = v(x)$ καθώς και η γωνία κλίσεως ή γωνία στροφής ή απλά στροφή $\theta = \theta(x)$, που προσεγγίζεται από την κλίση $v'(x)$, στο μέσον $x = a$ καθώς και στο δεξιό άκρο $x = 2a$ του προβόλου. Υπάρχει ή όχι ασυνέχεια της γωνίας κλίσεως $\theta(x)$ στο σημείο $x = a$; Πού παρουσιάζονται το μέγιστο βέλος κάμψευς v_{\max} καθώς και η μέγιστη γωνία κλίσεως θ_{\max} και ποιες είναι οι τιμές τους; Αρκετές φορές οι μέγιστες αυτές τιμές αποτελούν σημαντικά και πολύ χρήσιμα αποτελέσματα της μαθηματικής λύσεως για τον Πολιτικό Μηχανικό.

ΑΣΚΗΣΗ A33 (Κεφάλαια A2, A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συγκεντρωμένα Φορτία, Συναρτήσεις Macaulay): Θεωρούμε συνήθη πρόβολο μήκους $2L$ και δυσκαμψίας EI πακτωμένο στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και επομένως ελεύθερο στο δεξιό άκρο του $x = 2L$ με μόνη εξωτερική φόρτιση μια συγκεντρωμένη δύναμη P στο μέσον του $x = L$. Για το άγνωστο βέλος κάμψευς $v = v(x)$

του προβόλου που σχηματίζει την ελαστική γραμμή του, ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση, μία μόνο και τετάρτης τάξεως, και (β:1) οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (δηλαδή το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών) υπό τη φόρτιση P που προαναφέρθηκε. (γ:2) Ο μετασχηματισμός Laplace $V(s)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ με τις παραγώγους της $v''(0)$ και $v'''(0)$ (που δεν είναι άμεσα διαθέσιμες) να παραμένουν s' αυτόν. (δ:2) Συνεχίζοντας, με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $V(s)$ η εύρεση της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως) $v(x)$ πάλι σαν συνάρτηση των ποσοτήτων $v''(0)$ και $v'''(0)$. (ε:2) Τέλος το ξαναγράψιμο του προηγούμενου αποτελέσματος $v(x)$, τώρα όμως με διάκριση δύο περιπτώσεων: (i) $0 \leq x \leq L$ και (ii) $L \leq x \leq 2L$.

ΑΣΚΗΣΗ A34 (Κεφάλαια A2, A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συγκεντρωμένα Φορτία, Συναρτήσεις Macaulay): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Ο προσδιορισμός των μέχρι στιγμής άγνωστων παραγώγων $v''(0)$ και $v'''(0)$ από τη λύση $v(x)$ που προέκυψε υποχρεωτικά μέσω των συνοριακών συνθηκών στο ελεύθερο άκρο $x = 2L$ του προβόλου και (β:1) η επαλήθευση των τιμών αυτών με στατικό τρόπο. (γ:2) Τώρα πια η γραφή του άγνωστου βέλους κάμψεως $v(x)$ στην τελική μορφή του με ενιαίο τρόπο σε όλο το μήκος του προβόλου καθώς και (δ:2) με διάκριση δύο περιπτώσεων: (i) $0 \leq x \leq L$ και (ii) $L \leq x \leq 2L$ στις απλούστερες μάλιστα δυνατές μορφές της. (ε:1) Η επαλήθευση της ισχύος και των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών από το βέλος κάμψεως $v(x)$ που βρέθηκε. (στ:1) Οι συγκεκριμένες τιμές του βέλους κάμψεως $v(x)$ για $x = 0$, $x = L$ και $x = 2L$ καθώς και η πρόχειρη γραφική παράστασή του.

ΑΣΚΗΣΗ A35 (Κεφάλαια A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συγκεντρωμένα Φορτία και Ροπές, Συναρτήσεις Macaulay): Θεωρούμε ένα συνήθη πρόβολο μήκους $L = 5a$ (με $0 \leq x \leq 5a$) και δυσκαμψίας EI με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$. Η φόρτιση $p(x)$ του προβόλου συνίσταται: (i) Σε ομοιόμορφο (σταθερό) κατανεμημένο φορτίο p_0 στο διάστημα $[a, 2a]$, (ii) σε συγκεντρωμένο φορτίο P στη θέση $x = 3a$ και (iii) σε καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) M_b στη θέση $x = 4a$. Στην πάκτωση $x = 0$ του προβόλου η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) M_0 και η τέμνουσα δύναμη Q_0 θεωρούνται προς το παρόν δύο γνωστές ποσότητες. Ζητούνται: (α:1) Η παράσταση της συνολικής σχετικής φορτίσεως $p(x)$ (σαν να ήτανε όλη κατανεμημένη φόρτιση) με τη χρήση συναρτήσεων Macaulay. Με τη χρήση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως ως προς το βέλος κάμψεως $v(x)$ του προβόλου, της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και της συνεχούς χρήσεως συναρτήσεων Macaulay (ακόμη και για το ίδιο το άκρο $x = 0!$): (β:1) ο μετασχηματισμός Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$, (γ:1) με αντιστροφή του το ίδιο το βέλος κάμψεως $v(x)$, (δ:1) η γωνία κλίσεως (ή γωνία στροφής ή απλά στροφή) $\theta(x)$, (ε:1) η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$ και (στ:1) η τέμνουσα δύναμη $Q(x)$. Τέλος ζητούνται οι τιμές της καμπτικής ροπής M_0 και της τέμνουσας δύναμης Q_0 στην πάκτωση $x = 0$ (ζ:1) με τη χρήση των εξισώσεων ισορροπίας και (η:1) με τη χρήση της πιο πάνω λύσεως $v(x)$ και των συνοριακών συνθηκών για $x = L$.

ΑΣΚΗΣΗ A36 (Κεφάλαια A2, A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συγκεντρωμένα Φορτία και Ροπές, Συναρτήσεις Macaulay): Σε μια συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI είναι γνωστές και οι τέσσερις αρχικές συνθήκες: v_0 (βέλος κάμψεως), θ_0 (στροφή), M_0 (καμπτική ροπή) και Q_0 (τέμνουσα δύναμη) στο αριστερό άκρο της $x = 0$. Η φόρτιση $p(x)$ της δοκού αποτελείται από (i) μια ομοιόμορφα κατανεμημένη (σταθερή) φόρτιση p_0 στο διάστημα $[a_1, a_2]$ με $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$, (ii) μια συγκεντρωμένη δύναμη P_1 στη θέση b με $0 < b < L$ και (iii) μια ροπή M_1 στη θέση c με $0 < c < L$. Με τη χρήση συναρτήσεων Macaulay (ή συναρτήσεων ιδιομορφίας), όπου βέβαια χρειάζονται αυτές, ζητούνται: (α:1) Η έκφραση της φορτίσεως $p(x)$ και (β:1) του μετασχηματισμού Laplace της $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$. (γ:1) Από τη σχετική διαφορική εξίσωση ο μετασχηματισμός Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ της δοκού και με αντιστροφή του κατά Laplace (δ:1) το ίδιο το βέλος κάμψεως $v(x)$. Έπειτα παραγωγίζοντας (ε:1) η στροφή (ή γωνία κλίσεως) $\theta(x)$, (στ:1) η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$, (ζ:1) η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(x)$ και στο τέλος (απλά για τη μερική επαλήθευση της λύσεως $v(x)$) (η:1) η φόρτιση $p(x)$, που πρέπει βέβαια να συμπίπτει με την αρχική έκφρασή της.

A4.3. Δοκοί επί ελαστικής βάσεως, υπόθεση του Winkler**ΑΣΚΗΣΗ A37 (Κεφάλαια A1, A2, A5, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως):**

Θεωρούμε δοκό επί ελαστικού εδάφους (π.χ. μια πεδילוδοκό ή σιδηροτροχιά πάνω στο έδαφος). Η δοκός αυτή έχει σταθερή δυσκαμψία EI και η συνολική σταθερά εδάφους-δοκού είναι k . Εδώ ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση με κατανεμημένη κάθετη φόρτιση της δοκού $p(x)$ και οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (β:2) Με τη χρήση τώρα της βοηθητικής σταθεράς β με $\beta^4 = k/(4EI)$ η εύρεση της γενικής λύσεως $v_g(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (με $p(x) = 0$) σε καθαρά εκθετική μορφή. Υπόδειξη: Δίνεται ο προφανής αλγεβρικός τύπος:

$$\mu^4 + 4\beta^4 = (\mu^2 + 2\beta^2)^2 - (2\mu\beta)^2.$$

(γ:1) Η μετατροπή της προηγούμενης γενικής λύσεως $v_g(x)$ σε καθαρά πραγματική μορφή (χωρίς τη φανταστική μονάδα i). (δ:1) Η παραπέρα μετατροπή της σε καθαρά υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή (χωρίς καθόλου την παρουσία της εκθετικής συναρτήσεως!). (ε:2) Με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας η απόδειξη ότι οι δύο συναρτήσεις

$$v_1(x) = \cosh \beta x \cos \beta x \quad \text{και} \quad v_2(x) = \sinh \beta x \cos \beta x$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (στ:1) Αντίστροφα τώρα, υποθέτοντας τις δύο αυτές συναρτήσεις $v_1(x)$ και $v_2(x)$ γραμμικά ανεξάρτητες (όπως και πραγματικά είναι!), να εξηγηθεί εάν ή όχι πρέπει οπωσδήποτε από θεωρητικής απόψεως η πιο πάνω ορίζουσα να είναι μη μηδενική.

ΑΣΚΗΣΗ A38 (Κεφάλαια A1, A2, A5, Μηχανική των Υλικών, Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως):

Θεωρούμε συνήθη δοκό δυσκαμψίας EI επί ελαστικής βάσεως (έστω μια πεδילוδοκό η οποία στηρίζεται πάνω στο έδαφος σε θεμελίωση κατασκευής ή μια σιδηροτροχιά στη Σιδηροδρομική) σύμφωνα με την κλασική υπόθεση του Winkler (1867). Η σχετική διαφορική εξίσωση για το βέλος κάμψεως της δοκού $v = v(x)$ παίρνει τελικά τη μορφή

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\beta^4 v = \frac{p(x)}{EI}$$

με $p(x)$ την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση κατά μήκος της δοκού, όπου το β είναι γνωστή θετική σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες και της ελαστικής βάσεως και της δοκού. Ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης. (β:3) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (με $p(x) = 0$) σε μιγαδική εκθετική μορφή. Θεωρείται γνωστός ο απλός τύπος

$$\sqrt[4]{-1} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

(γ:4) Η μετατροπή της γενικής αυτής λύσεως σε καθαρά πραγματική μορφή (με νέους συντελεστές τώρα!) με την ταυτόχρονη χρήση της εκθετικής συναρτήσεως και τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ A39 (Κεφάλαια A2, A5, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως):

Εδώ θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις

$$v_1(x) = \cosh \beta x \cos \beta x \quad \text{και} \quad v_2(x) = \cosh \beta x \sin \beta x$$

με το β γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Να διερευνηθεί (μέσω της σχετικής ορίζουσας Wronski) εάν ή όχι οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (β:3) Να βρεθεί η χαμηλότερης δυνατής τάξεως γραμμική διαφορική εξίσωση (με παράμετρο το β) με σταθερούς συντελεστές που να έχει (μεταξύ και άλλων) σαν μερικές λύσεις και τις παραπάνω δύο συναρτήσεις $v_1(x)$ και $v_2(x)$. (γ:2) Ποια είναι η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση $p(\mu) = 0$ και ποια είναι η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης μάλλον χωρίς την αλγεβρική εύρεση των ριζών μ_k της χαρακτηριστικής εξίσωσης; (Αυτές μπορούν να θεωρηθούν λίγο-πολύ γνωστές ειδικά με τη διατύπωση της παρούσας ασκήσεως.) (δ:1) Σε ποιο ακριβώς φυσικό πρόβλημα αντιστοιχεί

η πιο πάνω διαφορική εξίσωση και πού ακριβώς παρουσιάζεται αυτό στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού; Γιατί θεωρείται ενδιαφέρον πρόβλημα, π.χ. στις Επιφανειακές Θεμελιώσεις ή στη Σιδηροδρομική; (ε:2) Πώς ακριβώς προκύπτει με φυσικό τρόπο στη Μηχανική των Υλικών η πιο πάνω διαφορική εξίσωση; Ποια είναι η υπόθεση του Winkler και πού πάσχει αυτή; Επιπλέον πού έχει γίνει γραμμικοποίηση, ώστε να προκύπτουν οι ομολογουμένως μάλλον απλές συναρτήσεις $v_1(x)$ και $v_2(x)$; (στ:1) Πώς μπορεί να υπολογισθεί με φυσικό τρόπο, δηλαδή στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού, η θετική σταθερά β που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση που ήδη βρέθηκε και στις λύσεις της και η οποία θεωρήθηκε πιο πάνω γνωστή;

ΑΣΚΗΣΗ A40 (Κεφάλαια A5, Μηχανική των Υλικών, Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Εδώ θεωρούμε το πρόβλημα της δοκού επί ελαστικής βάσεως (π.χ. μια πεδילוδοκό ή σιδηροτροχιά που στηρίζεται πάνω στο έδαφος) με δυσκαμψία EI και υπό κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$. Με τη γνωστή υπόθεση του Winkler (1867) προκύπτει η εξής συνήθης διαφορική εξίσωση για το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού:

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} + 4\beta^4v(x) = \frac{p(x)}{EI}$$

με το β γνωστή συνολική θετική σταθερά. Η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση έχει τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$ και $v_4(x)$, δηλαδή ένα θεμελιώδες σύστημα ή σύνολο λύσεων, που θεωρούνται εδώ γνωστές. Με βάση τις λύσεις αυτές εδώ ζητείται η χρήση της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων στη συνηθισμένη μορφή της για την πιο πάνω μη ομογενή διαφορική εξίσωση και συγκεκριμένα: (α:1) η μορφή της λύσεως που υποτίθεται, (β:1) η πρώτη γραμμική αλγεβρική εξίσωση ως προς τις παραγώγους των άγνωστων παραμέτρων, (γ:1) η δεύτερη εξίσωση, (δ:1) η τρίτη εξίσωση και (ε:2) η τέταρτη εξίσωση. Στη συνέχεια ζητούνται επίσης: (στ:1) να γραφεί η σχετική οριζούσα τετάρτης τάξεως και (ζ:1) απλά (χωρίς τον υπολογισμό της) να εξηγηθεί για ποιο λόγο αυτή είναι εδώ διάφορη του μηδενός.

ΑΣΚΗΣΗ A41 (Κεφάλαιο A14, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$v''''(x) + 4\beta^4v(x) = 0 \quad \text{με το } \beta \text{ γνωστή θετική σταθερά}$$

στο πρόβλημα της δοκού επί ελαστικής βάσεως με φόρτιση μόνο από καμπτικές ροπές στα άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Ζητούνται: (α:4) Με τη μέθοδο των δυναμοσειρών γύρω από το άκρο της $x = 0$ και υποχρεωτικά με τη συνεχή χρήση του συμβόλου της αθροίσεως \sum (κανένας άλλος τρόπος!) η εύρεση του γενικού αναδρομικού τύπου για τους συντελεστές a_n της δυναμοσειράς για τη γενική λύση $v(x)$. (β:2) Από το γενικό αυτό τύπο οι συντελεστές a_4 , a_5 , a_6 και a_7 σε όσο βαθμό είναι εφικτό. (γ:1) Πόσοι και ποιοι από τους συντελεστές a_n παραμένουν τελικά απροσδιόριστοι; (δ:1) Πώς σχετίζονται αυτοί με τις αρχικές συνθήκες $v(0)$, $\theta(0)$, $M(0)$ και $Q(0)$ στο ίδιο άκρο $x = 0$;

ΑΣΚΗΣΗ A42 (Κεφάλαιο A14, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Εδώ θεωρούμε την κλασική διαφορική εξίσωση της δοκού επί ελαστικής βάσεως (π.χ. πεδילוδοκού ή σιδηροτροχιάς πάνω στο έδαφος) της μορφής (χωρίς κατανεμημένη φόρτιση)

$$\frac{d^4v}{dx^4} + Cv = 0$$

σύμφωνα με την υπόθεση του Winkler με $v = v(x)$ το σχετικό βέλος κάμψεως (τη βύθιση) και το C γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Ποια ακριβώς είναι η βασική υπόθεση του Winkler; Ποια επιπλέον υπόθεση έχει γίνει έμμεσα; (β:5) Η επίλυση της με τη συνηθισμένη μέθοδο των δυναμοσειρών (με βάση το αριστερό άκρο της δοκού $x = 0$) και με τους τέσσερις πρώτους συντελεστές a_k (με $k = 0, 1, 2, 3$) γνωστές σταθερές που υπολογίζονται από τα υποτιθέμενα γνωστά βέλος κάμψεως v_0 , στροφή (κλίση) θ_0 , καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) M_0 και τέμνουσα δύναμη Q_0 στο ίδιο άκρο $x = 0$ της δοκού. Ο σχετικός αναδρομικός τύπος για τον προσδιορισμό της σταθεράς a_k (με $k \geq 4$) αρκεί. (γ:1) Γιατί απαιτούνται (από μαθηματικής απόψεως) και οι τέσσερις αρχικές συνθήκες που δόθηκαν; (δ:1) Τι ισχύει συνήθως στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού;

A4.4. Στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός

ΑΣΚΗΣΗ A43 (Κεφάλαια A1, A9, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Εδώ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(x) = A + Bx + C \cos kx + D \sin kx$$

με το k γνωστή παράμετρο και τα A, B, C και D τέσσερις αυθαίρετες σταθερές. Η συνάρτηση αυτή παριστάνει το βέλος κάμψεως $v(x)$ ράβδου (ή στύλου ή υποστυλώματος ή κολώνας σε κατασκευή) υπό συνθήκες αξονικής φορτίσεως P που έχουν προκαλέσει το ανεπιθύμητο για τον Πολιτικό Μηχανικό φαινόμενο του λυγισμού. Ζητούνται: (α:2) Ο σχηματισμός της σχετικής διαφορικής εξίσωσης (με απαλοιφή των τεσσάρων σταθερών A, B, C και D , όχι όμως και της παραμέτρου k) χωρίς τη χρήση οριζουσας. (β:4) Το ίδιο ερώτημα τώρα με τη χρήση κατάλληλης οριζουσας πέμπτης τάξεως. (γ:2) Με τη χρήση άλλης κατάλληλης οριζουσας η απόδειξη ότι οι τέσσερις συναρτήσεις

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = \cos kx \quad \text{και} \quad v_4(x) = \sin kx$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (Καλό είναι να χρησιμοποιούνται απλές ιδιότητες των οριζουσών!)

ΑΣΚΗΣΗ A44 (Κεφάλαιο A9, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια, Λυγισμός): Στο πρόβλημα του λυγισμού συνήθους στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος ή κολώνας) ελάχιστης δυσκαμψίας EI και υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο P προκύπτει τελικά η γενική διαφορική εξίσωση

$$v''''(x) + k^2 v''(x) = 0 \quad \text{με τη σταθερά} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

με x τη θέση και με $v(x)$ την κάθετη μετατόπιση των σημείων του στύλου. Ζητούνται: (α:3) Η γενική λύση της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως. (β:5) Ο έλεγχος της γραμμικής ανεξαρτησίας των συναρτήσεων που παρουσιάζονται σ' αυτήν με τον υπολογισμό οριζουσας.

ΑΣΚΗΣΗ A45 (Κεφάλαιο A9, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ ζητούνται: (α:5) Ειδικά για αμφιαρθρωτό στύλο (με αρθρώσεις και στα δύο άκρα του $x = 0$ και $x = L$) η εύρεση του σχετικού κρίσιμου φορτίου λυγισμού P_{cr} . (β:1) Ο έλεγχος του τύπου ο οποίος βρέθηκε μόνο από απόψεως μονάδων. (γ:2) Θεωρούμε τώρα στύλο δεδομένου μήκους $L = L_0$, τετραγωνικής διατομής πλευράς a με γνωστή ροπή αδρανείας $I = a^4/12$, από γνωστό γραμμικά ελαστικό υλικό μέτρου ελαστικότητας $E = E_0$ και με καταπόνηση από θλιπτικό φορτίο P που δεν ξεπερνάει την τιμή P_0 , δηλαδή $0 < P \leq P_0$. Υπ' αυτές τις συνθήκες ποια ακριβώς ανισότητα πρέπει να επαληθεύεται από την πλευρά a της τετραγωνικής διατομής του στύλου, έτσι ώστε να μη μπορεί να παρουσιασθεί σ' αυτόν το φαινόμενο του λυγισμού;

ΑΣΚΗΣΗ A46 (Κεφάλαια A9, A10, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Στο πρόβλημα του λυγισμού συνήθους στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος) ελάχιστης δυσκαμψίας EI και υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο P προκύπτει τελικά η γενική διαφορική εξίσωση

$$v''''(x) + k^2 v''(x) = 0 \quad \text{με τη σταθερά} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

με x τη θέση και με $v(x)$ την κάθετη μετατόπιση των σημείων του στύλου. Ζητούνται: (α:1) Ειδικά για άρθρωση στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου (όμως με μη καθορισμένη τη στήριξη στο πάνω άκρο του $x = L$) ο μετασχηματισμός Laplace $V(s)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ με παρούσες σ' αυτόν τις δύο μη καθορισμένες αρχικές συνθήκες για $x = 0$ που υπολείπονται. (β:3) Με χρήση του αλγεβρικού τύπου

$$\frac{1}{s^2(s^2 + k^2)} = \frac{1}{k^2 s^2} - \frac{1}{k^2(s^2 + k^2)}$$

η λύση $v(x)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης. (Επαναλαμβάνεται ότι έχει υποθεθεί άρθρωση στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου.) (γ:1) Πόσες σταθερές περιλαμβάνει και γιατί; (δ:1) Η επαλήθευση της διαφορικής εξίσωσης από τη λύση αυτή. (ε:1) Η επαλήθευση των συνθηκών αρθρώσεως στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου. (στ:1) Απλά η λεπτομερής καταγραφή όλων των από

φυσικής απόψεως αποδεκτών συνηθισμένων συνοριακών συνθηκών στο πάνω άκρο $x = L$ του στύλου (δύο περιπτώσεις!).

ΑΣΚΗΣΗ A47 (Κεφάλαια A5, A9, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:2) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως η γενική λύση $v_g(x)$ της σχετικής διαφορικής εξισώσεως. (β:2) Ειδικά για αμφιαρθρωτό στύλο μήκους L (άρθρωση-κύλιση στα δύο άκρα του $x = 0$ και $x = L$) η οριζουσα τετάρτης τάξεως D_t για τις σχετικές ιδιοτιμές k_n του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών. (γ:2) Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών k_n . (δ:2) Τέλος ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού P_{cr} .

ΑΣΚΗΣΗ A48 (Κεφάλαιο A14, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται επίσης: (α:6) Με τη μέθοδο των δυναμοσειρών γύρω στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου και υποχρεωτικά με τη χρήση του συμβόλου της αθροίσεως \sum η γενική λύση $v_g(x)$ της σχετικής διαφορικής εξισώσεως (χωρίς αρχικές ή συνοριακές συνθήκες) με πλήρη εύρεση του αναδρομικού τύπου που δίνει τους συντελεστές a_n της δυναμοσειράς. (β:2) Πόσοι συντελεστές έχουν παραμείνει τελικά απροσδιόριστοι (αυθαίρετοι), ώστε να προσδιορισθούν από τις συνθήκες του προβλήματος; (Να δοθούν και λεπτομερείς επεξηγήσεις.)

ΑΣΚΗΣΗ A49 (Κεφάλαια A2, A9, A10, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα του λυγισμού αμφιαρθρωτού στύλου (ή υποστυλώματος ή απλά ράβδου) ύψους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI για το λυγισμό. Στον αμφιαρθρωτό αυτό στύλο εφαρμόζεται θλιπτικό αξονικό φορτίο P (με $P > 0$). Στο πρόβλημα αυτό λυγισμού ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$v''(x) + k^2 v(x) = 0 \quad \text{με τη σταθερά} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

για το βέλος κάμψεως (την κάθετη μετατόπιση των σημείων) του στύλου. Ζητούνται: (α:1) Με βάση σχετικό σχήμα να αποδειχθεί η ισχύς της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (Η σχετική εξίσωση για την κάμψη συνήθους δοκού θεωρείται γνωστή!) (β:1) Με αυθαίρετες αρχικές συνθήκες $v(0) = v_0$ και $v'(0) = \theta_0$ στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου και υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace $V_g(s)$ της γενικής λύσεως $v_g(x)$ της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως και στη συνέχεια (γ:1) και η ίδια η γενική αυτή λύση $v_g(x)$. (δ:1) Με τη βοήθεια μόνο των δύο γεωμετρικών (κινηματικών) συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα του στύλου $x = 0$ και $x = L$ να προσδιορισθεί η λύση $v_p(x)$ του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών σε περίπτωση λυγισμού του στύλου. (ε:1) Να γίνει η πλήρης επαλήθευση της λύσεως αυτής $v_p(x)$. (στ:1) Να προσδιορισθούν τα φορτία λυγισμού P_n ($n = 1, 2, \dots$) του αμφιαρθρωτού στύλου και ειδικότερα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού $P_1 = P_{cr}$; (ζ:1) Ποια είναι τα αντίστοιχα σχήματα $v_n(x)$ του στύλου που λύγισε, τα οποία καλούνται και κανονικές μορφές λυγισμού (ή ιδιομορφές λυγισμού); (η:1) Να σχεδιασθούν πρόχειρα (σε χωριστά σχήματα, αλλά το ένα δίπλα στο άλλο) οι τρεις πρώτες κανονικές μορφές λυγισμού (ή ιδιομορφές λυγισμού).

ΑΣΚΗΣΗ A50 (Κεφάλαια A2, A9, A10, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Σε μια κατασκευή θεωρούμε αμφιαρθρωτό στύλο (ή ράβδο ή υποστυλώμα ή κολώνα) μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) τετραγωνικής διατομής πλευράς a και τελικά δυσκαμψίας EI . Η φόρτιση του στύλου P είναι αξονική και θλιπτική. Για την εγκάρσια (την κάθετη στο στύλο) μετατόπιση $v(x)$ των σημείων x του στύλου μετά από λυγισμό του προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + k^2 v(x) = 0$$

με το k κατάλληλη θετική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της διαφορικής αυτής εξισώσεως με βάση την αντίστοιχη εξίσωση για δοκό. (β:1) Η εύρεση των συνοριακών συνθηκών που ισχύουν. (γ:1) Με παράμετρο (αυθαίρετη σταθερά) τη γωνία κλίσεως (τη στροφή) θ_0 στη βάση $x = 0$ του αμφιαρθρωτού στύλου και με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace η εύρεση της

λύσεως $v(x)$ του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών. (δ:1) Η εύρεση των ιδιοτιμών k_n της παραμέτρου k σε περίπτωση λυγισμού και από αυτές (ε:1) η εύρεση των αντίστοιχων φορτίων λυγισμού P_n με έλεγχο μονάδων στο σχετικό τύπο και (στ:1) των σχετικών ιδιομορφών $v_n(x)$ λυγισμού του στύλου. (ζ:1) Ποιο είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} και για ποιο ακριβώς λόγο ο Πολιτικός Μηχανικός περιορίζει συνήθως την προσοχή του μόνο σ' αυτό; (η:1) Τέλος σε μια συγκεκριμένη κατασκευή (π.χ. σε μια μεταλλική κατασκευή) είναι γνωστό το μήκος L ενός στύλου, το μέτρο ελαστικότητας E του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού του και το μέγιστο φορτίο P με το οποίο θα καταπονηθεί. Για τη ροπή αδρανεΐας I της τετραγωνικής διατομής πλευράς a του στύλου ισχύει ο γνωστός τύπος: $I = a^4/12$. Εάν ο Πολιτικός Μηχανικός στη μελέτη του στύλου θέλει να έχει συντελεστή ασφαλείας 50%, δηλαδή να κάνει τον υπολογισμό του με το κατά πολύ μεγαλύτερο μέγιστο φορτίο $P + (P/2) = 3P/2$, πόση πρέπει να είναι η πλευρά a της τετραγωνικής διατομής του στύλου;

ΑΣΚΗΣΗ A51 (Κεφάλαια A5, A9, A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Στη Μηχανική των Υλικών θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα του λυγισμού κατακόρυφης ράβδου (ή στύλου ή υποστυλώματος ιδίως για τον Πολιτικό Μηχανικό στις κατασκευές ή απλά κολώνας) μήκους L και υπό την επίδραση αξονικού (και θλιπτικού φυσικά, ασφαλώς όχι εφελκυστικού σε φαινόμενο λυγισμού) φορτίου P κατά μήκος της ράβδου. Η ράβδος υποτίθεται ότι είναι πακτωμένη στο κάτω άκρο της $x = 0$ και άρθρωμένη στο πάνω άκρο της $x = L$. Η άρθρωση όμως έχει γίνει με τέτοιο τρόπο που να επιτρέπει τη μικρή κατακόρυφη κίνηση της ράβδου, αλλιώς δε μπορεί να υπάρξει λυγισμός. Στην άρθρωση αυτή δημιουργείται αντίδραση R κάθετη προς τον άξονα της ράβδου που δρα επίσης πάνω στη ράβδο στο πάνω άκρο της $x = L$ πέρα από το αξονικό φορτίο P . Με την υπόθεση ότι η ράβδος έχει λυγίσει, έχει δηλαδή ήδη υπάρξει βέλος κάμψεως $v = v(x)$ κατά μήκος της (με $0 \leq x \leq L$) η σχετική καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M = M(x)$ δίνεται από το λίγο-πολύ κατανοητό από την Τεχνική Μηχανική τύπο

$$M(x) = Pv(x) - R(L - x)$$

με το πρώτο γινόμενο $Pv(x)$ να δηλώνει την καμπτική ροπή που οφείλεται στο αξονικό θλιπτικό φορτίο P και το δεύτερο γινόμενο, $R(L - x)$ να δηλώνει την καμπτική ροπή που οφείλεται στο εγκάρσιο φορτίο R . Λαμβάνουμε υπόψη ότι το βέλος κάμψεως $v = v(x)$ της ράβδου που λύγισε πληροί την διαφορική εξίσωση της κάμψεως

$$EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M(x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L$$

με EI την ελάχιστη δυσκαμψία της ράβδου (γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας E του υλικού της επί την ελαχίστη ροπή αδρανεΐας I της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονα στην κάμψη). Έτσι διαπιστώνουμε άμεσα (με χρήση της εκφράσεως της καμπτικής ροπής $M(x)$ που προαναφέρθηκε) την ισχύ στο παρόν πρόβλημα λυγισμού της διαφορικής εξίσωσης

$$EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -Pv(x) + R(L - x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L.$$

Αυτή μάλιστα με την εισαγωγή και των βοηθητικών συμβόλων (σταθερών)

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \text{και} \quad r = \frac{R}{P}$$

μπορεί να γραφεί και στην ακόμη απλούστερη μορφή

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + k^2v(x) = rk^2(L - x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L.$$

Υπό τις παρούσες συνθήκες ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση $v_g(x)$ της διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (που οδηγεί στη χαρακτηριστική εξίσωση) και των προσδιοριστέων συντελεστών (σε πραγματική μορφή φυσικά). (β:1) Με βάση τη

γενική λύση $v_g(x)$ του προηγούμενου ερωτήματος ζητείται και η μερική λύση (ή ειδική λύση) $v_p(x)$ λαμβάνοντας υπόψη και τις δύο συνθήκες πακτώσεως (μηδενικό βέλος κάμψεως και κλίση) στο κάτω άκρο $x = 0$ της παρούσας ράβδου. (γ:2) Ζητείται επίσης και η κατευθείαν εύρεση της μερικής αυτής λύσεως $v_p(x)$ τώρα χωρίς τη χρήση της γενικής λύσεως $v_g(x)$ αλλά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. (δ:1) Ζητείται και η πλήρης επαλήθευση της μερικής αυτής λύσεως. (ε:1) Στη μερική λύση $v_p(x)$ που ήδη βρέθηκε ζητείται τώρα να «προστεθεί» (δεν πρόκειται ασφαλώς για αριθμητική πρόσθεση!) και η συνοριακή συνθήκη $v(L) = 0$ στο πάνω άκρο της ράβδου $x = L$ που λυγίσει. Η συνθήκη αυτή (επίσης γεωμετρικής φύσεως, ακριβώς όπως και οι συνοριακές συνθήκες στο κάτω άκρο της ράβδου $x = 0$) είναι προφανής εξαιτίας της αρθρώσεως στο άκρο αυτό. (στ:3) Υποτίθεται τώρα ότι δεν προκύπτει η τετριμμένη, η μηδενική λύση $v_p(x) \equiv 0$ στο παρόν πρόβλημα συνοριακών συνθηκών κάτι, την τετριμμένη μηδενική λύση, που εύχεται να ισχύει πάντοτε ο κάθε Πολιτικός Μηχανικός στα υποστυλώματα των κατασκευών του. Και το εύχεται σίγουρα, αφού η λύση αυτή υποδηλώνει ότι η ράβδος, το υποστύλωμα άνθεξε το θλιπτικό αξονικό φορτίο P χωρίς να λυγίσει! Τώρα στην ανεπιθύμητη περίπτωση του λυγισμού ζητείται να αποδειχθεί ότι θα πρέπει να ισχύει η στοιχειώδης υπερβατική εξίσωση

$$\tan u = u \quad \text{με} \quad u = kL$$

που δε διαθέτει ασφαλώς κλειστές εκφράσεις των άπειρων ριζών της. Η πρώτη (η μικρότερη) θετική ρίζα της εξίσωσης αυτής είναι (προσεγγιστικά) η ρίζα

$$u_1 \approx 4.4934094579.$$

(στ:2) Με βάση τη ρίζα αυτή u_1 να αποδειχθεί ότι το πρώτο (το μικρότερο) κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} της ράβδου δίνεται από τον προσεγγιστικό τύπο

$$P_{cr} \approx \frac{20.1907285564 EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.6991556596 L)^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7 L)^2}.$$

Αυτή είναι η μορφή του τύπου του Euler για το πρώτο (το μικρότερο) κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} υπό τις παρούσες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου.

Ας σημειωθεί επίσης ότι ο Πολιτικός Μηχανικός ενδιαφέρεται σχεδόν πάντοτε μόνο για το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} στη ράβδο του (συνήθως ένα υποστύλωμα σε κατασκευή που μελετάει ή απλά την έχει υπαρκτή μπροστά του), γιατί, όταν η ράβδος λυγίσει με το πρώτο αυτό κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} , δεν έχει κανένα απολύτως νόημα να μελετηθεί το τι θα γίνει με τα επόμενα (και ασφαλώς μεγαλύτερα) κρίσιμα φορτία λυγισμού $P_{cr,j}$ (με $j \geq 2$). Τονίζεται επίσης ότι η πιο πάνω διαφορική εξίσωση της κάμψεως ράβδου είναι προσεγγιστική λόγω της γραμμικοποιήσεως που έγινε στη διαφορική εξίσωση της κάμψεως ως προς την υπεισερχόμενη καμπυλότητα κ της ράβδου θέτοντας σ' αυτή $v''(x) \approx 0$. Επομένως η ακρίβειά της είναι πολύ χαμηλή για λυγισμό με τα ανώτερα (πέρα από το πρώτο) κρίσιμα φορτία λυγισμού $P_{cr,j}$ (με $j \geq 2$). Η αντίστοιχη μη γραμμική διαφορική εξίσωση, που δεν αφορά βέβαια στην παρούσα άσκηση, οδηγεί σε πολύ ακριβέστερα αποτελέσματα και το ακριβές σχήμα της ράβδου που λυγίζει (όλο και περισσότερο καθώς αυξάνεται το φορτίο P) καλείται **elastica**. Το πρόβλημα της **elastica** μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Euler και μετά από το Lagrange κι είναι κλασικό στη Μηχανική των Υλικών και κάτι που πρέπει ασφαλώς να γνωρίζει από τις σπουδές του ο κάθε Πολιτικός Μηχανικός.

ΑΣΚΗΣΗ A52 (Κεφάλαια A9, A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Η ράβδος υποτίθεται και πάλι πακτωμένη στο κάτω άκρο της $x = 0$ και αρθρωμένη στο πάνω άκρο της $x = L$ και επίσης ότι έχει ήδη λυγίσει. Παραγωγίζοντας δύο φορές την τελική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + k^2 v(x) = rk^2(L - x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L,$$

βρίσκουμε αμέσως την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L.$$

Υπό τις παρούσες συνθήκες ζητούνται: (α:3) Η εν μέρει (όχι πλήρως) μερική λύση $v_h(x)$ της αμέσως πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως που να συμπεριλαμβάνει μάλιστα τις δύο συνοριακές συνθήκες πακτώσεως στο κάτω άκρο $x = 0$ της παρούσας μονόπακτης (μια πάκτωση μόνο) ράβδου, εδώ υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (Απαιτείται και μια εύκολη ανάλυση σε απλά κλάσματα.) Πόσες αυθαίρετες σταθερές περιλαμβάνει η λύση αυτή; (β:1) Η επαλήθευση της ισχύος της λύσεως $v_h(x)$ που βρέθηκε ως προς τη διαφορική εξίσωση και τις δύο συνοριακές συνθήκες στην θέση πακτώσεως $x = 0$ της μονόπακτης ράβδου που εξετάζουμε. (γ:1) Στη λύση $v_h(x)$ που ήδη βρέθηκε ζητείται τώρα να «προσθεθούν» (δεν πρόκειται ασφαλώς για αριθμητική πρόσθεση!) και οι δύο συνοριακές συνθήκες στο πάνω άκρο $x = L$ της ράβδου που λύγισε. Λόγω της αρθρώσεως αυτές αφορούν στο μηδενισμό του βέλους κάμψεως $v(L)$ και της αντίστοιχης καμπτικής ροπής (ή ροπής κάμψεως) $M(L)$. (δ:3) Εφόσον δεν προκύπτει η τετριμμένη, η μηδενική λύση $v_p(x) = 0$, ζητείται να αποδειχθεί ότι σε περίπτωση λυγισμού θα πρέπει να ισχύει η στοιχειώδης υπερβατική εξίσωση

$$\tan u = u \quad \text{με} \quad u = kL.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με το αντίστοιχο αποτέλεσμα της προηγούμενης ασκήσεως, αλλ' εδώ έχει βρεθεί με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο: ομογενής διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως και χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ A53 (Κεφάλαια A5, A19, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Σε συνήθη κυκλικό στύλο (υποστύλωμα, κολώνα ή απλούστερα ράβδο) μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI πακτωμένο στο κάτω άκρο του $x = 0$ και με ελεύθερο το πάνω άκρο του $x = L$ ασκείται στο πάνω, στο ελεύθερο άκρο κατάλληλα υψηλό θλιπτικό φορτίο P που προκαλεί (δυστυχώς!) το λυγισμό του στύλου. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί η σχετική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της μορφής

$$v''(x) + k^2 v(x) = \frac{P\delta}{EI} \quad \text{με} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως $v = v(x)$ (εξαιτίας του λυγισμού) και δ το βέλος κάμψεως στο πάνω άκρο του στύλου: $\delta = v(L)$, που θεωρείται (το δ) γνωστή ποσότητα. Ισχύουν επίσης οι γνωστές δύο συνθήκες πακτώσεως: $v(0) = v'(0) = 0$ στο κάτω άκρο του στύλου $x = 0$, στο πακτωμένο άκρο. Ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης μαζί με τις δύο συνθήκες πακτώσεως (μόνο αυτές!) υποχρεωτικά σε τριγωνομετρική μορφή. (β:1) Η πλήρης επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε (και διαφορική εξίσωση και συνθήκες πακτώσεως!). (γ:1) Από τη λύση $v(x)$ που βρέθηκε ο υπολογισμός της ποσότητας $v(L)$ και η εξίσωσή του με δ : $v(L) = \delta$, όπως ήδη αναφέρθηκε. (δ:3) Τώρα από το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος ο υπολογισμός του (βασικού, του πρώτου) κρίσιμου φορτίου λυγισμού P_{cr} που προκάλεσε το λυγισμό του στύλου που εξετάσαμε και είναι και το μόνο που ενδιαφέρει πρακτικά τον Πολιτικό Μηχανικό. (ε:1) Με διπλασιασμό του μήκους L του στύλου τι ακριβώς θα συμβεί με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του P_{cr} ; Με υποδιπλασιασμό του μήκους L ;

ΑΣΚΗΣΗ A54 (Κεφάλαια A2, A5, A9, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Θεωρούμε εδώ το κλασικό πρόβλημα του λυγισμού στύλου (ή υποστυλώματος ή κολώνας ή απλά ράβδου) κυκλικής διατομής, μήκους L , δυσκαμψίας EI και υπό θλιπτικό φορτίο P . Ζητούνται: (α:1) Θεωρώντας συνήθη δοκό δυσκαμψίας EI και με καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$, κατευθείαν ποια είναι η γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ως προς το βέλος κάμψεως $v(x)$; Από αυτήν ποιες είναι οι αντίστοιχες εξισώσεις τρίτης και τετάρτης τάξεως με τα αντίστοιχα

μεγέθη στα δεξιά μέλη; (β:1) Στο στύλο τώρα που θεωρούμε ότι λύγισε να αποδειχθεί από τα προηγούμενα κι από σχετικό σχήμα ότι ισχύει πάντα η γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$EIv''(x) = M_0 + Rx - Pv(x).$$

Τι δηλώνουν γενικά τα δύο μεγέθη M_0 και R ; Τώρα ειδικά σε ένα στύλο με πάκτωση στο κάτω άκρο του $x = 0$ και με άρθρωση (αυτή με δυνατότητα κατακόρυφης κυλίσεως) στο πάνω άκρο του $x = L$ να αποδειχθεί ότι ισχύει και η γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως

$$v'''(x) + k^2v'(x) = \frac{R}{EI}$$

με κατάλληλο ορισμό της σταθεράς k . (γ:1) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως να βρεθεί η γενική λύση $v_h(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως τρίτης τάξεως σε εκθετική μορφή και στη συνέχεια (δ:1) σε τριγωνομετρική μορφή. (ε:1) Στην τελευταία μορφή να αποδειχθεί με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας η γραμμική ανεξαρτησία των τριών συναρτήσεων που εμφανίζονται σ' αυτή. (στ:1) Να βρεθούν μια μερική λύση $v_p(x)$ της αρχικής μη ομογενούς εξισώσεως και η γενική λύση της $v_g(x)$. (ζ:1) Να επαληθευθεί η λύση αυτή $v_g(x)$. (η:1) Τέλος να βρεθεί η μερική λύση $v_s(x)$ (με μία μόνο αυθαίρετη σταθερά) που να λαμβάνει υπόψη της τις δύο συνοριακές συνθήκες στην πάκτωση στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου.

ΑΣΚΗΣΗ A55 (Κεφάλαια A10, A11, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός):

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Να βρεθούν (όχι επαληθευθούν!) οι αναλύσεις σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{s(s^2 + k^2)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + k^2} \right) \quad \text{και} \quad \frac{1}{s^2(s^2 + k^2)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + k^2} \right)$$

(β:5) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace να λυθεί η μη ομογενής διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως της προηγούμενης ασκήσεως λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη και τις δύο συνθήκες στην πάκτωση στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου. Τέλος να επαληθευθούν από τη λύση $v_s(x)$ που βρέθηκε (γ:1) η διαφορική εξίσωση και (δ:1) οι δύο αυτές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ A56 (Κεφάλαιο A9, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός):

Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται επίσης: (α:3) Με τη χρήση και των συνοριακών συνθηκών στο πάνω άκρο $x = L$ του στύλου (στην άρθρωση-κύλιση) να βρεθεί η χαρακτηριστική εξίσωση για τις ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές) k_n της σταθεράς k . (β:2) Με γνωστή τη μικρότερη θετική ρίζα $z_1 \approx 4.49341$ (με $z_1^2 \approx 20.1907$) της υπερβατικής εξισώσεως

$$\tan z = z$$

να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} του στύλου τον οποίο μελετάμε. (γ:3) Με τη χρήση της αριθμητικής τιμής z_1^2 ποιο είναι επιπλέον το σχήμα (η μορφή, πολύ καλύτερα η ιδιομορφή) $v_b(x)$ που παίρνει ο στύλος που λύγισε; (Φυσικά παρουσιάζεται και μια πολλαπλασιαστική σταθερά στο σχήμα αυτό: μια ποσότητα A , όπως συμβαίνει σε όλα τα προβλήματα ιδιοτιμών.)

ΑΣΚΗΣΗ A57 (Κεφάλαια A5, A9, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός):

Εδώ θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα του λυγισμού κατακόρυφου ενός στύλου (ή υποστυλώματος ή κολώνας ή απλά ράβδου) κυκλικής διατομής, μήκους L , δυσκαμψίας EI και υπό θλιπτικό φορτίο P . Εδώ ο στύλος υποτίθεται πως έχει πάκτωση στο κάτω άκρο του $x = 0$ και άρθρωση (αλλά φυσικά με δυνατότητα κατακόρυφης κινήσεως) στο πάνω άκρο του $x = L$. Για το βέλος κάμψεως $v(x)$ αυτού του στύλου που λύγισε προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{με} \quad k := \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Ζητούνται: (α:1) Με τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης η γενική λύση της $v_g(x)$. (β:1) Η σχετική μερική λύση $v_p(x)$ που επαληθεύει τις δύο συνοριακές συνθήκες στο κάτω άκρο του στύλου $x = 0$. (γ:2) Η χαρακτηριστική εξίσωση για τις ιδιοτιμές k κατά το λυγισμό. (δ:1) Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (με αριθμητικό συντελεστή) με γνωστή τη μικρότερη θετική ρίζα

$$z_1 \approx 4.49341 \approx \sqrt{20.1907}$$

της υπερβατικής εξίσωσης $\tan z = z$. (ε:3) Η πραγματική εύρεση (όχι η επαλήθευση!) του τύπου

$$v_{cr}(x) = A[\sin kx - kx - z_1(\cos kx - 1)]$$

για το πρώτο σχήμα, την πρώτη ιδιομορφή του στύλου που λύγισε με το A μια αυθαίρετη σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ A58 (Κεφάλαια A9, A14, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Θεωρούμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$v''''(x) + k^2 v''(x) = 0 \quad \text{με το } k \text{ γνωστή θετική σταθερά}$$

στο κλασικό πρόβλημα του λυγισμού στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος στις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού ή απλά κολώνας) με $0 \leq x \leq L$. Εδώ ζητούνται: (α:4) Με τη μέθοδο των δυναμοσειρών γύρω από το κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου και υποχρεωτικά με τη συνεχή χρήση του συμβόλου της αθροίσεως \sum η εύρεση του γενικού αναδρομικού (ή επαναληπτικού) τύπου για τους συντελεστές a_n της δυναμοσειράς για τη γενική λύση $v(x)$. (β:1) Από το γενικό αυτό τύπο οι συντελεστές a_4 και a_6 και επίσης οι συντελεστές a_5 και a_7 σε όσο βαθμό αυτό είναι εφικτό. (γ:1) Πόσοι και ποιοι από τους συντελεστές a_n παραμένουν τελικά απροσδιόριστοι; (δ:1) Πώς σχετίζονται αυτοί με τις αρχικές συνθήκες

$$v(0), \quad v'(0), \quad v''(0) \quad \text{και} \quad v'''(0)$$

στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου; (ε:1) Ποια είναι η προσεγγιστική έκφραση της δυναμοσειράς σαν πολυώνυμο έβδομου βαθμού, $v(x) \approx v_7(x)$, με όρους μέχρι και x^7 και χρησιμοποιώντας σαν σταθερές μόνο τις πιο πάνω αρχικές συνθήκες;

ΑΣΚΗΣΗ A59 (Κεφάλαια A2, A5, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Εδώ θεωρούμε το γενικό πρόβλημα του λυγισμού κατακόρυφου στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος) με $0 \leq x \leq L$ και γενικά πακτωμένο το κάτω άκρο του $x = 0$. Στο στύλο ασκείται ένα αξονικό θλιπτικό φορτίο P που έχει ήδη προκαλέσει το λυγισμό του. Ζητούνται: (α:2) Με βάση τη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της συνήθους δοκού ως προς το βέλος κάμψεως της $v(x)$ (αυτή με τη ροπή κάμψεως $M(x)$ δεξιά) και με τη χρήση κατάλληλου σχήματος ο σχηματισμός της σχετικής διαφορικής εξίσωσης

$$EIv''(x) + Pv(x) = M_0 + Rx$$

με EI την ελάχιστη δυσκαμψία της διατομής του στύλου. (β:1) Τι παριστάνουν από φυσικής απόψεως οι δύο σταθερές ποσότητες M_0 και R στο δεξιό μέλος; (γ:2) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης και την υποχρεωτική χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $k = \sqrt{P/(EI)}$ η γενική λύση $v_h(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και (δ:2) με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας ο απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας των δύο σχετικών συναρτήσεων. (ε:1) Η εύρεση μιας μερικής λύσεως $v_p(x)$ της αρχικής (της μη ομογενούς) διαφορικής εξίσωσης και (στ:2) τέλος και της γενικής λύσεως $v_g(x)$ πάλι της αρχικής (της μη ομογενούς) διαφορικής εξίσωσης.

A4.5. Στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός υπό το ίδιο βάρος

ΑΣΚΗΣΗ A60 (Κεφάλαια A9, A14, A15, Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός υπό το Ίδιο Βάρος): Θεωρούμε το πρόβλημα κατακόρυφης ράβδου μήκους L πακτωμένης στο κάτω άκρο της $x = 0$ και ελεύθερης στο πάνω άκρο της $x = L$ που λυγίζει υπό την επίδραση του

ιδίου βάρους της q (σε kN/m και σταθερού κατά μήκος της ράβδου). Αυτό ασκείται αξονικά (και θλιπτικά ασφαλώς) πάνω στη ράβδο. Το βάρος αυτό μπορεί να προκαλέσει το λυγισμό της ράβδου και τούτο θεωρείται ότι έχει ήδη συμβεί. Όπως αναφέρουν οι Timoshenko και Gere, το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε κατ' αρχήν από τον Euler (χωρίς όμως ικανοποιητική λύση) και τελικά λύθηκε από τον Greenhill στο περιοδικό *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Τόμος 4, 1881. Στη σχετική εργασία του ο Greenhill αναφέρει και μια σειρά άλλων προβλημάτων λυγισμού (όπως και το παρόν) τα οποία μπορούν να λυθούν με τη χρήση συναρτήσεων Bessel. Πιο συγκεκριμένα μετά από κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών (ανεξάρτητης και εξαρτημένης) το πιο πάνω πρόβλημα ανάγεται τελικά στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση Bessel:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)u = 0$$

με $u = u(z)$ την άγνωστη συνάρτηση. Ζητούνται: (α:2) Να αναφερθεί (χωρίς υπολογισμούς) η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως Bessel με δύο τρόπους και με τη χρήση κατάλληλων συναρτήσεων Bessel. Λησμονώντας τώρα πλήρως τις συναρτήσεις Bessel, ζητείται η κατευθείαν προσεγγιστική επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως υποχρεωτικά με τον παρόντα συμβολισμό και με τη μέθοδο των γενικευμένων δυναμοσειρών της μορφής

$$u(z) = z^m (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots + a_n z^n + \dots).$$

Εδώ το σύμβολο m δηλώνει μια κατάλληλη σταθερά που πρέπει να προσδιορισθεί από σχετική χαρακτηριστική εξίσωση. Πιο αναλυτικά ζητούνται: (β:1) Οι δυνατές τιμές $m_{1,2}$ της σταθεράς m . (γ:1) Ο γενικός αναδρομικός τύπος προσδιορισμού του συντελεστή a_k σαν συνάρτηση του a_{k-2} . (δ:1) Οι εκφράσεις των δύο γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων $u_1(z)$ και $u_2(z)$ της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως σε μορφή δυναμοσειρών (ακριβώς όπως η πιο πάνω) και με όρους μέχρι και z^4 . (ε:1) Ποια είναι η γενική λύση $u_g(z)$ της διαφορικής εξισώσεως; (στ:1) Τελικά ας σημειωθεί ότι με βάση την πιο πάνω λύση και τις συνοριακές συνθήκες μπορεί να προσδιορισθεί το κρίσιμο βάρος της ράβδου $W_{cr} = (qL)_{cr}$ το οποίο θα προκαλέσει το λυγισμό της και που δίδεται από τον τύπο

$$W_{cr} = (qL)_{cr} \approx \frac{7.837 EI}{L^2}$$

με EI την ελάχιστη ροπή αδρανείας της διατομής της ράβδου. (ζ:1) Ποιο θεωρείτε τον κύριο λόγο που το παρόν κρίσιμο βάρος W_{cr} είναι μικρότερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} της προηγούμενης ασκήσεως υπό την ίδια γεωμετρία και το ίδιο υλικό των δύο ράβδων;

A4.6. Δοκοί-στύλοι, ελαστική ευστάθεια: λυγισμός

ΑΣΚΗΣΗ A61 (Κεφάλαια A2, A5, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι):

Θεωρούμε τη σύνθετη καταπόνηση μιας συνήθους δοκού-στύλου (ή δοκού-ράβδου) δυσκαμψίας EI με αξονικό θλιπτικό φορτίο P (με $P > 0$) και με ομοιόμορφα κατανεμημένη κάθετη καμπτική φόρτιση p_0 που προκαλεί και κάμψη της δοκού-ράβδου. Η σχετική διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} + P \frac{d^2v}{dx^2} = p_0 \quad \text{με} \quad 0 < x < L \quad \text{και} \quad v = v(x)$$

το βέλος κάμψεως. Εδώ ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της διαφορικής αυτής εξισώσεως με βάση την αντίστοιχη εξίσωση για απλή κάμψη. (β:1) Η εύρεση της γενικής λύσεως $v_h(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και με τη χρήση του συμβόλου $k = \sqrt{P/(EI)}$ και (γ:1) η μετατροπή της με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. (δ:3) Με τη χρήση ορίζουσας η απόδειξη ότι οι μερικές λύσεις στη λύση $v_h(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (ε:1) Η εύρεση μιας μερικής λύσεως $v_p(x)$ της μη ομογενούς εξισώσεως και (στ:1) της αντίστοιχης γενικής λύσεως $v_g(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ Α62 (Κεφάλαιο Α9, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Θεωρούμε την ίδια δοκό-στύλο (ή δοκό-ράβδο) χωρίς όμως την καμπτική φόρτιση (με $p_0 = 0$) και μόνο με το αξονικό θλιπτικό φορτίο P (με $P > 0$). (Τώρα έχουμε απλά ένα στύλο ή μια ράβδο!) Το μήκος τούτου του στύλου είναι L (με $0 \leq x \leq L$). Το άκρο $x = 0$ του στύλου είναι αρθρωμένο, ενώ το άκρο $x = L$ είναι πακτωμένο. Χωρίς αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής ζητούνται: (α:1) Οι σχετικές συνοριακές συνθήκες. (β:4) Με την υπόθεση λυγισμού του στύλου η εύρεση της σχετικής χαρακτηριστικής εξίσωσης. (γ:3) Με γνωστή τη μικρότερη θετική ρίζα z_{\min} της εξίσωσης $\tan z = z$ ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού P_{cr} του στύλου.

ΑΣΚΗΣΗ Α63 (Κεφάλαια Α5, Α9, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα της σύνθετης καταπόνησης συνήθους δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI (θετικής και υποτιθέμενης σταθερής κατά μήκος της δοκού). Η σύνθετη καταπόνηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα δοκού συνίσταται στην εφαρμογή τόσο κάθετου κατανεμημένου φορτίου p_0 (σταθερού κατά μήκος της δοκού) όσο και αξονικού θλιπτικού (όχι εφελκυστικού) συγκεντρωμένου φορτίου P (μέσω δύο δυνάμεων P που εφαρμόζονται στα δύο άκρα της δοκού και κατά μήκος της, δηλαδή αξονικά, όχι εγκάρσια). Σημειώνεται παρενθετικά ότι μια τέτοια δόκος καλείται μερικές φορές και δοκός-στύλος. Όπως θα υποδειχθεί παρακάτω, η σύνθετη αυτή φόρτιση μπορεί να προκαλέσει ακόμη και το λυγισμό της δοκού. Κατ' αρχήν η διαφορική εξίσωση στην παρούσα δοκό ως προς το βέλος κάμψεως της $v = v(x)$ φυσικά, που δημιουργεί την ελαστική γραμμή της δοκού, είναι τετάρτης τάξεως και έχει την εξής μορφή:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = p_0 \quad \text{με} \quad 0 < x < L.$$

Με τη δοκό να θεωρείται αμφιέριστη, δηλαδή με άρθρωση-κύλιση ή αντίστροφα στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$, τόσο το βέλος κάμψεως $v = v(x)$ όσο και η ροπή κάμψεως $M = M(x) = EI d^2 v/dx^2$ μηδενίζονται και στα δύο άκρα της δοκού $x = 0$ και $x = L$. Αυτές είναι οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Ζητούνται: (α:1) Το σύνολο των θεμελιωδών λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στην παραπάνω μη ομογενή διαφορική εξίσωση με τη χρήση και του μάλλον χρήσιμου συμβόλου $k = \sqrt{P/(EI)}$. (β:1) Η απόδειξη (υποχρεωτικά μέσω ορίζουσας Wronski) ότι πράγματι πρόκειται για γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. (γ:2) Η γενική λύση και της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. (δ:2) Η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών που έχει περιγραφεί πιο πάνω. (ε:4) Η εύρεση του πρώτου κρίσιμου (critical) φορτίου λυγισμού P_{cr} , δηλαδή της ελάχιστης (θετικής εννοείται) τιμής του θλιπτικού αξονικού φορτίου P κατά μήκος της δοκού που θα προκαλέσει άπειρο βέλος κάμψεως στη δοκό αυτή (λόγω και της ταυτόχρονης εγκάρσιας φορτίσεως p_0 εννοείται) σε όλο το μήκος της φυσικά εκτός από τα άκρα της $x = 0$ και $x = L$, όπου υπάρχουν στηρίξεις: αμφιέριστη δοκός.

ΑΣΚΗΣΗ Α64 (Κεφάλαια Α1, Α2, Α5, Α10, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Εδώ θεωρούμε το πρόβλημα της σύνθετης καταπόνησεως (ταυτόχρονη θλίψη και κάμψη) δοκού-στύλου (ή δοκού-ράβδου) από ελαστικό υλικό μέτρου ελαστικότητας E και με μεταβλητή ροπή αδραειάς $I(x)$ της διατομής της (μεταβλητή διατομή κατά μήκος της δοκού-στύλου) (i) υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο P και (ii) επιπλέον και υπό κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$, που προκαλεί (αυτή η φόρτιση $p(x)$) γνωστή πρόσθετη καμπτική ροπή $M_b(x)$. Εδώ ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης

$$EI(x)v''(x) = -Pv(x) + M_b(x)$$

με $v(x)$ την κάθετη (εγκάρσια) μετατόπιση των σημείων του στύλου. (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ίδιας εξίσωσης. (γ:1) Να εξηγηθεί επίσης λεπτομερώς εάν ή όχι οι μέθοδοι (i) της εκθετικής αντικαταστάσεως και (ii) του μετασχηματισμού Laplace είναι εφαρμόσιμες για την επίλυση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης. (δ:4) Υποθέτοντας τώρα γνωστή μία λύση $v_1(x)$ της

αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, ζητείται η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. (ε:1) Τώρα με γνωστή τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως ζητείται και η γενική λύση $v(x)$ της αρχικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ Α65 (Κεφάλαια Α2, Α5, Α9, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι, Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Η παρούσα άσκηση καθώς και οι επόμενες πέντε ασκήσεις αφορούν σε ένα και μόνο τεχνικό πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού. Το πρόβλημα αυτό είναι το πρόβλημα της σύνθετης καταπόνησής μιας δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) τόσο με κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ όσο και με θλιπτικό αξονικό φορτίο P (με $P > 0$ για το θλιπτικό αυτό φορτίο). Μια τέτοια δοκός σε σύνθετη καταπόνηση καλείται μερικές φορές δοκός-στύλος (ή δοκός-ράβδος). Η σχετική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως έχει τη μορφή

$$v''(x) + k^2 v(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (1)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση $v(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση που παριστάνει το βέλος κάμψης (την κάθετη μετατόπιση των σημείων) της δοκού-στύλου, $M(x)$ η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψης) στο μέρος της που οφείλεται μόνο (αποκλειστικά) στην κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$, EI η δυσκαμψία της δοκού-στύλου και k η βοηθητική σταθερά

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (2)$$

Στο παρόν πρόβλημα υποθέτουμε επίσης ότι η δοκός-στύλος που εξετάζουμε είναι αμφιέριστη, δηλαδή έχει απλές στηρίξεις (άρθρωση-κύλιση, όχι πακτώσεις!) στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Σε ορισμένες ασκήσεις πιο κάτω υποθέτουμε επίσης ότι η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ είναι σταθερή: $p(x) = p_0$. Στην ειδική αυτή περίπτωση η καμπτική ροπή $M(x)$ στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση της δοκού-στύλου δίνεται από τον τύπο

$$M(x) = \frac{p_0}{2} x(L - x). \quad (3)$$

Στο ενδιαφέρον και τόσο κλασικό τεχνικό αυτό πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού θέτουμε μια σειρά από ερωτήματα στην παρούσα άσκηση και στις επόμενες πέντε σχετικές ασκήσεις.

Εδώ ζητούνται: (α:1) Επτά χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξίσωσης (1). (β:1) Το σχετικό λεπτομερές σχήμα για $p(x) = p_0$. (γ:1) Η απόδειξη της ίδιας διαφορικής εξίσωσης (1) με βάση τη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως η οποία ισχύει για το βέλος κάμψης $v(x)$ σε μια συνήθη δοκό. Η εξίσωση αυτή θεωρείται γνωστή. (δ:2) Η απόδειξη του τύπου (3) για την παρούσα αμφιέριστη δοκό-στύλο. (ε:1) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης η επίλυση (η εύρεση της γενικής λύσεως) της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (1). (στ:1) Η λεπτομερής μετατροπή της γενικής λύσεως του προηγούμενου ερωτήματος σε τριγωνομετρική μορφή. (ζ:1) Η επαλήθευση της γενικής λύσεως σε τριγωνομετρική μορφή.

ΑΣΚΗΣΗ Α66 (Κεφάλαια Α5, Α9, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι, Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ ζητούνται: (α:3) Μια μερική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (1) για σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0$. (β:1) Η επαλήθευσή της. (γ:1) Η αντίστοιχη γενική λύση. (δ:1) Οι δύο συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού-στύλου. Γιατί πρέπει να είναι μόνο δύο στην εξίσωση (1); (ε:2) Η επίλυση του σχετικού προβλήματος συνοριακών τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ Α67 (Κεφάλαια Α9, Α10, Α11, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι, Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε τις δυο προηγούμενες ασκήσεις. Εδώ ζητούνται: (α:2) Με γνωστή τη γωνία στροφής $\theta(0) = \theta_0$ στο αριστερό άκρο $x = 0$ της παρούσας αμφιέριστης δοκού-στύλου ο μετασχηματισμός Laplace $V(s)$ του άγνωστου βέλους κάμψης $v(x)$ στην ίδια δοκό-στύλο με τις δύο αρχικές συνθήκες (η μία όμως είναι μηδενική) να θεωρούνται εδώ μόνο στο άκρο αυτό $x = 0$ και με $p(x) = p_0$, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη άσκηση. (β:4) Με

τη χρήση και των αναλύσεων σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{s^2(s^2 + k^2)} = \frac{1}{k^2 s^2} - \frac{1}{k^2(s^2 + k^2)} \quad \text{και} \quad \frac{1}{s^4(s^2 + k^2)} = \frac{1}{k^2 s^4} - \frac{1}{k^4 s^2} + \frac{1}{k^4(s^2 + k^2)} \quad (4)$$

Ζητείται η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $V(s)$ που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα και η εύρεση του άγνωστου βέλους κάμψεως $v(x)$ στην αμφιέριστη δοκό-στύλο σαν συνάρτηση της γωνίας στροφής $\theta(0) = \theta_0$. (γ:1) Να επαληθευθεί η λύση αυτή ως προς τη διαφορική εξίσωση και (δ:1) ως προς τη συνοριακή συνθήκη στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού-στύλου.

ΑΣΚΗΣΗ Α68 (Κεφάλαια Α5, Α9, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι, Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται: (α:1) Για τη γενική διαφορική εξίσωση (1) να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση $v_1(x) = \cos kx$ αποτελεί μερική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως. (β:4) Με βάση αυτήν τη μερική λύση ζητείται ο υποβιβασμός της τάξεως της διαφορικής εξισώσεως (1) από δευτέρας τάξεως σε πρώτης ως προς μία κατάλληλη άγνωστη συνάρτηση. (γ:3) Με τη λύση της διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως, π.χ. την $\hat{A}_g(x, E_1)$ (με το E_1 αυθαίρετη σταθερά) να υποτίθεται ότι είναι ήδη γνωστή (να μη βρεθεί στ' αλήθεια!), ποια είναι η αντίστοιχη γενική λύση $v_g(x)$ της διαφορικής εξισώσεως (1);

ΑΣΚΗΣΗ Α69 (Κεφάλαια Α5, Α9, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι, Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε τις τέσσερις προηγούμενες ασκήσεις. Εδώ ζητούνται: (α:1) Με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\cos kx$ και $\sin kx$ (με το k να δίνεται από τον τύπο ορισμού του (2)) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (β:4) Για τη διαφορική εξίσωση (1) στη γενική της μορφή με αυθαίρετη συνάρτηση $M(x)$ στο δεξιό μέλος και παίρνοντας υπόψη τη γενική λύση $v_h(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως που ήδη βρέθηκε, ποια είναι η γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων να εφαρμόζεται κατευθείαν στην παρούσα διαφορική εξίσωση και με όλους τους σχετικούς τύπους να μη θεωρούνται γνωστοί! (γ:3) Να προσδιορισθούν οι δύο αυθαίρετες σταθερές στη γενική αυτή λύση, έτσι ώστε να πληρούνται και οι δύο συνοριακές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ Α70 (Κεφάλαια Α9, Α10, Α11, Μηχανική των Υλικών: Σύνθετη Καταπόνηση: Δοκοί-Στύλοι, Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Συνεχίζουμε τις πέντε προηγούμενες ασκήσεις. Εδώ ζητούνται: (α:1) Και πάλι στη γενική διαφορική εξίσωση (1): με αυθαίρετη, οποιαδήποτε, αλλά τμηματικά συνεχή καμπτική ροπή $M(x)$ στο δεξιό μέλος ζητείται πάλι ο μετασχηματισμός Laplace $V(s)$ του άγνωστου βέλους κάμψεως $v(x)$, ειδικά εδώ με τη χρήση δύο αυθαίρετων σταθερών: $v(0) = v_0$ και $v'(0) \equiv \theta(0) = \theta_0$. Αυτές υποτίθεται ότι αφορούν στις αρχικές συνθήκες στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού-στύλου που μελετάμε. (β:2) Αντιστρέφοντας τώρα το μετασχηματισμό αυτό Laplace ζητείται η αντίστοιχη λύση $v(x)$ της διαφορικής εξισώσεως (1). (γ:2) Να προσδιορισθούν οι δύο αυτές σταθερές v_0 και θ_0 με βάση και τις δύο συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της παρούσας δοκού-στύλου. (δ:2) Είναι προφανές ότι όταν απειρισθεί έστω και μία από τις δύο αυτές σταθερές v_0 και θ_0 , προκύπτει άπειρο βέλος κάμψεως στη δοκό-στύλο που εξετάζουμε. (Ένας τέτοιος απειρισμός μπορεί να συμβεί πιθανώς με το μηδενισμό του σχετικού παρονομαστή.) Άρα έχει επέλθει (δυστυχώς!) το φαινόμενο του λυγισμού της δοκού-στύλου μας. Πότε ακριβώς συμβαίνει αυτό και ποια είναι τα φορτία λυγισμού P_n ; (ε:1) Ποιο είναι το πρώτο, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού $P_1 = P_{cr}$ συναρτήσει της δυσκαμψίας EI της αμφιέριστης δοκού-στύλου που μελετάμε και του μήκους της L ; Υπόδειξη: Πιθανώς θα προκύψει το εξής κρίσιμο φορτίο λυγισμού:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \approx \frac{9.869604401089358 EI}{L^2} \approx \frac{10 EI}{L^2} \quad (5)$$

ανεξάρτητα από τη μορφή της κατανεμημένης κάθετης φορτίσεως $p(x)$. Επίσης το κρίσιμο αυτό φορτίο λυγισμού P_{cr} συμπίπτει με το αντίστοιχο φορτίο λυγισμού για αμφιαρθρωτό στύλο υπό θλιπτική φόρτιση P (και χωρίς καθόλου κάθετη φόρτιση) που δίνεται από τον ίδιο τύπο: τον τύπο του Euler (5). (στ:1) Αν διπλασιασθεί το μήκος L της παρούσας δοκού-στύλου, να διερευνηθεί τι ακριβώς θα συμβεί με το κρίσιμο αυτό φορτίο λυγισμού της $P_1 = P_{cr}$.

A4.7. Επίπεδη ελαστικότητα με κυκλική συμμετρία, τασική συνάρτηση του Airy

ΑΣΚΗΣΗ A71 (Κεφάλαια A1, A5, A8, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Κυκλική Συμμετρία, Τασική Συνάρτηση του Airy): Θεωρούμε εδώ το επίπεδο πρόβλημα της γραμμικής Θεωρίας της Ελαστικότητας σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) και υπό κυκλική συμμετρία ως προς το κέντρο των συντεταγμένων O . Επομένως οι συνιστώσες των μετατοπίσεων, των παραμορφώσεων και των τάσεων εξαρτώνται (λόγω της κυκλικής συμμετρίας γύρω από το σημείο O μόνο από την πολική ακτίνα r , ενώ είναι ανεξάρτητες από την πολική γωνία θ). Όλες αυτές οι συνιστώσες και ειδικότερα οι τάσεις (ή συνιστώσες του τανυστή των τάσεων), που είναι και αυτές που κυρίως ενδιαφέρουν τον Πολιτικό Μηχανικό μπορούν να προσδιορισθούν εύκολα, εάν είναι γνωστή η τασική συνάρτηση του Airy $A(r)$ σε πολικές συντεταγμένες. (Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι φυσικά οι υψηλές τάσεις λόγω ανεπάρκειας του υλικού, ανεπιτυχούς ή/και εσφαλμένης στατικής μελέτης της κατασκευής, υψηλής φορτίσεως ή συνδυασμού των παραγόντων αυτών είναι εκείνες που προκαλούν την αστοχία και τη θραύση του υλικού σε μια κατασκευή.) Τώρα λόγω της συνθήκης συμβιβαστού των παραμορφώσεων αποδεικνύεται ότι η τασική συνάρτηση του Airy πληροί υπό τις παρούσες συνθήκες συμμετρίας ως προς το κέντρο O την εξής ομογενή ισοδιάστατη γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως:

$$\frac{d^4 A}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 A}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dA}{dr} = 0.$$

Κατ' αρχήν ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή τι τύπων είναι. (β:2) Αν και η εξίσωση αυτή εμφανίζεται σαν διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, εντούτοις προφανώς ουσιαστικά πρόκειται για διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως. Γιατί ισχύει ο ισχυρισμός αυτός; Ποια είναι η σχεδόν ισοδύναμη διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως με τη νέα άγνωστη συνάρτηση να δηλώνεται σαν $u(r)$; (γ:3) Πέρα από την προφανή σταθερή μερική λύση $A_1(r) = 1$, η πιο πάνω διαφορική εξίσωση έχει και δεύτερη απλή μερική λύση, την $A_2(r) = r^2$, οπότε $u_2(r) := dA_2(r)/dr = 2r$. Με βάση τη συνάρτηση $u_2(r)$ και υποχρεωτικά με τη μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως ζητείται να αναχθεί η σχεδόν ισοδύναμη διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως του ερωτήματος (β) που προαναφέρθηκε σε διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως. (δ:2) Λαμβάνονουμε τέλος υπόψη ότι ένα στοιχειώδες σύστημα (ή σύνολο) θεμελιωδών λύσεων της αρχικής διαφορικής εξισώσεως τετάρτης τάξεως είναι το ακόλουθο σύστημα (ή σύνολο):

$$A_1(r) = 1, \quad A_2(r) = r^2, \quad A_3(r) = \ln r, \quad A_4(r) = r^2 \ln r.$$

Ζητείται εδώ απλά (μόνο) η επαλήθευση χάριν ευκολίας για τις τρεις πρώτες μόνο, δηλαδή τις $A_1(r)$, $A_2(r)$ και $A_3(r)$ από τις πιο πάνω συναρτήσεις, όχι και την τέταρτη, την $A_4(r)$, ότι πραγματικά πρόκειται για γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις μέσω του υπολογισμού της σχετικής ορίζουσας Wronski. (Δε ζητείται όμως και η επαλήθευση ότι πρόκειται για λύσεις της διαφορικής εξισώσεως).

Στη συνέχεια ζητούνται: (ε:4) Η γενική λύση $A = A(r)$ της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως υποχρεωτικά με τη χρήση κατάλληλης χαρακτηριστικής εξισώσεως. (στ:2) Έπειτα με βάση τη γενική αυτή λύση $A(r)$ που βρέθηκε ο υπολογισμός των συνιστωσών των ορθών τάσεων σ_r και σ_θ (η διατμητική τάση $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ είναι προφανώς μηδενική λόγω της συμμετρίας) με χρήση των τύπων

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} \quad \mu\epsilon \quad \sigma_\theta = \frac{d^2 A}{dr^2}.$$

(ζ:2) Τέλος ζητείται να επαληθευθεί ότι ισχύει η εξής εξίσωση ισορροπίας (φυσικά χωρίς την ύπαρξη δυνάμεων μάζας και γενικότερα καθολικών δυνάμεων):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Αυτή είναι και η μόνη μη τετριμμένη εξίσωση ισορροπίας στο παρόν πρόβλημα. Δυστυχώς όμως η ισχύς της εξισώσεως ισορροπίας αυτής δεν αποτελεί ένδειξη πως η τασική συνάρτηση του

Airy $A = A(r)$ που προσδιορίστηκε παραπάνω είναι σωστή. Αυτό συμβαίνει, επειδή η πιο πάνω διαφορική εξίσωση βρέθηκε με βάση τη συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (δηλαδή «εκφράζει» την συνθήκη αυτή) και όχι με βάση κάποια εξίσωση ισορροπίας. Άρα η παραπάνω εξίσωση ισορροπίας πρέπει να ισχύει πάντοτε με βάση τους προαναφερθέντες τύπους προσδιορισμού των ορθών τάσεων σ_r και σ_θ (που υποτίθενται ότι είναι σωστοί), εφόσον βέβαια η τασική συνάρτηση $A = A(r)$ διαθέτει τρίτη παράγωγο. Να επαληθευθεί μαθηματικά ο ισχυρισμός αυτός.

A5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΛΑΚΩΝ

A5.1. Πλάκες με κυκλική συμμετρία

ΑΣΚΗΣΗ A72 (Κεφάλαια A5, A8, Πλάκες: Κυκλική Συμμετρία): Σε συνήθη πλάκα υπό αξονική (ή κυκλική) συμμετρία τόσο στη γεωμετρία (κυκλική ή δακτυλιοειδής πλάκα) όσο και στην κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(r)$ το βέλος κάμψεως (ή βύθιση) $w(r)$ της πλάκας, που σχηματίζει την ελαστική επιφάνειά της, επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} = -\frac{M_r(r)}{D}$$

με r την πολική ακτίνα από το κέντρο O του κύκλου ή του δακτυλίου. Στην διαφορική αυτή εξίσωση η συνάρτηση $M_r(r)$ είναι η σχετική καμπτική ροπή στην πλάκα (η πρώτη από τις δύο καμπτικές ροπές M_r και M_θ , όχι η ροπή συστροφής $M_{r\theta}$), ν ο λόγος του Poisson του υλικού της και D η δυσκαμψία της. Ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση $w_h(r)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως και (β:1) η επαλήθευσή της. (γ:3) Μία μερική λύση $w_p(r)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, εάν είναι γνωστό ότι

$$M_r(r) = M_0^* r^2$$

με το M_0^* γνωστή σταθερά και (δ:1) η επαλήθευσή της. (ε:1) Η γενική λύση $w_g(r)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A73 (Κεφάλαια A5, A8, Πλάκες: Κυκλική Συμμετρία): Σε μια δακτυλιοειδή ή κυκλική πλάκα υπό συμμετρική φόρτιση παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3w(r)}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw(r)}{dr} = \frac{Q(r)}{D}$$

με $w(r)$ το βέλος κάμψεως, $Q(r)$ την τέμνουσα (ή διατμητική) δύναμη και D τη δυσκαμψία της πλάκας. Ζητούνται: (α:1) Ο τύπος που δίνει τη δυσκαμψία D της πλάκας και από αυτόν οι μονάδες της. (β:1) Με ποια μέθοδο ή ποιες μεθόδους μπορεί να βρεθεί η γενική λύση $w_h(r)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως και γιατί; (γ:4) Η γενική αυτή λύση $w_h(r)$. (δ:2) Η μερικότερη λύση $w_c(r)$ που αντιστοιχεί μόνο στην κυκλική πλάκα με λεπτομερή εξήγηση για το πώς προέκυψε.

ΑΣΚΗΣΗ A74 (Κεφάλαια A3, A5, A8, Πλάκες: Κυκλική Συμμετρία): Οι πλάκες αποτελούν έναν ιδιαίτερα χρήσιμο επιφανειακό φορέα στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και παρουσιάζονται πάρα πολύ συχνά σαν στοιχείο των κατασκευών του. Στη συγκεκριμένη άσκηση θεωρούμε απλά μια συνήθη κυκλική πλάκα (λεπτή, σταθερού πάχους, ισότροπη και γραμμικά ελαστική, ομογενή και με όλες τις συνήθεις παραδοχές της θεωρίας των λεπτών πλακών) ακτίνας a . Θεωρούμε επίσης το πρόβλημα της αξονικής συμμετρίας σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , δηλαδή με απόλυτα συμμετρική γεωμετρία, στηρίξεις και φόρτιση ως προς την αρχή O των συντεταγμένων. Στο παρόν πρόβλημα το βέλος κάμψεως (ή βύθιση ή εγκάρσια μετατόπιση) $w = w(r)$ της κυκλικής πλάκας, που δημιουργεί την ελαστική επιφάνεια της πλάκας, εξαρτάται βέβαια μόνο από την πολική ακτίνα r όχι και από την πολική γωνία θ λόγω της πλήρους κυκλικής συμμετρίας που ήδη υποθέσαμε. Αποδεικνύεται πως το βέλος κάμψεως $w = w(r)$ επαληθεύει την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p(r)}{D} \quad \text{με} \quad 0 \leq r \leq a,$$

με $p = p(r)$ την αξονοσυμμετρική κάθετη κατανεμημένη φόρτιση που ασκείται πάνω στην παρούσα κυκλική πλάκα και D τη δυσκαμψία της που θεωρείται σταθερή. Πρόκειται ουσιαστικά για μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί με την εκτέλεση των παραγωγίσεων. Ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως για σταθερή φόρτιση $p(r) = p_0$ σ' ολόκληρη την κυκλική πλάκα. (β:1) Ποιο είναι το σύστημα θεμελιωδών λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως; (γ:2) Μιλώντας από φυσικής απόψεως, το βέλος κάμψεως $w = w(r)$ δεν είναι δυνατόν να απειρίζεται στο κέντρο $r = 0$ της κυκλικής πλάκας. Άρα ο λογαριθμικός όρος $C_1 \ln r$ πρέπει να μηδενίζεται στη λύση που ήδη βρέθηκε: επομένως $C_1 = 0$. Για ανάλογο φυσικό λόγο (που έχει όμως τώρα σχέση με τις καμπτικές ροπές $M_{r,\theta}$ που αναπτύσσονται στην πλάκα εξαιτίας της φορτίσεως της $p(r) = p_0$) πρέπει και ο δεύτερος (και πιο «ήπιος», γιατί ο χαρακτηρισμός αυτός;) λογαριθμικός όρος $C_2 r^2 \ln r$ να μηδενίζεται κι αυτός. Ποια είναι επομένως τώρα η γενική λύση της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, όπου έχουν ήδη ληφθεί υπόψη οι συνθήκες στο κέντρο $r = 0$ της πλάκας; (δ:2) Στο σύνορο της πλάκας τώρα (στην περιφέρεια της κυκλικής πλάκας) $r = a$ θεωρούμε ότι υπάρχει πάκτωση. Τότε τόσο το βέλος κάμψεως w όσο και η πρώτη παράγωγός του dw/dr πρέπει να μηδενίζονται ταυτόχρονα για $r = a$. Υπ' αυτές τις συνοριακές συνθήκες ποια είναι η τελική έκφραση του βέλους κάμψεως $w(r)$ στην κυκλική πλάκα την οποία εξετάζουμε υπό σταθερή φόρτιση $p(r) = p_0$; (ε:1) Πού παρουσιάζεται το μέγιστο βέλος κάμψεως w_{\max} και πόσο είναι αυτό; (Ας σημειωθεί επίσης, παρενθετικά ασφαλώς, ότι η μέγιστη τιμή της καμπτικής ροπής M_r παρουσιάζεται στο σύνορο, στην περιφέρεια της κυκλικής πλάκας και όχι στο κέντρο της O .)

ΑΣΚΗΣΗ Α75 (Κεφάλαια Α3, Α5, Α8, Πλάκες: Κυκλική Συμμετρία): θεωρούμε το πρόβλημα της συνήθους πλάκας σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) υπό συνθήκες κυκλικής συμμετρίας γύρω από την αρχή των συντεταγμένων O . Λόγω της συμμετρίας αυτής όλες οι συνιστώσες των εντατικών μεγεθών (όπως οι καμπτικές ροπές ή ροπές κάμψεως), αλλά και των γεωμετρικών μεγεθών (όπως το βέλος κάμψεως ή βύθιση των σημείων της πλάκας, που δημιουργεί την ελαστική επιφάνειά της) εξαρτώνται αποκλειστικά από την πολική ακτίνα r . Σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι και η γραμμική διαφορική εξίσωση που συνδέει το βέλος κάμψεως $w = w(r)$ με μια κατάλληλα επιλεγόμενη βοηθητική καμπτική ροπή $M = M(r)$. Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw(r)}{dr} = - \frac{M(r)}{D}$$

με D την δυσκαμψία της πλάκας, η οποία είναι μια θετική σταθερά ποσότητα. Στην άσκηση αυτή περιοριζόμαστε στην αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση, δηλαδή με $M(r) = 0$, οπότε

$$\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw(r)}{dr} = 0$$

Ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση της πιο πάνω ομογενούς διαφορικής εξισώσεως υποχρεωτικά με τη χρήση κατάλληλης χαρακτηριστικής εξισώσεως. (β:1) Η επαλήθευση της λύσεως αυτής. (γ:3) Η αναγωγή της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (με τον απλούστερο δυνατό τρόπο), η εύρεση της λύσεως της διαφορικής αυτής εξισώσεως πρώτης τάξεως και στη συνέχεια με βάση αυτήν τη λύση η εύρεση και της γενικής λύσεως της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως που αντιστοιχεί στην αρχική διαφορική εξίσωση. Συμφωνούν οι γενικές λύσεις που βρέθηκαν στο ερώτημα (α) και στο παρόν ερώτημα; (δ:2) Η αναγωγή της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως, που είναι προφανώς διαφορική εξίσωση με μη σταθερούς συντελεστές, σε αντίστοιχη διαφορική εξίσωση με σταθερούς όμως συντελεστές μέσω κατάλληλης αλλαγής της εξαρτημένης μεταβλητής από r σε t . (Οι σχετικοί τύποι δε θεωρούνται εδώ γνωστοί.) (ε:2) Η επίλυση της διαφορικής εξισώσεως που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα (γενική λύση και πάλι!). Συμφωνούν τα αποτελέσματα

των ερωτημάτων (α), (γ) και (ε) για την ομογενή διαφορική εξίσωση που εξετάζουμε; Επομένως είναι διαθέσιμοι τρεις τρόποι επιλύσεως: ποιος είναι ο απλούστερος;

ΑΣΚΗΣΗ Α76 (Κεφάλαια Α5, Α8, Πλάκες: Κυκλική Συμμετρία): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:5) Μια μερική λύση καθώς και η γενική λύση της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή τώρα με $M(r) \neq 0$. (β:3) Με ιδιαίτερα προσεκτικό τρόπο ως προς τις παραγωγίσεις η λεπτομερής επαλήθευση της γενικής λύσεως του προηγούμενου ερωτήματος. Ας σημειωθεί τέλος ότι με γνωστό το βέλος κάμψεως (ή τη βύθιση) $w(r)$ των σημείων της πλάκας οι σχετικές ροπές κάμψεως M_r και M_θ προσδιορίζονται με βάση τους δύο τύπους

$$M_r = -D \left[\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] \quad \text{και} \quad M_\theta = -D \left[\nu \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right]$$

με ν το λόγο του Poisson του γραμμικά ελαστικού υλικού της πλάκας. Για το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό που ίσως τύχει να διαβάσει τις ασκήσεις αυτές και ασφαλώς δίκαια παραπονείται ως σημειωθεί ότι δυστυχώς η μελέτη της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως (που συνδέει το βέλος κάμψεως $w(r)$ με την κατανεμημένη φόρτιση $q(r)$) ή έστω τρίτης τάξεως (που συνδέει το βέλος κάμψεως $w(r)$ με την τέμνουσα δύναμη $Q(r)$) απαιτεί πολύ περισσότερους υπολογισμούς. Επομένως μάλλον εύλογα δε ζητήθηκε στην παρούσα άσκηση και στην προηγούμενη άσκηση. Καλό είναι σε ορισμένες περιπτώσεις οι υπολογισμοί να γίνονται μέσω του υπολογιστή βέβαια μετά από προηγούμενη κατανόηση και των φυσικών αλλά και των μαθηματικών εννοιών που υπεισέρχονται σ' αυτούς. Θα ήταν όμως μάλλον θρασύ να ζητηθεί επιπλέον και η κατανόηση των τεχνικών της υπολογιστικής άλγεβρας στον υπολογιστή. Οι τελευταίες συνήθως απαιτούν αρκετή εξειδίκευση από το χρήστη τους/τη χρήστριά τους και δεν είναι πολύ γνωστές.

Α5.2. Λυγισμός πλακών με κυκλική συμμετρία

ΑΣΚΗΣΗ Α77 (Κεφάλαια Α14, Α15, Πλάκες: Κυκλική Συμμετρία, Λυγισμός): Σε πρόβλημα λυγισμού συνήθων λεπτών κυκλικών πλακών προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} + (r^2 - 1)\varphi = 0$$

με $\varphi = \varphi(r)$ την σχετική άγνωστη συνάρτηση (που είναι μια γωνία). Ζητούνται: (α:6) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η αναλυτική εύρεση λύσεως $\varphi = \varphi(r)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης που να είναι φραγμένη στο σημείο $r = 0$ που είναι και το κέντρο της κυκλικής πλάκας. (β:2) Με ποια συνάρτηση Bessel σχετίζεται (ή και συμπίπτει) η δυναμοσειρά που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα;

Α5.3. Ταλαντώσεις πλακών με κυκλική συμμετρία

ΑΣΚΗΣΗ Α78 (Κεφάλαια Α8, Α15, Πλάκες: Κυκλική Συμμετρία, Ταλαντώσεις): Σε ταλαντώσεις συνήθους δακτυλιοειδούς πλάκας ή κυκλικής πλάκας προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta^2 \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \beta^2 \right) R(r) = 0$$

με άγνωστη συνάρτηση την $R(r)$ και το β γνωστή θετική σταθερά. Συγκεκριμένα ισχύει ο τύπος

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D}}$$

με ρh την επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας (πυκνότητα ρ του υλικού της επί το πάχος της h), ω την κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεών της και D τη δυσκαμψία της. Ζητούνται: (α:1) Δηλώνοντας με $S(r)$ τη συνάρτηση που προκύπτει με εφαρμογή του διαφορικού τελεστή στις δεύτερες

παρενθέσεις πάνω στη συνάρτηση $R(r)$, να ξαναγραφεί η ίδια διαφορική εξίσωση τώρα σαν διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. (β:1) Με γνωστές την εξίσωση Bessel και την τροποποιημένη εξίσωση Bessel

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \text{και} \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad \text{με} \quad y = y(x)$$

αντίστοιχα ζητείται απλά να γραφούν (όχι και να βρεθούν!) οι γενικές λύσεις τους με τη χρήση συναρτήσεων Bessel. (γ:3) Με την αλλαγή μεταβλητής $x = \beta r$ να μετατραπεί η διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α) σε μια τροποποιημένη εξίσωση Bessel. Ποιες ακριβώς είναι (δ:2) η γενική λύση της $S_\delta(r)$ για δακτυλιοειδή πλάκα και (ε:1) η λύση της $S_\kappa(r)$ για κυκλική πλάκα και γιατί όσον αφορά στη δεύτερη περίπτωση;

A5.4. Επιμήκεις πλάκες, πλακοταινίες

ΑΣΚΗΣΗ A79 (Κεφάλαια A2, A10, A11, Επιμήκεις Πλάκες, Πλακοταινίες): Θεωρούμε το πρόβλημα της κυλινδρικής κάμψεως ομοιόμορφα φορτιζόμενης επιμήκουσ και αμφιέριστης στα άκρα της $x = 0$ και $x = L$ ορθογωνικής πλάκας μήκους L . Μια τέτοια επιμήκουσ πλάκα, που συνδυάζει πλάκα και λωρίδα λόγω της επιμήκουσ γεωμετρίας της και μερικές φορές καλείται πλακοταινία, υποτίθεται ότι έχει βέλος κάμψεως (ή βύθιση) w εξαρτώμενο αποκλειστικά από τη θέση x κατά μήκος της πλάκας, ισχύει δηλαδή ότι $w = w(x)$. (Αυτό το βέλος κάμψεως δημιουργεί την ελαστική επιφάνεια της πλάκας, που είναι υπό τις παρούσες παραδοχές κυλινδρική, όχι κυκλική κυλινδρική βέβαια.) Η σχετική γραμμική διαφορική εξίσωση είναι δευτέρας τάξεως και έχει τη μορφή

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{k^2}{L^2} w(x) = -\frac{\rho_0 x(L-x)}{2D} \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L,$$

με D την δυσκαμψία της πλάκας (που εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας E και το λόγο του Poisson ν του υλικού της καθώς και το πάχος h της πλάκας) και k θετική σταθερά που εξαρτάται αξονική δύναμη S που αναπτύσσεται μήκος της πλάκας (ας μη λησμονείται ότι πρόκειται για αμφιέριστη πλάκα!), το μήκος L της πλάκας και τη δυσκαμψία της D . Τέλος η σταθερά ρ_0 δηλώνει την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση κατά μήκος της πλάκας, που υποτίθεται ομοιόμορφη, σταθερή. Ζητούνται: (α:4) Η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης (για την ομογενή διαφορική εξίσωση) και παραπέρα των τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (για την μη ομογενή, την πλήρη διαφορική εξίσωση). Η λύση αυτή να γραφεί τελικά με τη χρήση κατάλληλων υπερβολικών συναρτήσεων. (β:4) Η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών για την επιμήκουσ πλάκα που περιγράφηκε που να λαμβάνει υπόψη πέρα από την πιο πάνω διαφορική εξίσωση και τις στηρίξεις της πλάκας στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. (Έχει υποθεθεί ήδη αμφιέριστη στήριξη, δηλαδή βέλος κάμψεως ή βύθιση w μηδέν στα άκρα της πλάκας). Για το σκοπό αυτό ο προσδιορισμός των εκφράσεων των σταθερών στην γενική λύση αρκεί.

A5.5. Ορθογωνικές πλάκες

ΑΣΚΗΣΗ A80 (Κεφάλαια A1, A5, Ορθογωνικές Πλάκες): Στις ορθογωνικές πλάκες με απλή στήριξη με τη μέθοδο επιλύσεως του Lévy προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4Y(y)}{dy^4} - 2\beta^2 \frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \beta^4 Y(y) = 0$$

με το β γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (β:4) Η γενική λύση της $Y_g(y)$ με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και (γ:1) η λεπτομερής μετατροπή της σε υπερβολική μορφή με την (δ:1) κατά το δυνατόν στοιχειώδη απλοποίησή της. (ε:1) Ποια άλλη μέθοδος θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της ίδιας γενικής λύσεως $Y_g(y)$;

A6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

A6.1. Εξαναγκασμένη ευθύγραμμη κίνηση

ΑΣΚΗΣΗ A81 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Εξαναγκασμένη Ευθύγραμμη Κίνηση): Υλικό σημείο M μάζας m αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας (με $v_0 = 0$ όπου v είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου) και στη θέση $x_0 = a$ με το a θετική σταθερά (δύο αρχικές συνθήκες ως προς το χρόνο t) κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα Ox υπό την επίδραση ελκτικής (όχι απωστικής) δύναμης που μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα (με θετική σταθερά αναλογίας mk^2) με το τετράγωνο της θέσεως x του υλικού αυτού σημείου M από την αρχή O του άξονα Ox . Ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{k^2}{x^2} \quad \text{με} \quad v = v(x)$$

που συνδέει την ταχύτητα v με τη θέση x του υλικού σημείου M . (β:3) Με βάση τη διαφορική αυτή εξίσωση (ασφαλώς χωρίς να αμεληθούν και οι αρχικές συνθήκες) να βρεθεί επίσης τύπος στη μορφή $v = v(x)$ για την ταχύτητα v του υλικού σημείου σαν συνάρτηση της θέσεώς του x . (γ:3) Με βάση τον τύπο του προηγούμενου ερωτήματος να βρεθεί επιπλέον και τύπος ο οποίος να συνδέει το χρόνο t με την αντίστοιχη θέση x του υλικού σημείου M . (**Υπόδειξη:** Ενδιάμεσα να χρησιμοποιηθεί, εφόσον χρειασθεί, και η αλλαγή μεταβλητής $x = a \cos^2 \theta$.) (δ:1) Είναι δυνατόν να βρεθεί και πιο χρήσιμος τύπος της μορφής $x = x(t)$ ή όχι; Γιατί ακριβώς;

ΑΣΚΗΣΗ A82 (Κεφάλαια A1, A5, A10, A11, Δυναμική: Εξαναγκασμένη Ευθύγραμμη Κίνηση): Υλικό σημείο M μάζας m κινείται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα Ox . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ (με t το χρόνο) το σημείο βρίσκεται στη θέση $x(0) = x_0$ και έχει ταχύτητα $\dot{x}(0) = v_0$. Η κίνηση του υλικού αυτού σημείου πραγματοποιείται υπό την επίδραση μιας απωστικής δύναμης $F(t) = kx(t)$ (ως προς την αρχή O των συντεταγμένων) με $x(t)$ τη θέση του υλικού σημείου M πάνω στον άξονα Ox και k θετική σταθερά. Επομένως με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην κλασική Μηχανική προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = kx(t) \quad \text{με} \quad t \geq 0.$$

Αυτή συνοδεύεται βέβαια από τις δύο αρχικές συνθήκες που ήδη αναφέρθηκαν. Με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $a = \sqrt{k/m}$ ζητείται η λύση του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών τελικά με την έκφρασή της με τη βοήθεια των κατάλληλων υπερβολικών συναρτήσεων. Η λύση αυτή ζητείται να βρεθεί υποχρεωτικά με δύο διαφορετικούς τρόπους συγκεκριμένα: (α:4) χωρίς τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace και (β:4) με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace. (γ:1) Συμφωνούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β); Εάν όχι, ποιο από αυτά είναι το σωστό;

A6.2. Ευθύγραμμη κίνηση με αντίσταση

ΑΣΚΗΣΗ A83 (Κεφάλαια A1, A5, Δυναμική: Ευθύγραμμη Κίνηση με Αντίσταση): Ένα υλικό σημείο M κινείται προς τα δεξιά σε οριζόντιο άξονα υπό την επίδραση μιας αυθαίρετης (όχι συγκεκριμένης) φορτίσεως (εξωτερικής δύναμης) $p_0(t)$ με t το χρόνο. Υφίσταται επίσης και δύναμη αντίστασης $R(t)$ στην κίνηση (από τριβές) της μορφής

$$R(t) = -c_0 v(t)$$

με $v(t)$ την άγνωστη ταχύτητα του υλικού σημείου M και το c_0 γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Ο σχηματισμός της σχετικής διαφορικής εξίσωσης ως προς την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M με τη χρήση των ανηγμένων στη μάζα m σταθεράς c και φορτίσεως $p(t)$:

$$c := \frac{c_0}{m} \quad \text{και} \quad p(t) := \frac{p_0(t)}{m}$$

και (β:1) οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:2) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης η γενική λύση $v_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. (δ:3) Με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου (κανένας σχετικός τύπος δε θεωρείται γνωστός!) και με βάση τη λύση αυτή $v_h(t)$ η εύρεση της λύσεως $v_p(x)$ του προβλήματος αρχικής τιμής που αποτελείται από τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση που προαναφέρθηκε και την αρχική συνθήκη

$$v(0) = v_0.$$

(ε:1) Τέλος η επαλήθευση της λύσεως $v_p(t)$ που βρέθηκε τόσο ως προς τη διαφορική εξίσωση όσο και ως προς την αρχική συνθήκη.

ΑΣΚΗΣΗ A84 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Ευθύγραμμη Κίνηση με Αντίσταση): Σε ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου M μάζας m ασκούνται: (i) εξωτερική δύναμη (ή φόρτιση) $p(t)$ και (ii) αντίσταση στην κίνηση $R(t) = -cv(t)$ ανάλογη της ταχύτητας $v = v(t)$ του υλικού σημείου με γνωστή τη θετική σταθερά c . Ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί η ισχύς της διαφορικής εξίσωσης

$$m \frac{dv}{dt} + cv = p(t) \quad \text{με} \quad v = v(t).$$

(β:2) Να λυθεί η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση (με $p(t) = 0$) σαν εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. (γ:2) Να λυθεί και πάλι η ίδια ομογενής διαφορική εξίσωση, τώρα όμως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης. (δ:3) Να λυθεί τέλος και η μη ομογενής (με $p(t) \neq 0$) πιο πάνω διαφορική εξίσωση υποχρεωτικά με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου. Η εργασία αυτή πρέπει να γίνει βήμα-βήμα για την ίδια την παραπάνω διαφορική εξίσωση ξεκινώντας από την αρχή της μεθόδου της μεταβολής της παραμέτρου (χωρίς τη χρήση του σχετικού τελικού τύπου!).

ΑΣΚΗΣΗ A85 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Ευθύγραμμη Κίνηση με Αντίσταση): Υλικό σημείο M μάζας m κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση του οριζόντιου άξονα Ox , δηλαδή προς τα δεξιά, με ταχύτητα $v(t)$ (με t το χρόνο, εδώ $t \geq 0$). Η αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου M θεωρείται γνωστή: $v(0) = v_0$ (με $v_0 > 0$). Στην κίνηση αυτή υπάρχει μόνο αντίδραση τριβής (προφανώς προς τα αριστερά) της μορφής

$$R(t) = -av(t) - bv^2(t)$$

με τα a και b γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα $v(t)$ ($t > 0$). (β:4) Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης με τη θεώρησή της σαν εξίσωσης Bernoulli. (γ:2) Η αντίστοιχη μερική λύση (ή ειδική λύση) της ίδιας διαφορικής εξίσωσης μαζί με την αρχική συνθήκη της, η οποία ήδη αναφέρθηκε. (δ:1) Η οριακή τιμή v_∞ της ταχύτητας $v(t)$ για $t \rightarrow \infty$. (ε:5) Η γενική λύση $v = v_g(t)$ της ίδιας διαφορικής εξίσωσης που τη θεωρούμε υποχρεωτικά σαν εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. (στ:3) Η αντίστοιχη μερική λύση (ή ειδική λύση) $v = v_p(t)$ της ίδιας διαφορικής εξίσωσης μαζί με την αρχική συνθήκη που προαναφέρθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ A86 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Ευθύγραμμη Κίνηση με Αντίσταση): Υλικό σημείο M μάζας m κινείται ευθύγραμμα (κατά μήκος του άξονα Ox) σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δυνάμεως τριβής $R = R(t)$ της μορφής

$$R(t) = bv(t) + cv^3(t) \quad \text{με} \quad t \geq 0,$$

με t το χρόνο, $v = v(t)$ την ταχύτητα του υλικού σημείου και b και c γνωστές και (μάλλον προφανώς) αρνητικές σταθερές. Ζητούνται: (α:2) Η κατασκευή της σχετικής διαφορικής εξίσωσης για την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M . (β:6) Η αναγωγή της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε γραμμική με κατάλληλη νέα άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) $w = w(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A87 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Ευθύγραμμη Κίνηση με Αντίσταση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dw(t)}{dt} + \frac{2b}{m} w(t) = -\frac{2c}{m}$$

με τις ποσότητες m , b και c γνωστές σταθερές, ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t και εξαρτημένη μεταβλητή (άγνωστη συνάρτηση) την $w = w(t)$ ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:2) Η επίλυση της αντίστοιχης ομογενούς (με $c = 0$) διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως που οδηγεί τελικά στη χαρακτηριστική εξίσωση. (γ:1) Ο έλεγχος εάν ή όχι η πιο πάνω μη ομογενής διαφορική εξίσωση (με $c \neq 0$) είναι πλήρης (ή ακριβής) ή όχι. (δ:1) Ανάλογος έλεγχος μετά από πολλαπλασιασμό της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (με $c \neq 0$) επί τη συνάρτηση (πιθανό ολοκληρωτικό παράγοντα)

$$\mu(t) = e^{(2b/m)t}.$$

(ε:2) Η γενική λύση της αρχικής (με $c \neq 0$) διαφορικής εξίσωσης με βάση το προηγούμενο ερώτημα. (Ο σχετικός τελικός τύπος δε θεωρείται εδώ γνωστός!) (στ:1) Η λεπτομερής σύγκριση των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων (β) και (ε). Ποια είναι μια προφανής μερική λύση της αρχικής (με $c \neq 0$) διαφορικής εξίσωσης;

ΑΣΚΗΣΗ A88 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Ευθύγραμμη Κίνηση με Αντίσταση): Θεωρούμε την οριζόντια ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου μάζας m με αρχική ταχύτητα (για $t = 0$) ίση με $v_0 > 0$ (προς τα δεξιά) και υπό την επίδραση αντίστασης στην κίνηση

$$R(t) = -bv(t) - cv^4(t)$$

με τα b και c θετικές σταθερές. Άρα ουσιαστικά η δύναμη $R(t)$ είναι τελικά προς τα αριστερά. Ζητούνται: (α:1) Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου ως προς την ταχύτητά του $v(t)$. (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της (χωρίς επεξηγήσεις). (γ:2) Η αναγωγή της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση και (δ:2) η γενική λύση της τελευταίας. (ε:2) Από την τελευταία λύση η γενική λύση της αρχικής (της μη γραμμικής) διαφορικής εξίσωσης και τέλος (στ:2) η αντίστοιχη μερική λύση με αρχική συνθήκη τη $v(0) = v_0$ (την αρχική ταχύτητα).

ΑΣΚΗΣΗ A89 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Ευθύγραμμη Κίνηση με Αντίσταση): Θεωρούμε την ευθύγραμμη κίνηση ενός υλικού σημείου M μάζας m πάνω στον άξονα Ox προς τα δεξιά με ταχύτητα $v(t)$. Στην κίνηση αυτή υπάρχει αντίσταση

$$R(t) = -bv(t) - cv^\alpha(t)$$

με τα b , c και α θετικές σταθερές και μάλιστα με $\alpha > 1$. Ζητούνται: (α:1) Με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση ως προς την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου και να γίνουν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (β:1) Με κατάλληλη αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως (από $v(t)$ σε $z(t)$) και με χρήση νέων σταθερών $b^* = (1 - \alpha)b/m$ και ανάλογα c^* να μετατραπεί η αρχική μη γραμμική διαφορική εξίσωση σε γραμμική. (γ:2) Να βρεθεί η γενική λύση $z_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. (δ:2) Με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου να προσδιορισθεί και η γενική λύση $z_g(t)$ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. (ε:1) Να προσδιορισθούν η λύση $z_p(t)$ του σχετικού προβλήματος αρχικής τιμής με αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου $v(0) = v_0 > 0$ και τέλος (στ:1) η ταχύτητα $v_p(t)$ του υλικού σημείου που αντιστοιχεί στη λύση $z_p(t)$.

A6.3. Κατακόρυφη κίνηση με αντίσταση

ΑΣΚΗΣΗ A90 (Κεφάλαια A1, A3, A4, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Εδώ θεωρούμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$m\dot{v}(t) = -mg - cv(t) \quad \text{με} \quad v(0) = v_0 > 0.$$

Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα αναφέρεται; (β:1) Η λεπτομερής εύρεσή της. (γ:1) Οι πλήρεις χαρακτηρισμοί της (χωρίς όμως επεξηγήσεις). (δ:2) Η λύση του προβλήματος αυτού με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου. (ε:2) Με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα

$$\mu(t) = e^{ct/m}.$$

(στ:2) Τέλος με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης σε συνδυασμό με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. (ζ:1) Ο χρόνος t_h που απαιτείται, ώστε να συμβεί $v(t_h) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ A91 (Κεφάλαια A1, A3, A4, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Θεωρούμε το πρόβλημα της κατακόρυφης προς τα κάτω κινήσεως υλικού σημείου M μάζας m υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση g επίσης προς τα κάτω, προς τη γη) και αντίστασης $R(t)$ στην κίνηση ανάλογης του τετραγώνου $v^2(t)$ της ταχύτητας $v = v(t)$ με γνωστή θετική σταθερά αναλογίας c . Με τη φορά της ταχύτητας $v = v(t)$ του υλικού σημείου M να θεωρείται θετική προς τα πάνω ζητούνται: (α:1) Να εξηγηθεί λεπτομερώς γιατί ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$m\dot{v}(t) = -mg + cv^2(t),$$

ενώ δεν ισχύει η παρόμοια διαφορική εξίσωση

$$m\dot{v}(t) = -mg - cv^2(t).$$

(β:2) Να αποδειχθεί λεπτομερώς ο τύπος

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(γ:1) Να αποδειχθεί λεπτομερώς ο τύπος

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}.$$

(δ:3) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α) με αρχική συνθήκη τη $v(0) = 0$ (δηλαδή με έναρξη της κινήσεως από την ηρεμία) υποχρεωτικά με τη χρήση και των δύο βοηθητικών συμβόλων

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{c}} \quad \text{και} \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{m}{cg}}.$$

(ε:1) Τέλος να υπολογισθεί η ταχύτητα $v(t)$ για $t \rightarrow \infty$.

ΑΣΚΗΣΗ A92 (Κεφάλαια A1, A3, A4, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Σε πτώση υλικού σημείου M κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα Oy υπάρχει πέρα από τη γήινη βαρύτητα με επιτάχυνση g (προς τα κάτω) και αντίσταση του αέρα $F(t)$ στην ευθύγραμμη αυτή κίνηση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $v(t)$ της μορφής

$$R(t) = cv^2(t)$$

με το c θετική σταθερά και με θετική φορά προς τα πάνω. Η κίνηση έχει υποθεθεί προς τα κάτω. Άρα η αντίσταση του αέρα $R(t) > 0$ έχει διεύθυνση προς τα πάνω, ενώ το βάρος $W = -mg < 0$ προς τα κάτω προφανώς! Ζητούνται: (α:2) Η κατασκευή της σχετικής διαφορικής εξισώσεως για την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου με θετική φορά επίσης προς τα πάνω. (β:1) Τέσσερις χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (γ:5) Η μερική λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως με ξεκίνημα του υλικού σημείου M από την ηρεμία. Θεωρείται γνωστό το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) \quad \text{με} \quad a, b > 0.$$

(Φυσικά ο εκθέτης -1 δηλώνει εδώ απλά αντίστροφη συνάρτηση, ασφαλώς όχι ύψωση σε δύναμη.)

ΑΣΚΗΣΗ A93 (Κεφάλαιο A4, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται: (α:3) Η πιο πάνω μερική λύση σε λυμένη μορφή $v = v(t)$ ως προς την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M υποχρεωτικά με χρήση και των βοηθητικών συμβόλων

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg}{c}} \quad \text{με} \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{m}{cg}}$$

(χαρακτηριστικής ταχύτητας v_0 και χαρακτηριστικού χρόνου τ_0 αντίστοιχα) (β:3) Η οριακή ταχύτητα v_∞ (για $t \rightarrow \infty$) του υλικού σημείου M από την ίδια τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος. (γ:2) Η ίδια οριακή ταχύτητα v_∞ κατευθείαν μέσω της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ A94 (Κεφάλαια A1, A3, A4, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Εδώ θεωρούμε την προς τα πάνω κίνηση υλικού σημείου μάζας m στο γήινο πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση $-g$ (προς τα κάτω). Θετική κατεύθυνση επιλέγουμε την προς τα επάνω. Η αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου είναι v_0 (με $v_0 > 0$: προς τα πάνω). Στην κίνηση αυτή υπάρχει αντίσταση του αέρα $R(t)$ (προς τα κάτω: $R(t) < 0$) ανάλογη του τετραγώγου της ταχύτητας $v(t)$ με σταθερά αναλογίας $-c$ (με $c > 0$). Εδώ ζητούνται: (α:1) Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου με άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα $v(t)$. (β:1) Με χρήση και του γνωστού τύπου

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{με} \quad \tan^{-1} x \equiv \arctan x$$

η γενική λύση $t = t(v)$ αυτής της διαφορικής εξίσωσης. (γ:1) Με τη χρήση και της ταχύτητας

$$v_r = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

η ίδια γενική λύση τώρα στη λυμένη μορφή $v = v(t)$ χωρίς καμία τετραγωνική ρίζα. (δ:2) Η μερική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$. (ε:2) Ο χρόνος t_h για να φθάσει το υλικό σημείο το μέγιστο ύψος του πριν να αρχίσει η επιστροφή του στη γη. (στ:1) Ποια διαφορική εξίσωση θα ισχύει κατά την επιστροφή αυτή και γιατί; (χωρίς όμως την επίλυσή της).

ΑΣΚΗΣΗ A95 (Κεφάλαια A3, A4, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Στην κατακόρυφη προς τα πάνω κίνηση υλικού σημείου μάζας m με ταχύτητα $v(t)$ (με t το χρόνο) και με αντίσταση $R = cv^2(t)$ (με $c > 0$) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - cv^2 \quad \text{με} \quad v = v(t)$$

και με g την επιτάχυνση της βαρύτητας. Ζητούνται: (α:2) Με χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $a = \sqrt{c/(mg)}$ αντί για τη σταθερά c η γενική λύση της $v_g(t)$ σε λυμένη μορφή. Υπόδειξη: Είναι γνωστή η παράγωγος

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} at \equiv \frac{d}{dt} \arctan at = \frac{a}{1+a^2t^2}.$$

(β:2) Ανάλογα και η μερική λύση της $v_p(t)$ η οποία αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$ (με $v_0 > 0$) πάλι σε λυμένη μορφή. (γ:4) Ο χρόνος t_{cr} που απαιτείται για να φθάσει το υλικό σημείο στο ψηλότερο σημείο της ευθύγραμμης τροχιάς του.

ΑΣΚΗΣΗ A96 (Κεφάλαια A3, A20, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για το πρόβλημα αρχικής τιμής εκεί και με $c^* = c/m$ ζητούνται: (α:2) Με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard και με αρχική προσέγγιση της ταχύτητας $v(t)$ τη $v_1(t) = v_0$ η επόμενη προσέγγιση $v_2(t)$. (β:6) Τώρα με την επίσης προσεγγιστική μέθοδο της σειράς Taylor η σειρά Taylor–Maclaurin (με βάση το σημείο $t_0 = 0$) η αντίστοιχη προσέγγιση με όρους μέχρι και t^3 .

ΑΣΚΗΣΗ A97 (Κεφάλαια A1, A3, A4, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Θεωρούμε την κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου M μάζας m με αρχική ταχύτητα $v(0) = v_0$. Θετική φορά επιλέγεται η προς τα πάνω. Στην κίνηση αυτή ενεργεί η επιτάχυνση της βαρύτητας $-g$ (προς τα κάτω) καθώς και αντίσταση $R(t) = -bv(t)$ με το b γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Ο σχηματισμός της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με έλεγχο εάν αυτή ισχύει, όταν το υλικό σημείο κινείται είτε (i) προς τα πάνω ($v > 0$) είτε (ii) προς τα κάτω ($v < 0$). (β:1) Η μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης και της αρχικής συνθήκης σε ολοκληρωτική εξίσωση. (γ:1) Ο γενικός επαναληπτικός (ή αναδρομικός) τύπος για την προσεγγιστική επίλυση της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard. Στη συνέχεια με αρχική προσέγγιση τη $v_0(t) = 0$

η εύρεση των τριών επόμενων προσεγγίσεων ($\delta:1$) $v_1(t)$, ($\epsilon:1$) $v_2(t)$ και ($\sigma\tau:1$) $v_3(t)$. ($\zeta:1$) Η κλειστή λύση $v_p(t)$ του ίδιου προβλήματος αρχικής τιμής (τώρα χωρίς προσεγγίσεις!) με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως συν έναν προσδιοριστέο συντελεστή A . ($\eta:1$) Η προσέγγιση $\tilde{v}_p(t)$ της κλειστής αυτής λύσεως $v_p(t)$ από τη σειρά Maclaurin της με όρους μέχρι και t και η σύγκρισή της με την προσέγγιση $v_3(t)$ της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard.

ΑΣΚΗΣΗ A98 (Κεφάλαια A1, A3, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: ($\alpha:1$) Ο έλεγχος εάν ή όχι η σχετική διαφορική εξίσωση είναι πλήρης (ή ακριβής). ($\beta:2$) Εάν δεν είναι πλήρης, ο προσδιορισμός σχετικού ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(t)$. (Οι σχετικοί τύποι δε θεωρούνται γνωστοί!) Στη συνέχεια με τη χρήση του ολοκληρωτικού αυτού παράγοντα $\mu(t)$ ($\gamma:1$) η γενική λύση $v_g(t)$ της αρχικής διαφορικής εξίσωσης με την παρούσα μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(t)$ (ο τελικός τύπος δε θεωρείται γνωστός!) και ($\delta:1$) η λύση $v_p(t)$ του σχετικού προβλήματος αρχικής τιμής με $v(0) = v_0$. ($\epsilon:2$) Από τη λύση αυτή $v_p(t)$ η απαλοιφή των ποσοτήτων m , b , g και v_0 με το σχηματισμό σχετικής μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξεως. ($\sigma\tau:1$) Ο έλεγχος της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης ως προς την ορθότητά της μέσω της επαληθεύσεώς της από την ίδια τη λύση $v_p(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A99 (Κεφάλαια A2, A3, Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση με Αντίσταση): Θεωρούμε εδώ την προς τα πάνω κίνηση υλικού σημείου μάζας m (σε κατακόρυφη ευθεία) με ταχύτητα $v = v(t)$ (με t το χρόνο) υπό την επίδραση του βάρους του $W = mg$ (με g την επιτάχυνση της βαρύτητας) καθώς και αντιδράσεως τριβής από την ατμόσφαιρα της μορφής $R = k_1v + k_2v^2$ με τους συντελεστές $k_{1,2}$ γνωστούς θετικούς αριθμούς. Με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη Μηχανική προκύπτει τότε εύκολα η εξής διαφορική εξίσωση:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - k_1v - k_2v^2 \quad \text{με } v = v(t) \quad \text{και } t \geq 0.$$

Στη συγκεκριμένη άσκηση μόνο χάριν της απλοποίησης στους μαθηματικούς υπολογισμούς μας (και όχι για κάποιο συγκεκριμένο φυσικό λόγο) οι πιο πάνω σταθερές $k_{1,2}$ επιλέγονται σαν

$$k_1 = 2mgc \quad \text{και} \quad k_2 = mgc^2$$

με το c επίσης γνωστή θετική σταθερά. Τότε η πιο πάνω διαφορική εξίσωση απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + 2cv + c^2v^2) \quad \text{με } v = v(t) \quad \text{και } t \geq 0.$$

Εδώ ζητούνται: ($\alpha:3$) Η επίλυση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης μαζί με την αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$ με $v_0 > 0$ (πρόβλημα αρχικής τιμής) και με κίνηση προς τα πάνω. ($\beta:1$) Να επαληθευθεί η ισχύς της αρχικής συνθήκης που προαναφέρθηκε στη λύση που βρέθηκε. ($\gamma:2$) Ποια χρονική στιγμή $t = t_0$ μηδενίζεται η ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου; ($\delta:2$) Σε ποιο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ ισχύει η λύση η οποία βρέθηκε παραπάνω; ($\epsilon:2$) Τι ακριβώς θα μπορούσε να γίνει για χρονικές στιγμές t πέρα από το χρονικό αυτό διάστημα; (Δε ζητούνται όμως οι σχετικοί υπολογισμοί.)

A6.4. Κίνηση σε περιστρεφόμενο σωλήνα

ΑΣΚΗΣΗ A100 (Κεφάλαια A1, A5, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Μελετάμε τη θέση $u(t)$ (με t το χρόνο) υλικού σημείου M που κινείται μέσα σε λεπτό ευθύγραμμο σωλήνα που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 και έχει σταθερό (ακίνητο) το άκρο του $u = 0$. Δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη $p(t)$ που να ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M . Τότε για τη θέση αυτή $u(t)$ ισχύει η εξής διαφορική εξίσωση, όπου έχει ληφθεί υπόψη και η φυγόκεντρος δύναμη:

$$\ddot{u}(t) - \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με } t > 0.$$

Ζητούνται: ($\alpha:1$) Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. ($\beta:2$) Η γενική λύση της $u_g(t)$ σε εκθετική μορφή. ($\gamma:2$) Η μετατροπή της προηγούμενης γενικής λύσεως σε υπερβολική μορφή.

(δ:3) Η μερική λύση που αντιστοιχεί στις δύο αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0$$

(αρχική θέση και αρχική ταχύτητα αντίστοιχα) επίσης σε υπερβολική μορφή. (ε:3) Η επαλήθευση της μερικής λύσεως που βρέθηκε. (στ:2) Υποχρεωτικά με τη χρήση ορίζουσας Wronski η απόδειξη ότι οι θεμελιώδεις λύσεις που προέκυψαν στη γενική λύση (στην εκθετική της μορφή) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (ζ:3) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα και για την υπερβολική μορφή της γενικής λύσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A101 (Κεφάλαια A1, A5, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Θεωρούμε την κίνηση υλικού σημείου μάζας m μέσα σε ευθύγραμμο σωλήνα που περιστρέφεται γύρω από το ένα σταθερό άκρο του $u = 0$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Άγνωστη είναι η θέση $u(t)$ του σημείου (με t το χρόνο). Υπάρχει επίσης και αντίσταση $cv(t)$ ανάλογη της ταχύτητας $v(t) = \dot{u}(t)$ του σημείου. Ζητούνται: (α:1) Να βρεθεί η σχετική διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) - \omega_0^2u(t) = \frac{p(t)}{m}$$

με το ξ κατάλληλη θετική σταθερά και $p(t)$ τη φόρτιση (εξωτερική δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. (β:2) Με τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $a = \sqrt{1 + \xi^2}\omega_0$ να βρεθεί η γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως (με $p(t) = 0$) σε εκθετική μορφή και τελικά (γ:2) στη συνηθισμένη και κάπως απλοποιημένη εκθετική-υπερβολική μορφή. (δ:1) Ποια μορφή $u_{h0}(t)$ παίρνει η λύση αυτή $u_h(t)$ για $\xi = 0$ σε υπερβολική μορφή; (ε:2) Τέλος με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των δύο υπερβολικών λύσεων που συνιστούν το σχετικό θεμελιώδες σύνολο (ή θεμελιώδες σύστημα) λύσεων στη λύση $u_{h0}(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A102 (Κεφάλαιο A5, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση με $\xi = 0$ και φόρτιση

$$p(t) = p_0 \cosh \omega_0 t.$$

Ζητούνται: (α:4) Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών η γενική λύση $u_g(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. (β:4) Η μερική λύση $u_p(t)$ με αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$.

ΑΣΚΗΣΗ A103 (Κεφάλαια A10, A11, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις και εδώ με $\xi = 0$. Ζητούνται: (α:2) Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$) και (β:2) η σχετική ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$). (γ:2) Με χρήση τους η απόκριση $u(t)$ σε αυθαίρετη (αλλά τμηματικά συνεχή) φόρτιση $p(t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες: $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ και (δ:2) η εμπειρική (γραφική) πλήρης δικαιολόγηση του σχετικού τύπου.

ΑΣΚΗΣΗ A104 (Κεφάλαια A17, A19, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις και εδώ ξανά με $\xi = 0$. Για αυθαίρετη περιοδική φόρτιση $p(t)$ με περίοδο T και με γνωστή τη σχετική μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier ζητείται (α:7) η αντίστοιχη (πάλι μιγαδική ή εκθετική) σειρά Fourier της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$ που αφορά απλά σε μια μερική λύση (με τη φόρτιση $p(t)$) της παρούσας διαφορικής εξισώσεως. (β:1) Υπάρχει ή όχι κάποια υπολογιστική συσχέτιση μεταξύ του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (του DFT) και της μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier και ποια ακριβώς;

ΑΣΚΗΣΗ A105 (Κεφάλαια A18, A19, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Συνεχίζουμε τις τέσσερις προηγούμενες ασκήσεις και εδώ με $\xi = 0$. Για αυθαίρετη αλλά εδώ μη περιοδική φόρτιση $p(t)$ και με γνωστό το σχετικό μετασχηματισμό Fourier $P(\omega)$ ζητούνται με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier: (α:3) Ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (β:2) Η σχετική μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας ω (που εδώ όμως δεν αποκλείεται να είναι και πραγματική!). (γ:3) Με γνωστή την ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$ (με $g(t) = 0$ για $t \leq 0$) η απόκριση $u(t)$ στην πιο απλή μορφή της.

ΑΣΚΗΣΗ A106 (Κεφάλαια A1, A5, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Θεωρούμε την εξής διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη θέση $u = u(t)$:

$$\ddot{u}(t) - \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με} \quad t \geq 0,$$

με το ω_0 γνωστή θετική σταθερά. Η διαφορική αυτή εξίσωση παρουσιάζεται κατά την κίνηση ενός υλικού σημείου M μάζας m μέσα σε ευθύγραμμο σωλήνα που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άκρο του $u = 0$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Ουσιαστικά η κίνηση αυτή οφείλεται στη φυγόκεντρο δύναμη $m\omega_0^2 u(t)$ που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξισώσεως: είδος, τάξη, βαθμός, τύπος, κλπ. (β:1) Η απόδειξη των τύπων για τις πρώτες παραγώγους ως προς t των συναρτήσεων $\cosh \omega_0 t$ και $\sinh \omega_0 t$ με το ω_0 σταθερά. (Η παράγωγος της εκθετικής συναρτήσεως θεωρείται γνωστή!) (γ:2) Η επαλήθευση ότι η συνάρτηση

$$u_g(t) = C_1 \cosh \omega_0 t + C_2 \sinh \omega_0 t$$

με τα C_1 και C_2 δύο αυθαίρετες σταθερές είναι λύση της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως. (δ:1) Η απόδειξη του τύπου

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

(ε:3) Η απόδειξη ότι η παραπάνω λύση $u_g(t)$ μπορεί να αποτελέσει λύση οποιουδήποτε προβλήματος αρχικών τιμών που αποτελείται από την πιο πάνω διαφορική εξίσωση και τις δύο αρχικές συνθήκες $u(t_0) = u_0$ και $\dot{u}(t_0) = v_0$ την αρχική χρονική στιγμή t_0 με τα u_0 και v_0 γνωστές σταθερές. Αρκεί βέβαια να γίνει κατάλληλος καθορισμός των δύο σταθερών C_1 και C_2 . Άρα η λύση $u_g(t)$ είναι η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως $\ddot{u}(t) - \omega_0^2 u(t) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ A107 (Κεφάλαιο A5, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Σε κίνηση υλικού σημείου μάζας m στερεωμένου στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k μέσα σε περιστρεφόμενο σωλήνα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \omega_0^2 u = \frac{\rho_0}{m} t e^{-\omega_0 t} \quad \text{με} \quad u = u(t)$$

τη θέση του υλικού σημείου, t το χρόνο και ρ_0 σταθερά σχετική με την εξωτερική φόρτιση που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Ζητούνται: (α:4) Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών μια μερική λύση $u_p(t)$ αυτής της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. (β:4) Η επαλήθευσή της.

ΑΣΚΗΣΗ A108 (Κεφάλαια A1, A5, A10, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Εδώ θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται μέσα σε έναν ευθύγραμμο σωλήνα. Ο σωλήνας περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο Oxy με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Πάνω στο υλικό σημείο ασκείται μια αυθαίρετη εξωτερική δύναμη $p(t)$. Οι αρχικές συνθήκες για τη θέση $r(t)$ του υλικού σημείου (με t το χρόνο) είναι $r(0) = r_0$ και $\dot{r}(0) = v_0$. Ισχύει η ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως:

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} - \omega_0^2 r(t) = \frac{p(t)}{m}.$$

Ζητούνται: (α:1) Ο σχηματισμός της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (β:1) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως με τη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια ζητείται η επίλυση και της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως με δύο διαφορετικούς τρόπους: (γ:3) με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων και (δ:3) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ A109 (Κεφάλαια A1, A5, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Για τη θέση $u(t)$ (με t το χρόνο) υλικού σημείου M (μάζας m) που κινείται μέσα σε περιστρεφόμενο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 λεπτό ευθύγραμμο σωλήνα με σταθερό τό άκρο του $u = 0$ ισχύει η εξής διαφορική εξίσωση της κινήσεως, όπου έχει ληφθεί υπόψη και η φυγόκεντρος δύναμη $m\omega^2 u(t)$:

$$\ddot{u}(t) - \omega_0^2 u(t) = p(t) \quad \text{με} \quad t > 0.$$

Η συνάρτηση $p(t)$ στο δεξιό μέλος θεωρείται τμηματικά συνεχής συνάρτηση και δηλώνει την ανηγμένη (στη μάζα m) εξωτερική δύναμη $p_0(t)$. Ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:1) Η γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης σε εκθετική μορφή. (γ:1) Η μετατροπή της προηγούμενης γενικής λύσεως της ομογενούς εξίσωσης σε υπερβολική μορφή. (δ:5) Μια μερική λύση $u_p(t)$ της μη ομογενούς (της πλήρους) διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων λαμβάνοντας μάλιστα υπόψη και τις δύο αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ (αρχική θέση και αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου M αντίστοιχα) και επίσης σε υπερβολική μορφή.

ΑΣΚΗΣΗ A110 (Κεφάλαια A10, A11, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης (α:7) Η μερική λύση $u_p(t)$ του ερωτήματος (δ) εκεί, τώρα όμως υποχρεωτικά από την αρχική, τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση κινήσεως του υλικού σημείου M με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και μάλιστα στην απλούστερη δυνατή μορφή της και πάλι με τη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων. (β:1) Συμφωνεί το αποτέλεσμα αυτό με το αντίστοιχο της προηγούμενης ασκήσεως;

ΑΣΚΗΣΗ A111 (Κεφάλαια A1, A5, Δυναμική: Κίνηση σε Περιστρεφόμενο Σωλήνα): Θεωρούμε το πρόβλημα της κινήσεως υλικού σημείου μάζας m μέσα σε σωλήνα ο οποίος περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άκρο του O (με $u = 0$) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 και με φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$. Ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί η ισχύς της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης για τη θέση $u(t)$ του υλικού σημείου μέσα στο σωλήνα:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} - \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m}.$$

(β:1) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης να υπολογισθεί η γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης τελικά σε υπερβολική μορφή. (γ:1) Με τη χρήση ορίζουσας να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των σχετικών υπερβολικών συναρτήσεων. (δ:1) Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών να υπολογισθεί μια μερική λύση $u_p(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης για φόρτιση

$$p(t) = p_0 \sinh \omega t \quad \text{με} \quad \omega \neq \omega_0.$$

(ε:2) Το ίδιο για $\omega = \omega_0$ με (στ:2) επαλήθευση της λύσεως.

Και τώρα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Ζητούνται επιπλέον: (στ:1) Η σχετική συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$). (ζ:1) Η αντίστοιχη ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$) και με βάση αυτήν (η:2) η απόκριση του συστήματος $u_p(t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες σε αυθαίρετη (οποιαδήποτε, όχι συγκεκριμένη) φόρτιση $p(t)$ με μαθηματικό τρόπο και (θ:2) με πρακτικό τρόπο με βάση τη γραφική παράσταση της φορτίσεως. (ι:2) Τέλος χωρίς πια χρήση της $g(t)$ η αντίστοιχη απόκριση $u_q(t)$, τώρα όμως με γενικές αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$.

A6.5. Περιστροφή κυκλικού δίσκου

ΑΣΚΗΣΗ A112 (Κεφάλαια A1, A5, Δυναμική: Περιστροφή Κυκλικού Δίσκου): Σε πρόβλημα περιστρεφόμενου κυκλικού δίσκου γύρω από το κέντρο του O με κυκλική συχνότητα ω_0 και υπό συνθήκες συμμετρίας προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$r^2 u''(r) + ru'(r) - u(r) = -K\omega_0^2 r^3$$

με r την πολική ακτίνα, $u = u(r)$ την άγνωστη μετατόπιση κατά την ακτίνα r και K γνωστή σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες του ελαστικού υλικού του δίσκου. Ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:4) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς. (γ:1) Μια μερική λύση της μη ομογενούς της μορφής Ar^3 . (δ:2) Η γενική λύση της μη ομογενούς.

A7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

A7.1. Ταλαντώσεις μονοβάθμιων μηχανικών συστημάτων

ΑΣΚΗΣΗ A113 (Κεφάλαιο A1, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ισχυρή Απόσβεση): Θεωρούμε εδώ τη διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή παρουσιάζεται στις ελεύθερες ταλαντώσεις και στις ιδιοταλαντώσεις μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα. Ο λόγος αποσβέσεως ξ και η κυκλική συχνότητα ω_0 του χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος θεωρούνται γνωστές θετικές σταθερές. Στην άσκηση αυτή υποθέτουμε επιπλέον ισχυρή (ή υπερκρίσιμη) απόσβεση με $\xi > 1$. Ζητούνται: (α:1) Οι χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως: είδος, τάξη, βαθμός, τύπος, κλπ. (β:1) Οι συνηθισμένοι ορισμοί των συναρτήσεων $\cosh x$ και $\sinh x$. (γ:6) Να επαληθευθεί πλήρως ότι η συνάρτηση

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left[C_1 \cosh(\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}t) + C_2 \sinh(\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}t) \right]$$

(με τα C_1 και C_2 αυθαίρετες σταθερές) αποτελεί λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A114 (Κεφάλαια A5, A6, Ελεύθερες και Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (χωρίς απόσβεση) μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου M (μάζας m) και ελατηρίου E (σταθεράς k). Η φόρτιση (εξωτερική δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M είναι $p(t)$. Ζητούνται: (α:3) Με τη μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως και με γνωστή μια μερική λύση $u_1(t) = \cos \omega_0 t$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$) να υποβιβασθεί η τάξη της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως από δεύτερη σε πρώτη. (β:3) Τώρα υποθέτοντας για απλούστευση των υπολογισμών απλά ελεύθερες ταλαντώσεις (με $p(t) = 0$), να υπολογισθεί και μια δεύτερη μερική λύση $u_2(t)$ της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως που αντιστοιχεί στην αρχική διαφορική εξίσωση. (γ:1) Με τη χρήση ορίζουσας να αποδειχθεί ότι οι δύο λύσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (δ:1) Να γραφεί τέλος η γενική λύση $u_h(t)$ της ίδιας ομογενούς διαφορικής εξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A115 (Κεφάλαια A5, A6, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Για την τόσο γνωστή ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = 0 \quad \text{με} \quad 0 < \xi < 1 \quad (\text{ασθενής ή υποκρίσιμη απόσβεση})$$

ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού απαντάται; (β:1) Να βρεθεί η γενική λύση της $u_g(t)$ σε καθαρά εκθετική μορφή με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}.$$

(γ:2) Να μετατραπεί η γενική αυτή λύση $u_g(t)$ στη συνηθισμένη πραγματική εκθετική-τριγωνομετρική μορφή της $u_{gr}(t)$ που χρησιμοποιεί συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός. (δ:2) Στη συνέχεια να υπολογισθεί η μερική λύση $u_p(t)$ που επαληθεύει επιπλέον και τις δύο αρχικές συνθήκες (για $t = 0$)

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0.$$

(ε:2) Με χρήση κατάλληλης ορίζουσας να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των δύο συναρτήσεων που υπεισέρχονται στην πιο πάνω πραγματική εκθετική-τριγωνομετρική γενική λύση $u_{gr}(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A116 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ισχυρή Απόσβεση): Εδώ θεωρούμε το πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων ενός μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c υπό *ισχυρή (ή υπερκρίσιμη) απόσβεση*: λόγος αποσβέσεως $\xi > 1$. Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της σχετικής διαφορικής

εξίσωσης για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του με t το χρόνο. (β:1) Η μετατροπή της στη συνηθισμένη για τον Πολιτικό Μηχανικό μορφή, τώρα με τη χρήση της ιδιοσυχνότητας ω_0 του χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος και του λόγου αποσβέσεως ξ (επαναλαμβάνεται με $\xi > 1$). (γ:2) Η γενική λύση $u_{g1}(t)$ της διαφορικής αυτής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης και σε καθαρά εκθετική μορφή με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $a_D = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$. (δ:2) Η μετατροπή της ίδιας λύσεως στη συνηθισμένη για τον Πολιτικό Μηχανικό εκθετική-υπερβολική μορφή της $u_{g2}(t)$. (ε:2) Η εύρεση της σχετικής μερικής (ειδικής) λύσεως $u_p(t)$ τώρα με γνωστές αρχικές συνθήκες: $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$.

ΑΣΚΗΣΗ A117 (Κεφάλαια A10, A11, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ισχυρή Απόσβεση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται: (α:1) Με γνωστό το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής συναρτήσεως $e^{\alpha t}$ (με το α σταθερά) η εύρεση των μετασχηματισμών Laplace των δύο υπερβολικών συναρτήσεων $\cosh \alpha t$ (υπερβολικό συνημίτονο) και $\sinh \alpha t$ (υπερβολικό ημίτονο). (β:1) Με γνωστό το μετασχηματισμό Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace $\mathcal{L}\{e^{-\beta t} u(t)\}$ (με το β σταθερά). (γ:1) Η εύρεση των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων

$$\frac{1}{(s + \xi\omega_0)^2 - a_D^2} \quad \text{και} \quad \frac{s + \xi\omega_0}{(s + \xi\omega_0)^2 - a_D^2}$$

με τις ποσότητες ξ , ω_0 και a_D θετικές σταθερές. (δ:5) Η εύρεση της μερικής λύσεως (ή ειδικής λύσεως) $u_p(t)$ του τελευταίου ερωτήματος (ε) της προηγούμενης ασκήσεως, τώρα όμως με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ A118 (Κεφάλαια A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ισχυρή Απόσβεση): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, αλλά τώρα σε εξαναγκασμένες (όχι πια ελεύθερες) ταλαντώσεις με ισχυρή απόσβεση με γνωστή αυθαίρετη φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$ πάνω στο υλικό σημείο. Ζητούνται: (α:2) Ο μετασχηματισμός Laplace $U(s)$ της μετατόπισης $u(t)$ του υλικού σημείου ξανά υπό αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. (β:4) Η λύση $u(t)$ του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών. (γ:1) Η αντίστοιχη λύση $u_0(t)$ υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες. (δ:1) Τι γνωρίζετε λεπτομερώς για τον ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel στις Ταλαντώσεις με $t \geq 0$;

ΑΣΚΗΣΗ A119 (Κεφάλαια A5, A6, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Θεωρούμε το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c με την υπόθεση ασθενούς (ή υποκρίσιμης) αποσβέσεως, δηλαδή με $0 < c < 2\sqrt{km}$ ή ισοδύναμα με $0 < \xi < 1$ με ξ το λόγο αποσβέσεως με διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = p(t) \quad \text{με} \quad t \geq 0, \quad (1)$$

με t το χρόνο, $u = u(t)$ την άγνωστη συνάρτηση (τη μετατόπιση του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του) και $p(t)$ την εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο στην παρούσα εξαναγκασμένη ταλάντωση. Χρησιμοποιούμε και τη σταθερά ω_0 (την ιδιοσυχνότητα ή φυσική κυκλική συχνότητα του παρόντος μηχανικού συστήματος χωρίς όμως τον αποσβεστήρα) καθώς και το λόγο αποσβέσεως των ταλαντώσεων ξ με

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} \quad \text{με} \quad 0 < \xi < 1$$

για ασθενή (υποκρίσιμη) απόσβεση. Μπορούμε έτσι άμεσα (διαιρώντας με τη μάζα m) να φέρουμε την πιο πάνω διαφορική εξίσωση στην τόσο κλασική για τον Πολιτικό Μηχανικό μορφή της

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad t \geq 0.$$

Στην περίπτωση μη υπάρξεως εξωτερικής δυνάμεως $p(t)$, δηλαδή με $p(t) = 0$ (ελεύθερη ταλάντωση και επομένως ομογενής διαφορική εξίσωση), και υπό γνωστές αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ ζητούνται: (α:4) Η γενική λύση της πιο πάνω ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (δηλαδή

με $p(t) = 0$ υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και σε πραγματική τελικά μορφή και μάλιστα με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου (ιδιοσυχνότητας με απόσβεση)

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

στη γενική αυτή λύση. (β:4) Η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών: ομογενής διαφορική εξίσωση (με $p(t) = 0$) συν τις δύο αρχικές συνθήκες που προαναφέρθηκαν.

ΑΣΚΗΣΗ A120 (Κεφάλαια A5, A6, Ελεύθερες και Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επιπλέον: (α:4) Η διαπίστωση (υποχρεωτικά με τη χρήση και τον υπολογισμό κατάλληλης ορίζουσας) ότι οι δύο μερικές λύσεις $u_{h1}(t)$ και $u_{h2}(t)$ της γενικής λύσεως του ερωτήματος (α) της προηγούμενης ασκήσεως (θεμελιώδεις λύσεις) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (β:4) Η εύρεση μιας μερικής λύσεως $u_p(t)$ της μη ομογενούς πια διαφορικής εξισώσεως της προηγούμενης ασκήσεως στην ειδική περίπτωση όπου η εξωτερική δύναμη που επιβάλλεται είναι της μορφής $p(t) = p_0 e^{-at}$ (με τα p_0 και a γνωστές σταθερές, το a μάλιστα θετική σταθερά). Η εύρεση αυτή να γίνει υποχρεωτικά με την εφαρμογή της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών στην κατάλληλη ειδική περίπτωση της.

ΑΣΚΗΣΗ A121 (Κεφάλαια A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. (α:7) Ζητείται τώρα η εύρεση της μερικής λύσεως $u_p(t)$ του ερωτήματος (β) της προηγούμενης ασκήσεως στην ειδική περίπτωση ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση (με $c = 0$, οπότε και $\xi = 0$) και για την ίδια ακριβώς εξωτερική δύναμη $p(t) = p_0 e^{-at}$, τώρα όμως υποχρεωτικά με την εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων. (Οι σχετικοί τελικοί τύποι δε θεωρούνται γνωστοί.) (β:1) Συμφωνούν τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β) της προηγούμενης ασκήσεως (αλλά τώρα με $\xi = 0$) και της παρούσας ασκήσεως; **Σημείωση:** Τα δύο παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα

$$\int e^{-at} \cos bt \, dt = \frac{e^{-at} (b \sin bt - a \cos bt)}{b^2 + a^2},$$

$$\int e^{-at} \sin bt \, dt = -\frac{e^{-at} (a \sin bt + b \cos bt)}{b^2 + a^2}$$

βρέθηκαν εύκολα και θεωρούνται σωστά και γνωστά στην παρούσα άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ A122 (Κεφάλαια A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση, Ωστική Απόκριση): Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις. Υποχρεωτικά με χρήση του μετασχηματισμού Laplace ζητούνται τώρα: (α:4) Η λύση της διαφορικής εξισώσεως (1) υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες (με $u(0) = 0$ και $\dot{u}(0) = 0$) και υπό τυχαία (όχι συγκεκριμένη) επιβαλλόμενη δύναμη $p(t)$ (με $t \geq 0$), που θεωρείται τμηματικά συνεχής συνάρτηση, υπό τη μορφή κατάλληλου ολοκληρωτικού τύπου. Πώς καλείται ο τύπος αυτός στις Ταλαντώσεις; Ποια είναι η πρακτική χρησιμότητά του για τον Πολιτικό Μηχανικό; (β:2) Ποια είναι η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$) του ίδιου μηχανικού συστήματος; (γ:2) Η σχετική ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$); (δ:2) Πρακτικά πώς ακριβώς οδηγούμαστε με φυσικό τρόπο από την ωστική απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$) στον ολοκληρωτικό τύπο του ερωτήματος (α) της παρούσας ασκήσεως;

ΑΣΚΗΣΗ A123 (Κεφάλαιο A20, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Συνεχίζουμε τις τέσσερις προηγούμενες ασκήσεις. Ζητείται τώρα η επίλυση του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών σε ελεύθερες ταλαντώσεις: ομογενής διαφορική εξίσωση, $p(t) = 0$, συν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή του προβλήματος

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = 0 \quad \text{με } t \geq 0, \quad u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0$$

υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου της σειράς Taylor (όχι της μεθόδου των συνήθων δυναμοσειρών), πιο συγκεκριμένα (α:4) Ποια είναι η σχετική σειρά Taylor στο σημείο $t_0 = 0$ (ή Taylor-Maclaurin

για $t_0 = 0$) με τους τέσσερις πρώτους όρους της (δηλαδή μέχρι και t^3) στο παρόν πρόβλημα; (β:4) Με ποιον ακριβώς αναδρομικό (ή επαναληπτικό) τύπο μπορούμε να προσδιορίσουμε την παράγωγο τάξεως n , $u^{(n)}(0)$ (τη χρονική στιγμή $t = 0$), που χρειάζεται στην σειρά Taylor που κατασκευάζουμε με τη βοήθεια των δύο παραγώγων (επίσης για $t = 0$) των αμέσως μικρότερων τάξεων, συγκεκριμένα των παραγώγων τάξεων $n - 1$ και $n - 2$;

ΑΣΚΗΣΗ A124 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Σε πρόβλημα ελεύθερων ταλαντώσεων υλικού σημείου M με ιξώδη απόσβεση (σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα) παρουσιάζεται η γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = 0 \quad \text{με } t > 0,$$

με t το χρόνο, άγνωστη συνάρτηση $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου M από τη θέση ισορροπίας του, ξ το λόγο αποσβέσεως των ταλαντώσεων και ω_0 την ιδιοσυχνότητα (ή φυσική κυκλική συχνότητα) του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος. Οι δύο σταθερές ξ και ω_0 είναι γνωστές και θετικές, αλλ' εδώ γίνεται και η υπόθεση ότι $0 < \xi < 1$. Ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως. (β:4) Η γενική λύση της σε μιγαδική εκθετική μορφή υποχρεωτικά με τη χρήση και του νέου, βοηθητικού συμβόλου $\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$. (γ:3) Η μετατροπή της προηγούμενης γενικής λύσεως σε πραγματική μορφή με την ταυτόχρονη χρήση της εκθετικής συναρτήσεως και τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ A125 (Κεφάλαιο A5, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται: (α:3) Η μερική λύση που αντιστοιχεί στις δύο αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0$$

(αρχική θέση u_0 και ταχύτητα v_0 αντίστοιχα) υποχρεωτικά σε πραγματική μορφή. (β:5) Υποχρεωτικά με τη χρήση ορίζουσας Wronski η απόδειξη ότι οι θεμελιώδεις λύσεις που προέκυψαν στην πραγματική (την τελική) μορφή της γενικής λύσεως, ερώτημα (γ) της προηγούμενης ασκήσεως, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ΑΣΚΗΣΗ A126 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Στην άσκηση αυτή καθώς και στις επόμενες τέσσερις ασκήσεις θεωρούμε το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M μάζας m , ελατηρίου S σταθεράς k και αποσβεστήρα D σταθεράς c . Στο σύστημα αυτό ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (2)$$

με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του. Η γνωστή συνάρτηση $p(t)$ παριστάνει την εξωτερική φόρτιση (δύναμη). Επίσης τα σύμβολα ξ και ω_0 δηλώνουν κατάλληλες σταθερές, εδώ με $0 < \xi < 1$. Δηλαδή έχουμε ασθενή ή υποκρίσιμη απόσβεση. Ζητούνται: (α:1) Επτά χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (β:1) Με βάση το σχετικό σχήμα να αποδειχθεί η διαφορική αυτή εξίσωση. Πώς καλούνται οι σταθερές ξ και ω_0 ; (γ:2) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως να βρεθεί η γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (με $p(t) = 0$: ελεύθερες ταλαντώσεις) σε εκθετική μορφή υποχρεωτικά με τη χρήση και της βοηθητικής κυκλικής συχνότητας

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3)$$

(δ:2) Να γίνει λεπτομερής μετατροπή της λύσεως αυτής στην αντίστοιχη εκθετική-τριγωνομετρική μορφή της. (ε:2) Τέλος να βρεθεί και η μερική λύση $u_p(t)$ (πάλι σε ελεύθερες ταλαντώσεις) που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ ξανά σε εκθετική-τριγωνομετρική μορφή.

ΑΣΚΗΣΗ A127 (Κεφάλαια A10, A11, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Θεωρούμε ξανά ελεύθερες ταλαντώσεις, δηλαδή ότι $p(t) = 0$,

και τις ίδιες μη μηδενικές αρχικές συνθήκες: $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. Ζητούνται: (α:2) Ο μετασχηματισμός Laplace $U_p(s)$ της σχετικής μερικής (ή ειδικής) λύσεως $u_p(t)$ (και πάλι με τη χρήση της βοηθητικής κυκλικής συχνότητας ω_D) και στη συνέχεια (β:3) Η ίδια η λύση $u_p(t)$ με τη χρήση και της γνωστής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού επί εκθετική συνάρτηση στο μετασχηματισμό Laplace

$$U(s+a) = \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}, \quad \text{εάν} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

του μετασχηματισμού Laplace. (γ:3) Να γίνει τέλος και η πλήρης επαλήθευση της λύσεως αυτής.

ΑΣΚΗΣΗ A128 (Κεφάλαιο A5, Ελεύθερες και Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση και χωρίς Απόσβεση): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται επίσης: (α:2) Με χρήση κατάλληλης οριζουσας να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων

$$u_1(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \cos \omega_D t \quad \text{και} \quad u_2(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t.$$

(β:2) Να εξηγηθεί λεπτομερώς (με την αναγραφή και των σχετικών εξισώσεων) που ακριβώς έγκειται η χρησιμότητα της γραμμικής αυτής ανεξαρτησίας κατά την επίλυση της προπροηγούμενης ασκήσεως. (γ:4) Να γίνει υποβιβασμός της τάξεως της γενικής διαφορικής εξίσωσης (2), ως την επαναλάβουμε

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m}$$

για γενική φόρτιση $p(t)$, αλλά ειδικά στο ερώτημα αυτό χωρίς απόσβεση (με $\xi = 0$), από δεύτερης τάξεως σε πρώτης. Όμως να μη λυθεί η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που προκύπτει.

ΑΣΚΗΣΗ A129 (Κεφάλαια A5, A6, Ελεύθερες και Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις, αλλά ειδικά στην παρούσα άσκηση για κρίσιμη απόσβεση των ταλαντώσεων: για $\xi = 1$. Χωρίς τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση $u_h(t)$ της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στην αρχική διαφορική εξίσωση (2), αλλ' εδώ με $\xi = 1$. (β:3) Η γενική λύση $u_g(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2) (εδώ συνεχώς με $\xi = 1$: κρίσιμη απόσβεση) τώρα στην πολύ ειδική περίπτωση φορτίσεως

$$p(t) = p_0 e^{-\omega_0 t}.$$

με το p_0 γνωστή σταθερά. (γ:3) Η λεπτομερής επαλήθευση της γενικής αυτής λύσεως $u_g(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A130 (Κεφάλαια A10, A11, Ελεύθερες και Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση, Οπτική Απόκριση): Συνεχίζουμε τις τέσσερις προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται: (α:2) Στο μετασχηματισμό Laplace να αποδειχθεί τώρα η γνωστή ιδιότητα του πολλαπλασιασμού επί εκθετική συνάρτηση

$$U(s+a) = \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}, \quad \text{εάν} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\},$$

που ήδη αναφέρθηκε και πιο πάνω. (β:1) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace $G(s)$ (ή $H(s)$) της μερικής λύσεως $g(t)$ (ή $h(t)$) της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης (2) υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες (τη χρονική στιγμή $t = 0$) και υπό ωστική (ή κρουστική) φόρτιση $p(t) = \delta(t)$ πάλι υποχρεωτικά με τη χρήση και της βοηθητικής κυκλικής συχνότητας

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

καθώς και (γ:2) Η ίδια η λύση $h(t)$. (δ:1) Πώς καλείται η λύση αυτή; (ε:2) Τέλος με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα να βρεθεί η λύση $u(t)$ της ίδιας διαφορικής εξίσωσης (2) υπό αυθαίρετη, αλλά τμηματικά συνεχή φόρτιση $p(t)$ και πάλι υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ A131 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Σε ένα πρόβλημα ελεύθερων ταλαντώσεων ενός μονοβάθμιου τριπαραμετρικού μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με κρίσιμη απόσβεση, $\xi = 1$, προκύπτει η εξής διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου:

$$u(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t}$$

με το ω_0 γνωστή σταθερά και τα C_1 και C_2 δύο αυθαίρετες σταθερές. Ζητούνται: (α:2) Με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας η εξακρίβωση ότι οι δύο συναρτήσεις $e^{-\omega_0 t}$ και $te^{-\omega_0 t}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (β:5) Υποχρεωτικά με τη χρήση κι άλλης κατάλληλης ορίζουσας (εδώ τρίτης τάξεως) η απαλοιφή των δύο σταθερών C_1 και C_2 (όχι όμως και της γνωστής σταθεράς ω_0 !) από την παραπάνω οικογένεια συναρτήσεων και η εύρεση (ο σχηματισμός, η μόρφωση, η κατασκευή) της σχετικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως και (γ:1) οι χαρακτηρισμοί της (χωρίς όμως επεξηγήσεις). (δ:2) Αντίστροφα τώρα (και σαν επαλήθευση) η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και η εύρεση της παραπάνω γενικής λύσεώς της.

ΑΣΚΗΣΗ A132 (Κεφάλαια A1, A6, A16, A17, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση):

Θεωρούμε το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας m και ελατηρίου σταθεράς k (χωρίς απόσβεση: με $c = 0$) με γνωστή βέβαια κυκλική ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό περιοδική φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$ περιόδου $T = 2\pi/\omega_1$ η οποία ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Η φόρτιση αυτή $p(t)$ υποτίθεται εδώ ότι είναι άρτια (όχι τυχαία!) περιοδική συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Χωρίς απόδειξη οι τύποι για την τριγωνομετρική σειρά Fourier της φορτίσεως $p(t)$ καθώς και για τους συντελεστές της. (β:1) Με απόδειξη η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου. (γ:4) Μια λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης υποχρεωτικά σε μορφή σειράς Fourier (χωρίς συντονισμό!). Ποιος τύπος δίνει τους συντελεστές της; (δ:2) Υπάρχει περίπτωση να παρουσιασθεί συντονισμός; Πότε;

ΑΣΚΗΣΗ A133 (Κεφάλαια A6, A18, A19, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση):

Στις εξαναγκασμένες χωρίς απόσβεση ταλαντώσεις με διαφορική εξίσωση τη γνωστή εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad p(t) \neq 0$$

Ζητούνται τώρα στο άπειρο χρονικό διάστημα $-\infty < t < \infty$: (α:2) Ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (Ο μετασχηματισμός Fourier $P(\omega)$ της γνωστής συναρτήσεως $p(t)$ θεωρείται και αυτός, όπως και η συνάρτηση $p(t)$, γνωστός.) (β:1) Χωρίς απόδειξη υπό ποιες ακριβώς συνθήκες για $t \rightarrow \pm\infty$ ισχύει το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος; (γ:2) Η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως (εννοείται στο πεδίο της συχνότητας ω) για το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα που εξετάζεται υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier. (δ:3) Η ίδια ακριβώς συνάρτηση αποκρίσεως, τώρα όμως υποχρεωτικά χωρίς καθόλου τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier.

ΑΣΚΗΣΗ A134 (Κεφάλαια A6, A16, A17, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση):

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Στις ίδιες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με τη γνωστή ανηγμένη συνάρτηση φορτίσεως $p(t)$ να θεωρείται τώρα περιοδική συνάρτηση με περίοδο T , οπότε για τις κυκλικές συχνότητες ω_n ισχύει ότι $\omega_n = 2n\pi/T$ ($\omega_n \neq \omega_0$, $n = 1, 2, \dots$, $-\infty < t < \infty$), ζητούνται: (α:1) Χωρίς απόδειξη οι τύποι που δίνουν τους συντελεστές a_n και b_n της συνήθους (τριγωνομετρικής) σειράς Fourier της συναρτήσεως $p(t)$. (β:4) Με την άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ να θεωρείται και αυτή σε ανάλογη μορφή συνήθους (τριγωνομετρικής) σειράς Fourier να βρεθούν με υπολογισμούς οι τύποι που δίνουν τους συντελεστές της A_n και B_n συναρτήσεως των γνωστών συντελεστών a_n και b_n της ανηγμένης φορτίσεως $p(t)$. (γ:3) Οι ίδιοι συντελεστές A_n και B_n να γραφούν με τη βοήθεια και της μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως (στο πεδίο της συχνότητας ω), που ήδη προσδιορίσθηκε στην προηγούμενη άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ A135 (Κεφάλαια A5, A6, A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση):

Για τη θέση $u(t)$ (με t το χρόνο) υλικού σημείου M (μάζας m) σε ένα διπαραμετρικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M και ελατηρίου S (σταθεράς k) ισχύει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου M :

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p_0 \sin \omega t \quad \text{με} \quad \omega \neq \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad t > 0.$$

Σ' αυτήν τη διαφορική εξίσωση η συνάρτηση στο δεξιό μέλος δηλώνει την ανηγμένη (στη μάζα m) φόρτιση, εξωτερική δύναμη (με τα p_0 και ω γνωστές σταθερές). Ζητούνται: (α:4) Μια μερική λύση $u_p(t)$ της πιο πάνω μη ομογενούς (πλήρους) διαφορικής εξισώσεως υποχρεωτικά με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και σε τριγωνομετρική μορφή. (β:4) Η λύση $u(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών που αποτελείται από την πιο πάνω διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ (αρχική θέση και ταχύτητα του σημείου M αντίστοιχα) χωρίς τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. (γ:5) Και πάλι η λύση $u(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών του προηγούμενου ερωτήματος, τώρα όμως υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και ξανά με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. (δ:1) Συμφωνεί το αποτέλεσμα αυτό με το αντίστοιχο του προπροηγούμενου ερωτήματος;

ΑΣΚΗΣΗ A136 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Εδώ θεωρούμε το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή σύστημα μάζας-ελατηρίου (m, k) με τη μάζα ίση με m και τη σταθερά του ελατηρίου ίση με k (χωρίς την ύπαρξη αποσβεστήρα). Επιπλέον πάνω στη μάζα m ενεργεί και εξωτερική δύναμη $F = F(t)$ (με t το χρόνο) της μορφής

$$F(t) = mF_0te^{-bt} \quad \text{με} \quad t \geq 0,$$

με τα F_0 και b σταθερές, το b μάλιστα θετική σταθερά. Έτσι έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση στον αρμονικό ταλαντωτή που θεωρούμε και όχι ελεύθερη ταλάντωση (ή έστω ιδιοταλάντωση). Ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί ότι η σχετική γραμμική διαφορική εξίσωση με τη θέση $u = u(t)$ της μάζας m σαν άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) έχει τη μορφή

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2u(t) = F_0te^{-bt} \quad \text{με} \quad t \geq 0,$$

όπου η ιδιοσυχνότητα (ή φυσική κυκλική συχνότητα, γιατί ο χαρακτηρισμός αυτός;) ω_0 του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε δίνεται από τον τύπο $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. (β:2) Ποια γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με σταθερούς συντελεστές και μάλιστα της χαμηλότερης δυνατής τάξεως αποτελεί λύση η πιο πάνω εξωτερική δύναμη $F(t)$; (γ:2) Πώς μπορούν να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις των ερωτημάτων (α) και (β) με τη χρήση του σχετικού διαφορικού τελεστή D ; (δ:3) Με ποιο διαφορικό τελεστή $A(D)$ πρέπει να πολλαπλασιασθεί από αριστερά η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α), έτσι ώστε να προκύψει ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (και πάλι της χαμηλότερης δυνατής τάξεως) με λύσεις (μεταξύ άλλων) και τις λύσεις της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως του ερωτήματος (α); Ποια είναι η διαφορική αυτή εξίσωση; (ε:3) Ποια είναι η γενική λύση $u_g(t)$ της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως του ερωτήματος (δ); Ποιο μέρος $u_h(t)$ της λύσεως αυτής $u_g(t)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως που προκύπτει θέτοντας $F_0 = 0$ (δηλαδή μηδενίζοντας το δεξιό μέλος) στη διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α) και ποιο είναι το επιπλέον μέρος $u_a(t)$ της γενικής αυτής λύσεως $u_g(t)$; Τότε φυσικά $u_g(t) = u_h(t) + u_a(t)$. (στ:3) Ποιες είναι οι τιμές των σταθερών στο επιπλέον αυτό μέρος $u_a(t)$, ώστε αυτό να καταστεί μερική λύση $u_p(t)$ της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως του ερωτήματος (α); Ποια είναι η μερική αυτή λύση $u_p(t)$; (ζ:2) Ποια είναι επομένως η γενική λύση $u_f(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως του ερωτήματος (α);

ΑΣΚΗΣΗ A137 (Κεφάλαια A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Εδώ θεωρούμε τις εξαναγκασμένες «ταλαντώσεις» ενός μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με κρίσιμη απόσβεση: λόγος αποσβέσεως $\xi = 1$. Η ιδιοσυχνότητα του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος είναι ω_0 . Η ανηγμένη στη μάζα φόρτιση του μηχανικού συστήματος είναι της μορφής

$$p^*(t) = p_0e^{-\omega_0 t}$$

με το p_0 γνωστή σταθερά και με t το χρόνο. Άγνωστη είναι η μετατόπιση $u(t)$ της μάζας ως προς τη θέση ισορροπίας της. Χωρίς τη χρήση μετασχηματισμού Laplace ζητούνται: (α:2) Η γενική λύση

$u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. (β:1) Με τη χρήση ορίζουσας η απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας των μερικών λύσεων στη λύση $u_h(t)$. (γ:4) Μια μερική λύση $u_p(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. (δ:1) Η γενική λύση $u_g(t)$ της ίδιας διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ A138 (Κεφάλαιο A10, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: Με γνωστό το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής συναρτήσεως e^{at} ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace (α:1) της συναρτήσεως $1/(s - a)^2$ και (β:1) της συναρτήσεως $1/(s - a)^3$. (Η σχετική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace δε θεωρείται γνωστή. Η διαδικασία πρέπει να γίνει κατευθείαν στις παραπάνω δύο συναρτήσεις!) (γ:4) Με τη χρήση μετασχηματισμού Laplace και με μηδενικές αρχικές συνθήκες να βρεθεί η λύση $u_{p0}(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης της προηγούμενης ασκήσεως και (δ:2) Να γίνει και η πλήρης επαλήθευση της λύσεως αυτής $u_{p0}(t)$: διαφορική εξίσωση και αρχικές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ A139 (Κεφάλαια A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση, Οπτική Απόκριση): Θεωρούμε το κλασικό τριπαραμετρικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με γνωστές τις σταθερές m (μάζα), ω_0 (κυκλική συχνότητα του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση συστήματος) και ξ (λόγο αποσβέσεως) υπό ωστική (ή κρουστική) φόρτιση $\delta(t - \tau)$ τη χρονική στιγμή τ (με $\tau \geq 0$): ανηγμένη στη μάζα φόρτιση $\delta(t - \tau)/m$. Άγνωστη είναι εδώ η μετατόπιση $u(t)$ της μάζας m ως προς τη θέση ισορροπίας της. Οι δύο αρχικές συνθήκες είναι οι $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. Ζητούνται: Στο μετασχηματισμό Laplace η απόδειξη (α:1) του τύπου

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = U(s + a) \quad \text{με} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

και (β:1) του τύπου

$$\mathcal{L}\{u(t - \tau)H(t - \tau)\} = e^{-\tau s}U(s) \quad \text{με} \quad \tau \geq 0 \quad \text{και} \quad \text{με} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

(γ:3) Η λύση $u(t)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών με ασθενή απόσβεση (ή υποκρίσιμη απόσβεση) με τη χρήση και του συμβόλου $\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$. (δ:1) Η ειδική περίπτωση $u_{p0}(t)$ της λύσεως αυτής για μηδενικές αρχικές συνθήκες: $u(0) = 0$ και $\dot{u}(0) = 0$. (ε:2) Από τη λύση αυτή $u_{p0}(t)$ με πρακτικό τρόπο (όχι αυστηρά) ο ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel (εδώ απλά το ολοκλήρωμα Duhamel) για μηδενικές αρχικές συνθήκες και αυθαίρετη (αλλά τμηματικά συνεχή) φόρτιση $p(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A140 (Κεφάλαια A6, A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ισχυρή Απόσβεση, Οπτική Απόκριση): Θεωρούμε μηχανικό σύστημα μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα με ισχυρή (υπερκρίσιμη) απόσβεση. Ο λόγος αποσβέσεως ξ είναι γνωστός, όπως και η συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ του χωρίς απόσβεση συστήματος. Ζητούνται: (α:1) Η απόδειξη του τύπου

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a) \quad \text{με} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{και} \quad \text{το } a \text{ σταθερά.}$$

(β:1) Η αναφορά της διαφορικής εξίσωσης του παρόντος προβλήματος με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ της μάζας m και με φόρτιση $p(t)$. (γ:2) Με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $a_D := \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ η συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ (ή $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$) για το παρόν μηχανικό σύστημα και (δ:2) η αντίστοιχη ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$) με χρήση της εκθετικής συναρτήσεως και μιας υπερβολικής συναρτήσεως. (ε:2) Με καθαρά μαθηματικό τρόπο η απόκριση $u(t)$ του μηχανικού συστήματος σε αυθαίρετη φόρτιση $p(t)$ πάνω στο υλικό σημείο με $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ A141 (Κεφάλαια A1, A6, A18, A19, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση, Οπτική Απόκριση): Σε πρόβλημα ταλαντώσεων μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad -\infty < t < \infty$$

και $p(t)$ τη φόρτιση του υλικού σημείου (μάζας m). Αυτή θεωρείται εδώ αυθαίρετη (όχι καθορισμένη) συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Η λεπτομερής εύρεση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με βάση

το γνωστό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. (β:2) Ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ της λύσεώς της $u(t)$ και από αυτόν (γ:2) η σχετική **μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως** $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας ω . (δ:2) Με τη συνάρτηση $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$ (ή $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$) γνωστή η εύρεση του τύπου για τη λύση $u(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως και (ε:1) σχετικό λεπτομερές σχόλιο για το πάνω όριο ολοκληρώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A142 (Κεφάλαια A18, A19, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση, Ωστική Απόκριση): Θεωρούμε το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, αλλά με μη περιοδική (όχι με περιοδική!) φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$ η οποία ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Άγνωστη συνάρτηση είναι η μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου με t το χρόνο: $-\infty < t < \infty$. Ζητούνται: (α:2) Η εύρεση του τύπου για το μετασχηματισμό Fourier της δευτέρας παραγωγής $\ddot{w}(t)$ μιας συναρτήσεως $w(t)$ με αναφορά και των σχετικών υποθέσεων. (β:2) Με βάση τη σχετική διαφορική εξίσωση ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (γ:2) Η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας ω . (δ:2) Με την αντίστροφη της κατά Fourier συνάρτηση $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$ (ή $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$) να θεωρείται γνωστή συνάρτηση από ποιον ολοκληρωτικό τύπο θα μπορούσε να υπολογισθεί η άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ για αυθαίρετη (αλλά γνωστή) φόρτιση $p(t)$;

ΑΣΚΗΣΗ A143 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Δίνεται η διαφορική εξίσωση του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου (μάζας m), ελατηρίου (σταθεράς k) και αποσβεστήρα (σταθεράς c) υπό κρίσιμη απόσβεση (με λόγο αποσβέσεως $\xi = 1$) και σε εξαναγκασμένη ταλάντωση:

$$\ddot{u}(t) + 2\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

με t το χρόνο ($t > 0$), υπό φόρτιση $p(t)$ και με άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ τη μετατόπιση του σημείου. Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της διαφορικής αυτής εξισώσεως με βάση το νόμο του Νεύτωνα. (β:1) Για την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση η εύρεση της σχετικής χαρακτηριστικής εξισώσεως $p_2(\mu) = 0$ και η γενική λύση $u(t)$ της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. (γ:6) Υποχρεωτικά με τη χρήση μόνο της μερικής λύσεως της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $u_1(t) = e^{-\omega_0 t}$ (όχι και των δύο μερικών λύσεων $u_{1,2}(t)$ του προηγούμενου ερωτήματος) η εύρεση της γενικής λύσεως της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως κατευθείαν και υποχρεωτικά με τη μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως υπό τη μορφή διαδοχικού ολοκληρώματος (με κάτω όρια τη χρονική στιγμή $t = 0$) πλέον τους δύο όρους των σταθερών $C_{1,2}$.

ΑΣΚΗΣΗ A144 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Θεωρούμε το πρόβλημα των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων (υπό γνωστή εξωτερική φόρτιση $p(t)$) μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με κρίσιμη απόσβεση και με ιδιοσυχνότητα (φυσική κυκλική συχνότητα) του αντίστοιχου χωρίς αποσβεστήρα μηχανικού συστήματος ίση με ω_0 . Εδώ ζητούνται: (α:1) Η λεπτομερής εύρεση της σχετικής διαφορικής εξισώσεως

$$\ddot{u}(t) + 2\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m}$$

με m τη μάζα του υλικού σημείου και $u(t)$ τη μετατόπισή του από τη θέση ισορροπίας του $u_0 = 0$. (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (γ:3) Η γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. (δ:1) Η λεπτομερής επαλήθευση της λύσεως αυτής. (ε:2) Η απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας των δύο μερικών λύσεων που υπεισέρχονται στη γενική αυτή λύση $u_h(t)$ της ομογενούς εξισώσεως υποχρεωτικά με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας.

ΑΣΚΗΣΗ A145 (Κεφάλαιο A5, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Εδώ συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:5) Υπό γνωστή εξωτερική φόρτιση της ειδικής μορφής

$$p(t) = m\rho_0^* e^{-\omega_0 t}$$

(με τα σύμβολα m και ω_0 να έχουν ορισθεί στην προηγούμενη άσκηση και το σύμβολο p_0^* να δηλώνει μια γνωστή σταθερά) η γενική λύση $u_g(t)$ της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. (β:3) Η λεπτομερής επαλήθευση αυτής της λύσεως $u_g(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A146 (Κεφάλαια A6, A17, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση): Θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος υλικού σημείου μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c . Με τη χρήση αυτών ακριβώς των συμβόλων, m , k και c , ζητούνται: (α:1) Απλά να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση υπό γνωστή περιοδική εξωτερική φόρτιση $p(t)$. (β:7) Με γνωστή τη μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier της φορτίσεως $p(t)$ να υπολογισθεί η αντίστοιχη σειρά Fourier για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου.

ΑΣΚΗΣΗ A147 (Κεφάλαια A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα χωρίς απόσβεση (έστω σε σύστημα υλικού σημείου μάζας m και ελατηρίου σταθεράς k) θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p(t) \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

και με t το χρόνο ($t > 0$). Η συνάρτηση $p(t)$ στο δεξιό μέλος θεωρείται γνωστή αυθαίρετη (όχι συγκεκριμένη) συνεχής συνάρτηση που δηλώνει τη φόρτιση (ανηγμένη όμως στη μάζα m). Άγνωστη συνάρτηση είναι η $u = u(t)$. Είναι επίσης γνωστές και οι δύο αρχικές συνθήκες: $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. Υποχρεωτικά χωρίς τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace ζητούνται: (α:4) Η γενική λύση της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. (β:1) Η παράγωγος $v(t) = \dot{u}(t)$ της γενικής αυτής λύσεως. (γ:3) Η μερική λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες που ήδη αναφέρθηκαν, δηλαδή η λύση του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ A148 (Κεφάλαια A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται: (α:7) Η λύση του ίδιου προβλήματος αρχικών τιμών (διαφορική εξίσωση και αρχικές συνθήκες, μόνο αυτή η λύση!), τώρα όμως υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. (β:1) Συμφωνούν τα αποτελέσματα;

ΑΣΚΗΣΗ A149 (Κεφάλαιο A5, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση, Συντονισμός): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται: (α:2) Με τη χρήση κατάλληλης οριζουσας να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\cos \omega_0 t$ και $\sin \omega_0 t$ (με μεταβλητή το χρόνο t) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (Υπενθυμίζεται ότι $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.) (β:6) Για ανηγμένη εξωτερική φόρτιση της μορφής

$$p(t) = p_0 \cos(\omega_0 t - \alpha) \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

με p_0 γνωστή σταθερά φορτίσεως και με α γνωστή σταθερά φάσεως να βρεθεί μια μερική λύση (ή ειδική λύση) $u_p(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης της προπροηγούμενης ασκήσεως, εδώ όμως υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών.

ΑΣΚΗΣΗ A150 (Κεφάλαιο A14, Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις. Θεωρούμε τώρα ελεύθερες ταλαντώσεις, δηλαδή με $p(t) = 0$. Υποχρεωτικά με τη μέθοδο των δυναμοσειρών γύρω από την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ ζητούνται: (α:2) Ο αναδρομικός (ή επαναληπτικός) τύπος για τον υπολογισμό των συντελεστών a_n στη σχετική δυναμοσειρά. (β:1) Οι τύποι που δίνουν τους δύο πρώτους συντελεστές a_0 και a_1 στο εξεταζόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών: με $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. (γ:2) Τα τελικά αποτελέσματα για τους συντελεστές a_2 έως και a_7 . (δ:3) Η λεπτομερής αναγωγή της δυναμοσειράς-λύσεως του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών στην κλειστή και αρκετά γνωστή τριγωνομετρική μορφή της (εδώ βέβαια, επαναλαμβάνεται, με $p(t) = 0$).

ΑΣΚΗΣΗ A151 (Κεφάλαια A6, A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Ωστική Απόκριση): Θεωρούμε τον κλασικό αρμονικό ταλαντωτή (σύστημα υλικού σημείου M μάζας m και ελατηρίου S σταθεράς k και των δύο προφανώς θετικών) χωρίς αποσβεστήρα (με $\xi = 0$).

Αυτός αποτελεί ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα με άγνωστη συνάρτηση (το μοναδικό βαθμό ελευθερίας του) τη θέση $u = u(t)$ του υλικού σημείου M που κινείται πάνω στον άξονα Ox . Σε εξαναγκασμένη ταλάντωση του υλικού σημείου M και με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην κλασική Μηχανική προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + ku(t) = p(t) \quad \text{με } t \geq 0,$$

με $p(t)$ τη φόρτιση (εδώ την εξωτερική δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M . Στην παρούσα άσκηση αυτή η φόρτιση $p(t)$ θεωρείται της ωστικής μορφής

$$p(t) = m\Omega\delta(t)$$

με το Ω σταθερά και $\delta(t)$ την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac. Πρόκειται δηλαδή για ωστική (ή κρουστική) φόρτιση που ασκείται ουσιαστικά μόνο τη χρονική στιγμή $t = 0$. Με τη χρήση του βοηθητικού συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ και με αρχικές συνθήκες (για $t = 0^-$) για το υλικό σημείο τις $u(0) = u_0$ (αρχική θέση) και $\dot{u}(0) = v_0$ (αρχική ταχύτητα) ζητούνται: (α:3) Η επίλυση του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (β:1) Η επαλήθευση της λύσεως $u(t)$ που βρέθηκε στο παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών και (γ:2) οι πρέπει-σες διευκρινίσεις (με βάση έννοιες της Μηχανικής, κυρίως την έννοια της ορμής) για την απότομη μεταβολή της αρχικής ταχύτητας v_0 του υλικού σημείου M εξαιτίας της ωστικής (ή κρουστικής) φορτίσεως $p(t)$ που ασκήθηκε τη χρονική στιγμή $t = 0$. (δ:1) Συμφωνεί η λύση $u(t)$ που βρέθηκε στο παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών με τις διευκρινίσεις αυτές ως προς την ταχύτητα $\dot{u}(t) = v(t)$ για $t = 0^+$; (ε:1) Ποια είναι η αρχική επιτάχυνση $a(0)$ (για $t = 0^+$) του υλικού σημείου M ;

ΑΣΚΗΣΗ A152 (Κεφάλαια A1, A6, A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση): Εδώ θεωρούμε το σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και με σταθερές τις δύο ποσότητες ω και ξ στους συντελεστές

$$\dot{u}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) + 2\xi\omega_0 v(t) + \omega_0^2 u(t) = p(t) \quad \text{με } \omega_0 > 0, \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{και } t > 0,$$

με t το χρόνο, $u(t)$ και $v(t)$ τις δύο άγνωστες συναρτήσεις και $p(t)$ γνωστή τυχαία τμηματικά συνεχή συνάρτηση υπό τις αρχικές (για $t = 0$) συνθήκες $u(0) = u_0$ και $v(0) = v_0$ (πρόβλημα αρχικών τιμών). Ζητούνται: (α:2) Η λεπτομερέστατη εξήγηση για το πού ακριβώς παρουσιάζεται το σύστημα αυτό στις Ταλαντώσεις με σχήμα και με πλήρεις διευκρινίσεις για τις συναρτήσεις $u(t)$, $v(t)$ και $p(t)$ που υπεισέρχονται καθώς και τα σύμβολα ξ και ω_0 και τους συγκεκριμένους τύπους υπολογισμού των ποσοτήτων αυτών. (β:1) Η αναγωγή του πιο πάνω συστήματος δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (γ:2) Η επίλυση του συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους άγνωστους μετασχηματισμούς Laplace. (δ:3) Ειδικά για την άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ (μόνο αυτή!) η εύρεσή της με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της που προέκυψε στο προηγούμενο ερώτημα και μάλιστα στην απλούστερη τελική δυνατή μορφή της με $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ A153 (Κεφάλαια A6, A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση, Συνάρτηση Μεταφοράς, Ωστική Απόκριση, Ολοκληρωτικός Τύπος του Duhamel): Θεωρούμε ένα απλό μονοβάθμιο τριπααραμετρικό μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m), ελατηρίου (σταθεράς k) και αποσβεστήρα (σταθεράς c) και με ασθενή (ή υποκρίσιμη) απόσβεση: με $0 < \xi < 1$. Προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με } 0 < \xi < 1 \quad \text{και } t > 0$$

με $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου, ξ και ω_0 γνωστές σταθερές και $p(t)$ τη φόρτιση (την εξωτερική δύναμη) η οποία ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Ζητούνται: (α:3) Με μηδενικές αρχικές συνθήκες: $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ και για ωστική (ή κρουστική) φόρτιση, εξωτερική δύναμη

$p(t) = \Omega \delta(t)$ (με την ώθηση Ω γνωστή σταθερά) ποια είναι η λύση $u(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης (εδώ προβλήματος αρχικών τιμών) υποχρεωτικά με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$; ($\beta:1$) Η σχετική συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$). ($\gamma:2$) Η σχετική ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$). ($\delta:2$) Η απόκριση $u(t)$ του μηχανικού αυτού συστήματος για τυχαία (και που υποτίθεται τμηματικά συνεχής) φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$ (και πάλι με μηδενικές αρχικές συνθήκες) υπό τη μορφή κατάλληλου ολοκληρωτικού τύπου του Duhamel.

ΑΣΚΗΣΗ A154 (Κεφάλαια A6, A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση, Συνάρτηση Μεταφοράς, Ωστική Απόκριση, Ολοκληρωτικός Τύπος του Duhamel): Εδώ θεωρούμε το κλασικό τριπαραμετρικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c με την υπόθεση ασθενούς (ή υποκρισίμης) αποσβέσεως, δηλαδή με $0 < c < 2\sqrt{km}$ ή $0 < \xi < 1$. Προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = p(t) \quad \text{με} \quad t \geq 0,$$

με t το χρόνο, $u = u(t)$ την άγνωστη συνάρτηση (τη μετατόπιση του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του) και $p(t)$ τη φόρτιση (την εξωτερική δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο στην παρούσα εξαναγκασμένη ταλάντωση. Χρησιμοποιώντας και τη σταθερά ω_0 (τη φυσική κυκλική συχνότητα του παρόντος μηχανικού συστήματος χωρίς όμως τον αποσβεστήρα) καθώς και το λόγο αποσβέσεως των ταλαντώσεων ξ με

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0}, \quad \text{όπου εδώ} \quad 0 < \xi < 1,$$

(ασθενής ή υποκρισίμη απόσβεση) μπορούμε άμεσα (απλά διαιρώντας με την μάζα m) να φέρουμε την πιο πάνω διαφορική εξίσωση στην τόσο κλασική για τον Πολιτικό Μηχανικό μορφή της

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{m} p(t) \quad \text{με} \quad u = u(t) \quad \text{και} \quad t \geq 0.$$

Θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες: $u(0) = 0$ και $\dot{u}(0) = 0$. Εδώ ζητούνται: ($\alpha:2$) Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$) του παραπάνω μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος. ($\beta:2$) Η αντίστοιχη ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$) με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

($\gamma:2$) Η απόκριση (η έξοδος, η μετατόπιση του υλικού σημείου) $u = u(t)$ του συστήματος σε μια αυθαίρετη (οποιαδήποτε, όχι συγκεκριμένη) φόρτιση (είσοδο) $p(t)$ υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ίσως και με χρήση αποτελεσμάτων από τα προηγούμενα δύο ερωτήματα. ($\delta:2$) Η φυσική εξήγηση της ισχύος του ολοκληρωτικού τύπου (δηλαδή τύπου που περιέχει και ολοκλήρωμα) του Duhamel, που προέκυψε στο προηγούμενο ερώτημα. ($\epsilon:2$) Η εφαρμογή του ίδιου τύπου για σταθερή φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t) = p_0$ (με $t \geq 0$) με αναλυτικό υπολογισμό του σχετικού ολοκληρώματος.

ΑΣΚΗΣΗ A155 (Κεφάλαιο A14, Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Απόσβεση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Θεωρούμε ξανά τη βασική διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης με απόσβεση

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{με} \quad u = u(t) \quad \text{και} \quad t \geq 0,$$

τώρα όμως για ελεύθερες (και όχι πια εξαναγκασμένες) ταλαντώσεις, δηλαδή με το δεξιό μέλος της $p(t)$ ίσο με μηδέν: $p(t) = 0$. Με γνωστές αρχικές συνθήκες (αλλά μη μηδενικές τώρα): $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ ζητείται η επίλυση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο των δυναμοσειρών γύρω από το σημείο $t = 0$ η οποία να περιλαμβάνει: ($\alpha:5$) την εύρεση γενικού αναδρομικού τύπου προσδιορισμού του συντελεστή a_k της δυναμοσειράς σαν συνάρτηση των δύο προηγούμενων συντελεστών a_{k-1} και a_{k-2} και ($\beta:3$) την παρουσίαση σε ενιαίο τύπο των τριών πρώτων όρων της δυναμοσειράς αυτής συγκεκριμένα μέχρι και τον όρο με t^2 .

ΑΣΚΗΣΗ A156 (Κεφάλαια A5, A6, A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Κρίσιμη Απόσβεση): Σε απλό τριπααραμετρικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου, ελατηρίου και αποσβεστήρα (το ελατήριο και ο αποσβεστήρας παράλληλα!) με κρίσιμη απόσβεση (δηλαδή με λόγο αποσβέσεως $\xi = 1$) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + 2\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p_0 \quad \text{με} \quad t \geq 0,$$

με $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου, ω_0 γνωστή σταθερά και p_0 τη φόρτιση (την εξωτερική δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο (ανηγμένη στη μάζα του m). Αυτή θεωρείται σταθερή. Ζητούνται: (α:1) Απλά η επαλήθευση πως η συνάρτηση $u_1(t) = e^{-\omega_0 t}$ αποτελεί μερική λύση (ή ειδική λύση) της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. (β:6) Η γενική λύση $u(t)$ της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως υποχρεωτικά με τη μέθοδο του υποβιβασμού της τάξεως που να βασίζεται (επίσης υποχρεωτικά) στη μερική λύση $u_1(t)$ που δοθηκε και επαληθεύθηκε. (Ο σχετικός τελικός τύπος δε θεωρείται γνωστός!) (γ:1) Ποιο μέρος $u_t(t)$ της γενικής αυτής λύσεως $u(t)$ αποτελεί το μεταβατικό (ή παροδικό) φαινόμενο, το οποίο σβήνει (εξαλείφεται) σιγά-σιγά με την πάροδο του χρόνου t ;

ΑΣΚΗΣΗ A157 (Κεφάλαια A6, A17, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Θεωρούμε συνηθισμένο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M (μάζας m) και ελατηρίου S σταθεράς k χωρίς απόσβεση (χωρίς αποσβεστήρα) με γνωστή ιδιοσυχνότητα (ή φυσική κυκλική συχνότητα) ω_0 και σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό περιοδική (με περίοδο T) φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση. (β:1) Η μιγαδική ή εκθετική σειρά Fourier της φορτίσεως $p(t)$ (γενική μορφή) θεωρώντας την, επαναλαμβάνουμε, περιοδική συνάρτηση με περίοδο T . (γ:1) Να αναφερθούν οι γνωστοί τύποι για τον προσδιορισμό όλων των συντελεστών της. (δ:2) Η μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ στο πεδίο της συχνότητας ω (εδώ ίσως είναι πραγματική!) ειδικά για τη μιγαδική εκθετική φόρτιση $e^{i\omega t}$. (ε:3) Η λεπτομερής εύρεση της μερικής λύσεως $u_p(t)$ της διαφορικής εξισώσεως του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος που αντιστοιχεί στη γνωστή περιοδική φόρτιση $p(t)$ υποχρεωτικά με τη χρήση της μιγαδικής ή εκθετικής σειράς Fourier της φορτίσεως αυτής που ήδη αναφέρθηκε και θεωρείται εδώ γνωστή.

ΑΣΚΗΣΗ A158 (Κεφάλαια A6, A12, A13, A18, A19, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση, Ωπτική Απόκριση): Θεωρούμε ένα συνηθισμένο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M (μάζας m), ελατηρίου S (σταθεράς k) και αποσβεστήρα D (σταθεράς c) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό μη περιοδική φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$. Ζητούνται: (α:1) Να αναφερθεί η σχετική διαφορική εξίσωση με χρήση και των ποσοτήτων ξ και ω_0 . (β:3) Για ωπτική (ή κρουστική) φόρτιση του συστήματός μας, δηλαδή για $p(t) = \delta(t)$, η εύρεση του μετασχηματισμού Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (γ:1) Η σχετική μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας. (δ:3) Υποθέτοντας τώρα ότι είναι γνωστή η αντίστροφη της κατά Fourier συνάρτηση $g(t)$ (ή $h(t)$), να μη γίνει όμως η αντίστροφη αυτή!, η λύση $u(t)$ της αρχικής διαφορικής εξισώσεως για αυθαίρετη (οποιαδήποτε, όχι συγκεκριμένη) μη περιοδική φόρτιση $p(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A159 (Κεφάλαια A6, A16, A17, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση): Εδώ ζητούνται: (α:1) Απλά να αναφερθούν λεπτομερώς οι συνθήκες του Dirichlet για τις σειρές Fourier. (β:2) Με γνωστή την μιγαδική ή εκθετική σειρά Fourier μιας περιοδικής συναρτήσεως $p(t)$ (με περίοδο T) να κατασκευασθεί πλήρως η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier. Θεωρούμε τώρα τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας m και ελατηρίου (απλού ταλαντωτή) με φυσική κυκλική συχνότητα ω_0 και υπό ανηγμένη στη μάζα φόρτιση $p^*(t) := p(t)/m$. (γ:1) Με την ανηγμένη φόρτιση $p^*(t)$ περιττή συνάρτηση με περίοδο T ποια είναι η σειρά Fourier της και πώς υπολογίζονται οι συντελεστές της; (δ:4) Τέλος ποια είναι η απόκριση (εδώ μερική ή ειδική λύση της διαφορικής εξισώσεως) του πιο πάνω απλού ταλαντωτή για την ανηγμένη φόρτιση $p^*(t)$ του προηγούμενου ερωτήματος σε μορφή σειράς Fourier;

ΑΣΚΗΣΗ A160 (Κεφάλαια A18, A19, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση, Ωπτική

Απόκριση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Κατ' αρχήν στο μετασχηματισμό Fourier ζητούνται: (α:1) Με πλήρη απόδειξη, αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ της συναρτήσεως $u(t)$, να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συναρτήσεως $u(t+c)$ με το c σταθερά. (β:1) Χωρίς απόδειξη να διατυπωθεί μαθηματικά και με λόγια το θεώρημα της συνελίξεως στο μετασχηματισμό Fourier. Θεωρούμε τώρα τον απλό ταλαντωτή της προηγούμενης ασκήσεως, αλλά με γνωστή μη περιοδική ανηγμένη φόρτιση $p(t)/m$. Με χρήση και του συμβόλου m (για τη μάζα: δηλαδή εδώ $p(t)/m$) Ζητούνται: (γ:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσεως σε γραμμική αλγεβρική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση το μετασχηματισμό Fourier $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ και η λύση της $U(\omega)$. (δ:1) Η σχετική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$). (ε:1) Η απόκριση $u(t)$ του απλού αυτού ταλαντωτή με τη χρήση των συναρτήσεων $P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$ (όχι $\mathcal{F}\{p^*(t)\}$) και $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$). (στ:1) Η ίδια απόκριση με τη χρήση των συναρτήσεων $p(t)$ και

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}.$$

Η συνάρτηση $g(t)$ (ή $h(t)$) θεωρείται εδώ γνωστή. Μαθηματικά γιατί ισχύει ο τύπος που ζητείται στο ερώτημα αυτό; (ζ:1) Για ποιο φυσικό λόγο το διάστημα ολοκληρώσεως είναι τελικά $(-\infty, t]$ τη χρονική στιγμή t ; (η:1) Να ερμηνευθεί με φυσικό-τεχνικό τρόπο (όχι μαθηματικά!) ο ίδιος τύπος.

A7.2. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση: συντονισμός

ΑΣΚΗΣΗ A161 (Κεφάλαια A6, A10, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συντονισμός): Σε πρόβλημα ταλαντώσεων μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου του ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = \frac{p_0}{m} t \sin \omega_0 t.$$

Ζητούνται: (α:1) Όλες οι λεπτομέρειες για το μηχανικό σύστημα, τις σταθερές ω_0, p_0 και m και τους χαρακτηρισμούς των ταλαντώσεων αυτών. (β:1) Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace της συναρτήσεως $\sin \omega_0 t$ με γνωστό το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής συναρτήσεως $e^{i\omega_0 t}$. (γ:1) Στο μετασχηματισμό Laplace η απόδειξη της ιδιότητας

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s) \quad \text{με} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

(δ:1) Ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως $t \sin \omega_0 t$. (ε:2) Υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες ο μετασχηματισμός Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ της λύσεως $u(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσεως. (στ:1) Υπό τις ίδιες συνθήκες και χωρίς άλλους υπολογισμούς μια πρώτη εκτίμηση για τη μεταβολή της λύσεως $u(t)$ με το χρόνο t (για μεγάλες τιμές του t) και η σχετική γραφική παράσταση. (ζ:1) Άρα πώς μεταβάλλεται το εύρος των ταλαντώσεων με το χρόνο t (πάλι για μεγάλες τιμές του t);

ΑΣΚΗΣΗ A162 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συντονισμός): Θεωρούμε εδώ την κλασική διαφορική εξίσωση του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου M μάζας m και ελατηρίου S σταθεράς k (χωρίς απόσβεση) σε εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό εξωτερική δύναμη

$$p(t) = p_0 \sin \omega_0 t$$

με το εύρος $p_0 > 0$ γνωστή σταθερά και με t το χρόνο, όπου η συχνότητα ω_0 της εξωτερικής δυνάμεως $p(t)$ θεωρείται εδώ ότι συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ του μηχανικού αυτού συστήματος. Υποχρεωτικά χωρίς τη χρήση μετασχηματισμού Laplace Ζητούνται: (α:1) Η σχετική μη ομογενής διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου M από τη θέση ισορροπίας του. (β:1) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσεως. (γ:3) Μια μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής αυτής εξίσωσεως. (δ:1) Η γενική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσεως. (ε:2) Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών: διαφορική εξίσωση και γνωστές αρχικές συνθήκες: $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$.

ΑΣΚΗΣΗ A163 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συντονισμός): Στην κίνηση της μάζας m σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα (όπως, π.χ., στο κλασικό μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου) η θέση $u = u(t)$ (με t το χρόνο) της μάζας αυτής m προέκυψε πειραματικά (υπό συγκεκριμένες δυναμικές συνθήκες) ότι δίνεται από το μαθηματικό τύπο

$$u(t) = At \cos(\omega_0 t - \delta)$$

με τις ποσότητες A (εύρος), ω_0 (κυκλική συχνότητα) και δ (γωνία φάσεως) σταθερές. Ζητούνται: (α:3) Η πιο χαμηλής δυνατής τάξεως ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (με παράμετρο το ω_0) με σταθερούς συντελεστές που έχει σαν λύση (ασφαλώς μεταξύ και πολλών άλλων λύσεων) και την πιο πάνω συγκεκριμένη συνάρτηση $u(t)$. (β:2) Η γενική λύση $u_g(t)$ της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (γ:1) Σε ποιες τιμές των σταθερών της γενικής αυτής λύσεως $u_g(t)$ αντιστοιχεί η μερική λύση $u(t)$ που ήδη αναφέρθηκε; (δ:2) Έχει πραγματικά (ή όχι) ιδιαίτερη φυσική σημασία η διαφορική εξίσωση που προσδιορίστηκε πιο πάνω; Γιατί ακριβώς;

ΑΣΚΗΣΗ A164 (Κεφάλαια A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συντονισμός): Σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) χωρίς απόσβεση θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις του υπό ανηγμένη στη μάζα φόρτιση

$$p^*(t) := \frac{p(t)}{m} = p_0 + p_1 \cos \omega_0 t$$

με γνωστές τις σταθερές p_0 και p_1 και επίσης με $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του ζητούνται: (α:1) Η γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και (β:1) με τη χρήση ορίζουσας η απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας των λύσεων που υπεισέρχονται σ' αυτήν. (γ:3) Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών μια μερική λύση $u_p(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και στη συνέχεια (δ:1) η αντίστοιχη γενική λύση $u_g(t)$. (ε:1) Σε ποιον όρο της λύσεως αυτής $u_g(t)$ εστιάζει την προσοχή του μετά από κάποιο επαρκή χρόνο ο Πολιτικός Μηχανικός και γιατί; (στ:1) Από τη λύση αυτή ποιο φαινόμενο παρατηρούμε ότι παρουσιάζεται και πώς θα μπορούσε να το αποφύγει ο Πολιτικός Μηχανικός χωρίς να έχει αλλάξει καθόλου η φόρτιση $p(t)$;

ΑΣΚΗΣΗ A165 (Κεφάλαια A10, A11, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συντονισμός): Εδώ συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Τώρα όμως θεωρούμε γνωστές τις αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}_0 = v_0$ και μια κάπως διαφορετική ανηγμένη φόρτιση

$$p^*(t) = p_1 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

με το α μια γνωστή γωνία φάσεως. Ζητούνται: (α:1) Με γνωστό το μετασχηματισμό Laplace της ημιτονικής συναρτήσεως $\sin \omega_0 t$ η απόδειξη του πρώτου από τους δύο παρακάτω τύπους

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \right\} = \frac{1}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \right\} = \frac{1}{2\omega_0^3} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t).$$

(Η σχετική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace δε θεωρείται γνωστή!) (β:2) Στη συνέχεια με βάση τον πρώτο τύπο η απόδειξη και του δεύτερου τύπου. (Αντίθετα με προηγουμένως η σχετική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace θεωρείται τώρα γνωστή!) (γ:1) Με βάση τους τύπους του Euler η απόδειξη του τόσο γνωστού τριγωνομετρικού τύπου

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

(δ:4) Με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και με βάση τους τρεις παραπάνω τύπους η εύρεση της λύσεως $u(t)$ αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ A166 (Κεφάλαια A5, A6, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συντονισμός): Θεωρούμε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα, συγκεκριμένα τον κλασικό αρμονικό ταλαντωτή, που αποτελείται από υλικό σημείο M (μάζας m με $m > 0$) και ελατήριο S (σταθεράς k με $k > 0$) χωρίς αποσβεστήρα (με $\xi = 0$). Στο σύστημα αυτό υποθέτουμε φόρτιση από εξωτερική δύναμη

$$p(t) = mp_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

με t το χρόνο και τα p_0 (εύρος της δύναμews δια m) και α (γωνία φάσεως) πραγματικές σταθερές με κυκλική συχνότητα $\omega = \omega_0$ ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα (ή φυσική κυκλική συχνότητα)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

του αρμονικού ταλαντωτή. Έχουμε επομένως (πάντοτε με την υπόθεση ότι $\omega = \omega_0$ που κάναμε) να αντιμετωπίσουμε στην παρούσα εξαναγκασμένη ταλάντωση το σχεδόν πάντοτε δυσάρεστο για τον Πολιτικό Μηχανικό φαινόμενο του συντονισμού. Στην περίπτωση μας η σχετική γραμμική μη ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως παίρνει τη μορφή

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + ku(t) = mp_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

φυσικά με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου μας M ως προς τη θέση ισορροπίας του. Η εξίσωση αυτή απλοποιείται εύκολα (με διαίρεση δια της μάζας m) στη μορφή

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = p_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Γι' αυτήν τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση ζητούνται: (α:1) Η γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς. (β:2) Μια απλή μερική λύση (ή ειδική λύση) $u_p(t)$ της μη ομογενούς (της πλήρους). Πώς μεταβάλλεται χρονικά το εύρος της σχετικής ταλαντώσεως; (γ:1) Η γενική λύση $u_g(t)$ της μη ομογενούς (της πλήρους). Υπάρχει πραγματικά φαινόμενο συντονισμού; Ποιος όρος της γενικής λύσεως είναι ο «εκφραστής» του φαινομένου αυτού; Με την υπόθεση μη υπάρξεως αποσβέσεως των ταλαντώσεων είναι ή όχι λογικό να αγνοηθεί το μεταβατικό φαινόμενο (δηλαδή οι όροι που θα οφειλοντο στις αρχικές συνθήκες, εάν είχαν βρεθεί, δεν έχουν όμως βρεθεί!) από μια χρονική στιγμή και μετά; (δ:1) Να γίνει επαλήθευση της γενικής λύσεως $u_g(t)$ που βρέθηκε. (ε:3) Πώς μπορεί να αναχθεί η πιο πάνω μη ομογενής διαφορική εξίσωση σε ομογενή (γραμμική, με σταθερούς συντελεστές και της χαμηλότερης δυνατής τάξεως) με εφαρμογή σ' αυτήν κατάλληλου γραμμικού διαφορικού τελεστή $A(D)$ (με το διαφορικό τελεστή $D \equiv d/dt$ να δηλώνει απλά την παραγωγή ως προς το χρόνο t); (στ:1) Ποιος είναι ο τελεστής $A(D)$; (ζ:1) Ποιο μειονέκτημα παρουσιάζει η κατά τα άλλα ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα διαδικασία αυτή της αναγωγής μιας μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως σε ομογενή;

A7.3. Ενεργειακή θεώρηση των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση

ΑΣΚΗΣΗ A167 (Κεφάλαια A2, A3, A5, Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Σύστημα Μάζας-Ελατηρίου: Ενεργειακή Θεώρηση): Θεωρούμε το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Αυτός αποτελείται από υλικό σημείο M μάζας m στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου S σταθεράς (θετικής εννοείται) k με το άλλο άκρο του ίδιου ελατηρίου ακίνητο. Υποτίθεται επίσης ότι δεν υπάρχει απόσβεση της κινήσεως του υλικού σημείου M (δεν υπάρχει αποσβεστήρας) ούτε και εξωτερική δύναμη που να ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M . Υποθέτουμε τώρα το υλικό σημείο M να έχει μετατοπισθεί κατά $u = u(t)$ (με t το χρόνο) ως προς την θέση ισορροπίας του $u = 0$ (όχι βέβαια ως προς το σταθερό άκρο του ελατηρίου) με τη μετατόπιση αυτή να είναι συνάρτηση του χρόνου t . Θεωρούμε επίσης και την αντίστοιχη ταχύτητα $v = v(t) = \dot{u}(t)$. (Το τελευταίο σύμβολο δηλώνει παράγωγο ως προς το χρόνο t , δηλαδή $\dot{u}(t) := du/dt$). Τότε η κινητική ενέργεια T του υλικού σημείου M (που είναι μεταβλητή με το χρόνο), η δυναμική ενέργεια U του ελατηρίου (επίσης μεταβλητή με το χρόνο) και η συνολική ενέργεια E του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε (αυτή προφανώς δεν είναι μεταβλητή: είναι σταθερή) δίνονται από τους λίγο-πολύ γνωστούς τύπους

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2, \quad U = \frac{1}{2} k u^2 \quad \text{και} \quad E = T + U.$$

Επομένως προκύπτει (κυρίως λόγω του τελευταίου τύπου) ουσιαστικά μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς $u(t)$ με παραμέτρους μόνο τις ποσότητες E , m και k . Ζητούνται: (α:3) Χωρίς την ύπαρξη αποσβέσεως, όπως έχει ήδη υποθεθεί, δηλαδή με σταθερή τη συνολική ενέργεια E , και με παραγωγή της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει από τους πιο πάνω τύπους (και κάποια προφανή απλοποίηση για $\dot{u}(t) \neq 0$) να βρεθεί η σχετική κλασική γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με άγνωστη συνάρτηση πάλι τη θέση $u = u(t)$ του υλικού σημείου M καθώς και η γενική λύση της. (β:3) Επανερχόμαστε τώρα στη μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως που ορίζεται από τους πιο πάνω τύπους, αφού αυτή λυθεί ως προς $\dot{u} = du/dt$. Ζητείται κατευθείαν η λύση της $t = t(u)$ ως προς το χρόνο t σαν συνάρτηση της θέσεως u με παραμέτρους τις σταθερές και θετικές ποσότητες E , m και k που προαναφέρθηκαν. (γ:2) Στην συνέχεια από τη λύση αυτή $t = t(u)$ ζητείται και η αντίστοιχη συνάρτηση $u = u(t)$. (δ:2) Συμφωνούν καταρχήν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (γ); Ποιο από τα δύο κρίνετε εσείς με καλύτερη φυσική σημασία; Γιατί; Με το μικρότερο υπολογιστικό κόστος; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ A168 (Κεφάλαια A1, A2, A3, Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Σύστημα Μάζας-Ελατηρίου: Ενεργειακή Θεώρηση): Θεωρούμε το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M μάζας m και ελατηρίου S σταθεράς k χωρίς απόσβεση. Ζητούνται: (α:1) Να εξηγηθεί πώς ακριβώς προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$m \nu \frac{d\nu}{du} + ku = 0$$

με μεταβλητές τη μετατόπιση u του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του και την ταχύτητα ν του ίδιου σημείου. (β:1) Να βρεθεί η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης σε πεπλεγμένη (όχι σε λυμένη) μορφή. (γ:1) Να αποδειχθεί ότι στην παρούσα κίνηση η συνολική ενέργεια E , που είναι το άθροισμα

$$E = T + U$$

της κινητικής ενέργειας T του υλικού σημείου M και της δυναμικής ενέργειας U του ελατηρίου S με

$$T = \frac{1}{2} m \nu^2 \quad \text{και} \quad U = \frac{1}{2} k u^2$$

είναι σταθερή. (δ:1) Ποιος ακριβώς τύπος δίνει την ταχύτητα ν του υλικού σημείου σαν συνάρτηση της θέσεώς του u με τη συνολική ενέργεια E του μηχανικού συστήματος να θεωρείται γνωστή σταθερά; (ε:1) Να αποδειχθεί ότι ισχύει η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E - ku^2}{m}} \quad \text{με} \quad u = u(t)$$

με t το χρόνο. (στ:2) Να βρεθεί η γενική λύση $t = t(u)$ (με μία αυθαίρετη σταθερά C) της ακριβώς προηγούμενης διαφορικής εξίσωσης και (ζ:1) η αντίστοιχη λύση $u = u(t)$ με αντιστροφή της γνωστής τώρα συναρτήσεως $t = t(u)$ του προηγούμενου ερωτήματος.

ΑΣΚΗΣΗ A169 (Κεφάλαια A1, A2, A3, Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Απλό Εκκρεμές: Ενεργειακή Θεώρηση): Θεωρούμε απλό εκκρεμές, δηλαδή υλικό σημείο M μάζας m στο κάτω άκρο νήματος μήκους L με το επάνω άκρο του O σταθερό. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Στην κίνηση αυτή του υλικού σημείου άγνωστη συνάρτηση είναι η γωνία $\theta = \theta(t)$ του νήματος ως προς την κατακόρυφο. Ζητούνται: (α:2) Να αποδειχθεί η διαφορική εξίσωση

$$E = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{με} \quad \theta = \theta(t)$$

για την κίνηση αυτή με E τη συνολική ενέργεια του υλικού σημείου. (Τη δυναμική ενέργεια τη μετράμε ως προς την κατώτερη θέση του υλικού σημείου.) (β:1) Η αναγωγή της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών: ο χωρισμός των μεταβλητών και (γ:1) Η λύση

της $t = t(\theta)$ χωρίς όμως τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $t(\theta)$ στο δεξιό μέλος. (δ:2) Υποθέτοντας κίνηση του εκκρεμούς, η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης στη μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{με} \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{και} \quad \theta = \theta(t)$$

(ε:1) Η γραμμικοποίηση αυτής της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με πλήρεις επεξηγήσεις και με αναφορά και της σχετικής παραδοχής. (στ:1) Η επαλήθευση της γενικής λύσεως

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

της γραμμικοποιημένης πια διαφορικής εξίσωσης με τα A και B δύο αυθαίρετες σταθερές.

ΑΣΚΗΣΗ A170 (Κεφάλαια A1, A3, Ελεύθερες Ταλαντώσεις Χωρίς Απόσβεση: Απλό Εκκρεμές: Ενεργειακή Θεώρηση): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα του απλού εκκρεμούς, δηλαδή υλικού σημείου M μάζας m στερεωμένου στο άκρο νήματος σταθερού μήκους L που εκτελεί ταλαντώσεις σε κατακόρυφο επίπεδο υπό την επίδραση της γήινης βαρύτητας με επιτάχυνση g και χωρίς δυνάμεις που να προκαλούν απόσβεση της ταλαντώσεως (χωρίς δυνάμεις τριβών). Με το σύμβολο $\theta = \theta(t)$ να δηλώνει τη γωνία του νήματος από την κατακόρυφο (με t το χρόνο και με μέγιστη απολύτως τιμή της γωνίας θ , εύρος των ταλαντώσεων, ίση με α , δηλαδή με $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$) αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{1}{2} mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mgL(\cos \theta - \cos \alpha) \quad \text{με} \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha.$$

Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη της διαφορικής αυτής εξίσωσης με βάση τη διατήρηση της συνολικής ενέργειας (κινητικής και δυναμικής αθροιστικά) του υλικού σημείου M στο παρόν μαθηματικό εκκρεμές. (β:3) Η γενική λύση $t = t(\theta)$ (δυστυχώς όχι $\theta = \theta(t)$, αυτό δεν είναι ευχερές) της ίδιας διαφορικής εξίσωσης (που περιέχει και ένα ολοκλήρωμα που δε μπορεί να υπολογισθεί εύκολα, δηλαδή αλγεβρικά και μέσω στοιχειωδών μόνο συναρτήσεων), αφού φυσικά αυτή επιλυθεί πρώτα ως προς την παράγωγο $d\theta/dt$. (γ:2) Ο υπολογισμός της περιόδου T της ταλαντώσεως (και πάλι με τη χρήση και ολοκληρώματος στον τελικό τύπο) σαν $T = 4(T/4)$ με $T/4$ το χρόνο που απαιτείται για την κίνηση του εκκρεμούς από την κατακόρυφη θέση $\theta = 0$ μέχρι την θέση μέγιστης γωνιακής αποκλίσεως $\theta = \alpha$. Το συμπέρασμά μας είναι ότι η περίοδος T των ταλαντώσεων γενικά εξαρτάται από το εύρος τους α στο μαθηματικό εκκρεμές. (δ:3) Στην ειδική περίπτωση που το εύρος των ταλαντώσεων αυτών α (η μέγιστη γωνιακή απόκλιση στην ταλάντωση) είναι πολύ μικρό, να απλοποιηθεί κατάλληλα ο σχετικός τύπος του προηγούμενου ερωτήματος (με τη χρήση σειράς Maclaurin με δύο μόνο μη μηδενικούς όρους), ώστε να συμπέσει με τον κλασικό, το γνωστό τύπο που δεν περιέχει κανένα ολοκλήρωμα.

A7.4. Ελεύθερες ταλαντώσεις διβάθμιων μηχανικών συστημάτων

ΑΣΚΗΣΗ A171 (Κεφάλαια A12, A13, Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συστήματα Μαζών-Ελατηρίων): Στις Ταλαντώσεις, που είναι ασφαλώς ένα πολύ ενδιαφέρον πεδίο της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, παρουσιάζονται συχνά συστήματα μαζών και απλών γραμμικών ελατηρίων. Σε ένα τέτοιο πολύ απλό σύστημα δύο μαζών και τριών ελατηρίων κατά μήκος οριζόντιας ευθείας γραμμής προκύπτει το εξής σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

Εδώ τα σύμβολα \mathbf{M} και \mathbf{K} δηλώνουν τα συμμετρικά μητρώα μάζας και στιβαρότητας αντίστοιχα. Επίσης το σύμβολο $\mathbf{u}(t)$ δηλώνει το σχετικό διάνυσμα των οριζοντίων μετατοπίσεων των δύο μαζών του πιο πάνω μηχανικού συστήματος στις Ταλαντώσεις (με $u_1(t)$ να δηλώνει την μετατόπιση της πρώτης μάζας και $u_2(t)$ την μετατόπιση της δεύτερης μάζας). Τα σύμβολα αυτά στο παρόν διβάθμιο απλό μηχανικό σύστημα έχουν τις εξής συγκεκριμένες εκφράσεις:

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

με τα m και k γνωστές θετικές σταθερές, χωρίς εξωτερικές δυνάμεις και με μηδενικό το μητρώο αποσβέσεως \mathbf{C} των ταλαντώσεων. Ζητούνται: (α:3) Η επίλυση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace και υπό τις αρχικές συνθήκες

$$u_k(0) = u_{k0}, \quad \dot{u}_k(0) = v_{k0} \quad \text{με} \quad k = 1, 2$$

μέχρι και τον πλήρη προσδιορισμό των μετασχηματισμών Laplace $U_{1,2}(s) = \mathcal{L}\{u_{1,2}(t)\}$ των αγνώστων συναρτήσεων (μετατοπίσεων) $u_{1,2}(t)$. Δηλαδή δε ζητείται η αντιστροφή αυτών των μετασχηματισμών Laplace. (β:3) Η απόδειξη (μαθηματικά βέβαια και με βάση τους μετασχηματισμούς Laplace $U_{1,2}(s)$) που ήδη βρέθηκαν ότι οι άγνωστες μετατοπίσεις $u_{1,2}(t)$ είναι τριγωνομετρικής και όχι υπερβολικής (ισοδύναμα πραγματικής εκθετικής) μορφής στο παρόν πρόβλημα. (γ:2) Είναι η διαπίστωση αυτή σωστή (και αναμενόμενη) και από της φυσικής απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού (που ασφαλώς δεν πρέπει να παραβλέπεται) ή όχι; Γιατί ακριβώς; Ποια θεμελιώδης αρχή της Μηχανικής θα παραβιαζόταν στην αντίθετη περίπτωση;

ΑΣΚΗΣΗ A172 (Κεφάλαια A12, A13, Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συστήματα Μαζών-Ελατηρίων): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Θα εξετάσουμε τώρα ένα δεύτερο, διαφορετικό τρόπο επίλυσης του ίδιου συστήματος συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων (χωρίς συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες) αντί για το μετασχηματισμό Laplace. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi} \cos(\omega t - \delta) \quad \text{ισοδύναμα} \quad \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \delta),$$

(με το δ αυθαίρετη σταθερά, γωνία φάσεως). Ζητούνται: (α:4) Να προσδιορισθούν οι ιδιοσυχνότητες $\omega = \omega_k$ καθώς και τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_k$ (που συχνά στις ταλαντώσεις καλούνται και φυσικοί τρόποι ταλαντώσεως ή ιδιομορφές ταλαντώσεως) θεωρώντας ότι $\varphi_{1k} = 1$ χάριν της κανονικοποίησης) για τις παρούσες ελεύθερες και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεις (μάλλον ιδιοταλαντώσεις, αφού δεν έχουν καθορισθεί αρχικές συνθήκες). Είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθεί και το βοηθητικό σύμβολο $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ αν και αυτό στερείται φυσικής σημασίας στην παρούσα άσκηση. (β:2) Επομένως ποια ακριβώς είναι η γενική λύση \mathbf{u} του εξεταζόμενου συστήματος διαφορικών εξισώσεων; (γ:1) Πόσες συνολικά αυθαίρετες σταθερές περιέχονται στη λύση αυτή; Είναι λογικός ο αριθμός αυτός των αυθαιρέτων σταθερών; Γιατί; Πώς μπορούν να προσδιορισθούν οι σταθερές αυτές; (δ:3) Τέλος ζητείται να ελεγχθεί η ορθογωνιότητα (εάν ισχύει βέβαια) των ιδιοδιανυσμάτων $\boldsymbol{\varphi}_k$ ως προς τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και στιβαρότητας \mathbf{K} στο παρόν σύστημα μαζών-ελατηρίων.

ΑΣΚΗΣΗ A173 (Κεφάλαια A12, A13, Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση: Συστήματα Μαζών-Ελατηρίων): Συνεχίζουμε εδώ τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Θα ασχοληθούμε τώρα και με μια τρίτη μέθοδο επίλυσης συστημάτων συζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που είναι διαφορετική από τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και την τριγωνομετρική αντικατάσταση. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις ιδιομορφές ταλαντώσεως $\boldsymbol{\varphi}_k$ που ήδη βρέθηκαν στην προηγούμενη άσκηση. Πιο συγκεκριμένα στην παρούσα άσκηση ζητούνται: (α:6) Να γίνει η αποσύζευξη του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή να βρεθούν οι αποσυσζευγμένες (δηλαδή χωριστές για κάθε άγνωστη συνάρτηση) διαφορικές εξισώσεις ως προς τις νέες άγνωστες συναρτήσεις $q_{1,2}(t)$ (υποθέτοντας και πάλι ότι $\varphi_{1k} = 1$) θέτοντας

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t)$$

με $\mathbf{q}(t)$ το διάνυσμα των νέων άγνωστων συναρτήσεων. Πώς ακριβώς μπορεί να προσδιορισθεί το σταθερό μητρώο $\boldsymbol{\Phi}$, δηλαδή το μητρώο των ιδιομορφών (ή φυσικών τρόπων) ταλαντώσεως; (β:2) Να λυθούν οι αποσυσζευγμένες διαφορικές εξισώσεις ως προς τις νέες άγνωστες συναρτήσεις $q_{1,2}(t)$ στο διάνυσμα $\mathbf{q}(t)$ με εύρεση των σχετικών γενικών λύσεων. (γ:3) Με βάση τη γενική λύση $\mathbf{q}(t)$ του προηγούμενου ερωτήματος, να βρεθεί η γενική λύση $\mathbf{u}(t)$ του αρχικού συστήματος των συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων. (δ:1) Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας ασκήσεως και της προηγούμενης ασκήσεως ως προς τη γενική λύση $\mathbf{u}(t)$. Υπάρχει συμφωνία ή όχι;

A8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

A8.1. Δοκοί

ΑΣΚΗΣΗ A174 (Κεφάλαιο A1, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις συνήθους δοκού οι χωρικές συνιστώσες (τα προσημασμένα εύρη) $X(x)$ των ταλαντώσεων αυτών έχουν πάντοτε τη μορφή της συναρτήσεως

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x.$$

Το β υποτίθεται ότι είναι γνωστή θετική σταθερά. Υποθέτουμε επίσης τις σταθερές A, B, C και D (όχι όμως και τη σταθερά β) αυθαίρετες. Ζητούνται: (α:6) Η γενική και ενιαία διαφορική εξίσωση που επαληθεύουν όλες αυτές οι συναρτήσεις $X(x)$. (β:2) Είναι γνωστός ο τύπος που δίνει τη σταθερά β :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}.$$

Στον τύπο αυτό ρ είναι η πυκνότητα (όγκου) του υλικού της δοκού και A το εμβαδόν της διατομής της: άρα ρA είναι η γραμμική πυκνότητα της δοκού. Επίσης ω είναι η κυκλική συχνότητα των ιδιοταλαντώσεων της. Τέλος E είναι το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της και I (γεωμετρική) ροπή αδρανείας της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονά της Oz : άρα EI είναι η δυσκαμψία της δοκού. Σύμφωνα με αυτά ποια προκύπτει ότι είναι η συνηθισμένη μονάδα μετρήσεως της σταθεράς β ;

ΑΣΚΗΣΗ A175 (Κεφάλαια A1, A5, A9, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε το πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων συνήθους δοκού σταθερής γραμμικής πυκνότητας ρA και σταθερής δυσκαμψίας EI με ιδιοσυχνότητα ω . Η δοκός καταπονείται επίσης από αξονικό θλιπτικό φορτίο N . Για τον προσημασμένο χωρικό παράγοντα $X(x)$ του βέλους κάμψεως $v_b(x, t)$ της δοκού αυτής προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$EI \frac{d^4 X(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \rho A \omega^2 X(x) = 0.$$

Ζητούνται: (α:1) Ο υπολογισμός του άριστου ολοκληρώματος της συναρτήσεως $\cosh ax$ (με το a σταθερά). (β:2) Ο υπολογισμός της γενικής λύσεως $X_g(x)$ της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως σε εκθετική μορφή με την κατάλληλη εισαγωγή των δύο συμβόλων (πραγματικών αριθμών) α και γ , έτσι ώστε οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως να είναι των μορφών: $\mu_{1,2} = \pm \alpha$ και $\mu_{3,4} = \pm i\gamma$. (γ:2) Η αντίστοιχη πραγματική μορφή $X_{gr}(x)$ της λύσεως $X_g(x)$ με τη χρήση μόνο υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. (δ:3) Με τη χρήση κατάλληλης ορίζουσας και γνωστών ιδιοτήτων των οριζουσών η απόδειξη ότι το σύστημα (ή το σύνολο) των λύσεων που υπεισέρχονται στη γενική πραγματική λύση $X_{gr}(x)$ του προηγούμενου ερωτήματος αποτελεί στ' αλήθεια ένα θεμελιώδες σύστημα (ή θεμελιώδες σύνολο) λύσεων της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A176 (Κεφάλαια A10, A11, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Στην άσκηση αυτή ζητούνται: (α:1) Με τη χρήση της γνωστής γραμμικής ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως

$$F_2(x) = \frac{1}{2\beta^2} (\cosh \beta x - \cos \beta x)$$

με το β γνωστή σταθερά. (Οι μετασχηματισμοί Laplace των δύο συναρτήσεων $\cosh \beta x$ και $\cos \beta x$ θεωρούνται γνωστοί.) Με τη χρήση άλλων (δηλαδή διαφορετικών) ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace (όχι της γραμμικής ιδιότητας ούτε απευθείας!) να υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace (β:1) της συναρτήσεως

$$F_3(x) = \frac{1}{2\beta} (\sinh \beta x + \sin \beta x)$$

και (γ:1) της συναρτήσεως

$$F_4(x) = \frac{1}{2} (\cosh \beta x + \cos \beta x).$$

Επίσης (δ:1) της συναρτήσεως

$$F_1(x) = \frac{1}{2\beta^3} (\sinh \beta x - \sin \beta x).$$

(ε:4) Με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace για τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = p^*(x)$$

με το σύμβολο $p^*(x)$ να δηλώνει μια αυθαίρετη γνωστή συνάρτηση και με τις τέσσερις αρχικές τιμές $X(0)$, $X'(0)$, $X''(0)$ και $X'''(0)$ γνωστές σταθερές (ή αυθαίρετες σταθερές) ζητείται η λύση της με τη βοήθεια των συμβόλων (των συναρτήσεων) $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ και $F_4(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ A177 (Κεφάλαιο A9, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ εξετάζουμε μια αμφίπακτη συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις. Για την αμφίπακτη αυτή δοκό θεωρούμε γνωστή τη συνάρτηση $X(x)$ του προσημασμένου εύρους των ιδιοταλαντώσεων της:

$$X(x) = X(0)F_4(x) + X'(0)F_3(x) + X''(0)F_2(x) + X'''(0)F_1(x)$$

με όλες τις ποσότητες σ' αυτήν ακριβώς όπως έχουν ορισθεί στην προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται: (α:2) Η χαρακτηριστική εξίσωση $f(\beta) = 0$ για τις ιδιοτιμές β_n της σταθεράς β χωρίς τη χρήση ορίζουσας στην τελική απλοποιημένη υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή της και (β:2) ανάλογα με τη χρήση ορίζουσας δευτέρας τάξεως. (γ:1) Πώς προσδιορίζονται οι κυκλικές ιδιοσυχνότητες ω_n της παρούσας αμφίπακτης δοκού σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις από τις ιδιοτιμές β_n ; (Γι' αυτό και η πιο πάνω εξίσωση $f(\beta) = 0$ καλείται και εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων ή απλούστερα εξίσωση συχνοτήτων.) (δ:1) Να βρεθούν οι προσεγγιστικές τιμές $\tilde{\beta}_n \approx \beta_n$ των ιδιοτιμών β_n για κάπως μεγάλες τιμές του n (ας πούμε για $n \geq 4$) και επίσης (ε:1) οι αντίστοιχες προσεγγιστικές ιδιοσυχνότητες $\tilde{\omega}_n \approx \omega_n$. (στ:1) Τέλος να γίνει ο έλεγχος του τελευταίου αυτού τύπου από απόψεως μονάδων.

ΑΣΚΗΣΗ A178 (Κεφάλαια A5, A9, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις συνήθους δοκού γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με το } \beta \text{ σταθερά.}$$

Ζητούνται: (α:1) Απλά να αναφερθεί ο τύπος για τη σταθερά β . (β:1) Η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως με τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και (γ:1) η μετατροπή της σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή. (δ:4) Από την υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή ειδικά για **αμφίπακτη δοκό** μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) η εύρεση (με οποιοδήποτε τρόπο) της χαρακτηριστικής εξισώσεως για τη σταθερά β : της **εξισώσεως ιδιοσυχνοτήτων** (ή πιο απλά **εξισώσεως συχνοτήτων**). (ε:1) Με μια ιδιοτιμή β_n ήδη γνωστή πώς μπορεί να προσδιορισθεί κι η αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα ω_n της δοκού;

ΑΣΚΗΣΗ A179 (Κεφάλαια A1, A5, A9, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού στη Δυναμική των Κατασκευών. Πιο συγκεκριμένα μια αμφιέρειστη συνήθους δοκός κατά μήκος του άξονα Ox μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), σταθερής κατά μήκος της δυσκαμψίας EI και επίσης σταθερής γραμμικής πυκνότητας (μάζας ανά μονάδα μήκους) ρA εκτελεί μικρές εγκάρσιες ιδιοταλαντώσεις με κυκλική συχνότητα ω . Το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού (με x τη θέση και t το χρόνο) αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής

$$v = v(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \alpha)$$

(με τη γωνία φάσεως α σταθερή), όπου η συνάρτηση $X(x)$ του εύρους των καμπτικών αυτών ιδιοταλαντώσεων (η ιδιομορφή ταλαντώσεων) ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{και} \quad \text{με} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}.$$

Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης και η γραφή της με τη χρήση του σχετικού διαφορικού τελεστή D . (β:2) Η γενική λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης. (γ:3) Λαμβανομένου υπόψη ότι η δοκός έχει υποτεθεί αμφιέριστη, θα πρέπει ασφαλώς τόσο το βέλος κάμψεως v όσο και η ροπή κάμψεως M να μηδενίζονται και στα δύο άκρα της δοκού $x = 0$ και $x = L$. Τούτο έχει σαν συνέπεια το μηδενισμό της άγνωστης συναρτήσεως $X(x)$ καθώς και της δεύτερης παραγώγου της στα ίδια σημεία. Με την ισχύ αυτών των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών ζητείται τώρα να αποδειχθεί ότι η λύση $X(x)$ του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών, δηλαδή η ιδιομορφή $X(x)$ της καμπτικής ιδιοταλαντώσεως της αμφιέριστης δοκού, είναι υποχρεωτικά της τόσο απλής τριγωνομετρικής μορφής

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L,$$

με το A_n πραγματική σταθερά και το n οποιοδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό. (δ:2) Τέλος να αναφερθεί ρητά ποιες ακριβώς είναι οι αντίστοιχες κυκλικές ιδιοσυχνότητες ω_n στην παρούσα καμπτική ιδιοταλάντωση της αμφιέριστης δοκού που εξετάσαμε.

A8.2. Υδατόπυργοι

ΑΣΚΗΣΗ A180 (Κεφάλαια A1, A2, A3, A5, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί, Δυναμική των Κατασκευών: Υδατόπυργοι): Θεωρούμε συνήθη πρόβολο μήκους L και δυσκαμψίας EI πακτωμένο στο αριστερό άκρο του $x = 0$. Η φόρτίσή του είναι απλά συγκεντρωμένη δύναμη P στο δεξιό άκρο του $x = L$. Ζητούνται: (α:1) Η απόδειξη του τύπου $M(x) = P(L - x)$ για τη ροπή κάμψεως. (β:1) Με βάση τη σχετική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (με $M(x)$ δεξιά) η εύρεση του βέλους κάμψεως $v(x)$ του προβόλου, που σχηματίζει την ελαστική γραμμή του. (γ:1) Η επαλήθευση της συναρτήσεως $v(x)$ ως προς τη διαφορική εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες στην πάκτωση $x = 0$. (δ:1) Η απόδειξη ότι το βέλος κάμψεως δ στο ελεύθερο άκρο του προβόλου δίνεται από τον τύπο $\delta = PL^3/(3EI)$, οπότε $P = k\delta$ με $k := 3EI/L^3$. (ε:1) Η λεπτομερής εξήγηση σε τι μοιάζει ο πρόβολος αυτός με ένα κοινό ελατήριο. (στ:1) Σε υδατόπυργο: μια δεξαμενή νερού στο πάνω άκρο κατακόρυφου υποστυλώματος ύψους h και δυσκαμψίας EI πακτωμένου στο κάτω άκρο του και με τη μάζα του υποστυλώματος προσεγγιστικά αμελητέα (αβαρές υποστύλωμα) με τη χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα να αποδειχθεί η ισχύς της διαφορικής εξίσώσεως

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{mh^3}},$$

με $u(t)$ την οριζόντια μετατόπιση της δεξαμενής και m τη μάζα της μαζί με το νερό. (ζ:1) Απλά να γραφεί (όχι να βρεθεί!) η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσώσεως. (η:1) Με τις ποσότητες m και h καθώς και την περίοδο T των ιδιοταλαντώσεων του υδατόπυργου γνωστές (η δεξαμενή του νερού υποτίθεται γεμάτη) πόση είναι η δυσκαμψία EI του υποστυλώματος του υδατόπυργου;

ΑΣΚΗΣΗ A181 (Κεφάλαια A2, A3, Δυναμική των Κατασκευών: Υδατόπυργοι): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για την αμέσως παραπάνω διαφορική εξίσωση ως προς την οριζόντια μετατόπιση $u(t)$ (κάθετα στο κατακόρυφο υποστύλωμα) της δεξαμενής του υδατόπυργου ζητούνται επίσης: (α:1) Με πολλαπλασιασμό της επί $2\dot{u}(t)$ η αναγωγή της με ολοκλήρωση από διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$\dot{u}^2(t) + \omega_0^2 u^2(t) = C_1 \quad \text{με το } C_1 \text{ αυθαίρετη σταθερά.}$$

(β:2) Η γενική λύση $t = t(u)$ της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης με χρήση και του γνωστού τύπου

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1} \frac{x}{a} + C \quad \text{με} \quad \cos^{-1} y \equiv \arccos y.$$

(γ:2) Η λυμένη μορφή $u = u(t)$ της ίδιας γενικής λύσεως (με διαφορά φάσεως). (δ:2) Η μετατροπή της στην πλήρη μορφή της (χωρίς διαφορά φάσεως). (ε:1) Τέλος η επαλήθευση της τελευταίας μορφής της γενικής λύσεως ως προς την αρχική γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως.

ΑΣΚΗΣΗ A182 (Κεφάλαια A1, A10, A11, Δυναμική των Κατασκευών: Υδατόπυργοι: Σεισμική Φόρτιση): Εδώ θεωρούμε υδατόπυργο, δηλαδή δεξαμενή για νερό όγκου V που στηρίζεται στο πάνω άκρο κατακόρυφου υποστυλώματος (ή στύλου) ύψους h και δυσκαμψίας EI με πάκτωση στη γη στο κάτω άκρο του. Ο υδατόπυργος αυτός προσεγγίζεται από μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας $m + M$ (με m τη μάζα της δεξαμενής και M τη μάζα του νερού σ' αυτήν με $0 \leq M \leq M_0$ και $M_0 = \rho V$ τη μέγιστη μάζα νερού με ρ την πυκνότητά του) και σταθεράς του υποστυλώματος $k = 12EI/h^3$. Το υποστυλωμα θεωρείται εδώ προσεγγιστικά αβαρές. Για οριζόντια κίνηση του εδάφους με επιτάχυνση $a_g(t) \equiv \ddot{u}_g(t)$ (που μετρείται με επιταχυνσιόμετρο), π.χ. σε σεισμό ή σε κραδασμούς του εδάφους από διάφορες αιτίες, ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί η ισχύς της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 u_r(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_r(t) = -a_g(t) \quad \text{με} \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

εδώ ειδικά με $u_r(t)$ τη σχετική μετατόπιση της δεξαμενής του υδατόπυργου ως προς το έδαφος. Στο μετασχηματισμό Laplace (β:1) να αποδειχθεί ο τύπος

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = -U'(s) \quad \text{με} \quad U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$

και με χρήση του οι τύποι

$$(\gamma:1) \quad \mathcal{L}\{t \cos \omega_0 t\} = \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad \text{και} \quad (\delta:1) \quad \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t\} = \frac{2\omega_0^3}{(s^2 + \omega_0^2)^2}.$$

(ε:2) Τώρα στην περίπτωση που

$$a_g(t) = A \sin \omega_0 t$$

να βρεθεί με χρήση του προηγούμενου τύπου η λύση $u_r(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες. (στ:2) Τέλος με γνωστά τον όγκο V της δεξαμενής του υδατόπυργου και την πυκνότητα του νερού ρ (οπότε $M_0 = \rho V$: γνωστή μάζα) καθώς και τις ιδιοσυχνότητες του υδατόπυργου (i) ω_1 (με άδεια τη δεξαμενή του: μάζα m) και (ii) ω_2 (με γεμάτη τη δεξαμενή του: μάζα $m + M_0$), ποια είναι (πολύ προσεγγιστικά βέβαια) η μάζα m της ίδιας της δεξαμενής;

A8.3. Μονώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως: φόρτιση ανέμου

ΑΣΚΗΣΗ A183 (Κεφάλαιο A14, Δυναμική των Κατασκευών: Μονώροφα Κτίρια: Φόρτιση Ανέμου): Θεωρούμε ένα μονώροφο κτίριο με υποστυλώματα τα οποία υπόκεινται σε κάμψη και με άκαμπτη πλάκα. Το κτίριο αυτό μοντελοποιείται από απλό πλαίσιο διατμήσεως υπό την επίδραση ανέμου σταθερής ταχύτητας V_0 προκύπτει (μετά από γραμμικοποίηση, προσέγγιση) η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k_0 u(t) = A + B[V_0 - \dot{u}(t)]$$

με $t > 0$ και με τις σταθερές m, c, k_0, A, B και V_0 γνωστές θετικές σταθερές. Η άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ δηλώνει την οριζόντια μετατόπιση της άκαμπτης πλάκας του μονώροφου κτιρίου που εξετάζουμε. Οι αρχικές συνθήκες είναι $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. Με τη χρήση της μεθόδου των δυναμοσειρών στο σημείο $t = 0$ ζητούνται: (α:5) Ο γενικός αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό της σταθεράς a_{n+2} συναρτήσει των δύο προηγούμενων της a_{n+1} και a_n . (β:3) Ο λεπτομερής προσδιορισμός των τριών πρώτων σταθερών a_0, a_1 και a_2 με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

A8.4. Μονώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως: σεισμική φόρτιση

ΑΣΚΗΣΗ A184 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Δυναμική των Κατασκευών: Μονώροφα Κτίρια: Σεισμική Φόρτιση): Στη Δυναμική των Κατασκευών θεωρούμε μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως που κατά τη διάρκεια σεισμού καταπονείται από γνωστή οριζόντια κίνηση του εδάφους με μετατόπιση $u_g(t)$, ενώ η αντίστοιχη κίνηση της πλάκας του κτιρίου έχει οριζόντια μετατόπιση $u(t)$ (απόλυτα, όχι ως προς το έδαφος). Ζητούνται: (α:1) Το σχετικό σχήμα. (β:3) Η εύρεση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης (με άγνωστη συνάρτηση τη $u(t)$) σε κτίριο χωρίς απόσβεση με μάζα m που υποτίθεται στο ύψος h της πλάκας, και με συνολικό συντελεστή δυσκαμψίας των υποστυλωμάτων του k . (γ:1) Για δύο υποστυλώματα με δυσκαμψία EI και με ύψος του κτιρίου h κατευθείαν (χωρίς απόδειξη!) ο συντελεστής δυσκαμψίας k . Σε σεισμό για οριζόντια κίνηση του εδάφους με

$$u_g(t) = u_0 \cos \omega_0 t, \quad \text{όπου εδώ} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

και το u_0 είναι μια γνωστή σταθερά, (δ:1) η γενική λύση $u_h(t)$ της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στην εξίσωση του ερωτήματος (β) και (ε:3) η γενική λύση $u_\gamma(t)$ της ίδιας διαφορικής εξίσωσης: πάλι του ερωτήματος (β). (στ:1) Χρησιμοποιείται συχνά ή όχι η εξίσωση αυτή και γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ A185 (Κεφάλαια A1, A5, A6, Δυναμική των Κατασκευών: Μονώροφα Κτίρια: Σεισμική Φόρτιση): Θεωρούμε απλό μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως μάζας m και δυσκαμψίας k το οποίο προσεγγίζεται από ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα: μονώροφο πλαίσιο με ένα μόνο βαθμό ελευθερίας, με ισχυρή απόσβεση. Κατά τη διάρκεια σεισμού η ειδική αυτή ιδεατή κατασκευή καταπονείται από την κίνηση του εδάφους όπου έχει θεμελιωθεί. Η οριζόντια επιτάχυνση του εδάφους κατά το σεισμό είναι $a_g(t)$ με $t \geq 0$ το χρόνο. Η σχετική διαφορική εξίσωση είναι

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -a_g(t)$$

με $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ την ιδιοσυχνότητα του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση συστήματος. Ζητούνται: (α:2) Η λεπτομερής απόδειξη της ισχύος της διαφορικής αυτής εξίσωσης με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. (β:1) Με τη χρήση κατάλληλης οριζουσας η απόδειξη ότι οι δύο συναρτήσεις

$$u_1(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \cosh a_D t \quad \text{και} \quad u_2(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \sinh a_D t$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (γ:1) Η εύρεση της γενικής λύσεως της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με τη χρήση και του συμβόλου $a_D = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$ σε απλοποιημένη εκθετική-υπερβολική μορφή. (δ:4) Με τη χρήση της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων (οι σχετικοί τελικοί τύποι στη μέθοδο αυτή δε θεωρούνται γνωστοί και πρέπει να προσδιορισθούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα!) η εύρεση της γενικής λύσεως $u_\gamma(t)$ της πιο πάνω μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ A186 (Κεφάλαια A10, A11, Δυναμική των Κατασκευών: Μονώροφα Κτίρια: Σεισμική Φόρτιση): Θεωρούμε ένα μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως μάζας m (συγκεντρωμένης στο ύψος της απαραμόρφωτης πλάκας του κτιρίου) χωρίς απόσβεση, δηλαδή με μηδενικό λόγο αποσβέσεως: $\xi = 0$. Το κτίριο προσεγγίζεται από επίπεδο πλαίσιο. Η ιδιοσυχνότητα του κτιρίου είναι ω_0 . Το κτίριο καταπονείται από σεισμό με γνωστή οριζόντια μετατόπιση του εδάφους $u_g(t)$. Άγνωστη συνάρτηση είναι η οριζόντια απόλυτη (όχι ως προς το έδαφος) μετατόπιση $u(t)$ της πλάκας του κτιρίου. Για αυθαίρετη συνάρτηση $u_g(t)$ και με μηδενικές αρχικές συνθήκες ζητούνται: (α:2) Η πλήρης απόδειξη της διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_g(t).$$

(β:1) Ο μετασχηματισμός Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ και (γ:2) η λύση $u(t)$ της διαφορικής εξίσωσης. (δ:1) Πού πάσχει πειραματικά η πιο πάνω διαδικασία; (ε:1) Σύντομη περιγραφή (χωρίς υπολογισμούς) του τι πρέπει να γίνει στη λύση που ήδη βρέθηκε, ώστε να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα του προηγούμενου ερωτήματος. (στ:1) Αντίθετα με τα παραπάνω ποια μέθοδο ακολουθεί στο παρόν πρόβλημα ο Πολιτικός Μηχανικός; Ποια διαφορική εξίσωση χρησιμοποιεί; (με απόδειξη της!)

ΑΣΚΗΣΗ A187 (Κεφάλαια A10, A11, Δυναμική των Κατασκευών: Μονώροφα Κτίρια, Σεισμική Φόρτιση, Ωστική Απόκριση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση με τη διαφορική εξίσωση που αναγράφεται εκεί, τώρα όμως με απόσβεση (θετικός λόγος αποσβέσεως: $\xi > 0$) και σχετικό επιπλέον όρο $+2\xi\omega_0\dot{u}(t)$ στο αριστερό της μέλος. Και πάλι υποθέτουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες και αυθαίρετη οριζόντια μετατόπιση του εδάφους $u_g(t)$ κατά το σεισμό. Ζητούνται επίσης: (α:2) Στο μετασχηματισμό Laplace οι αποδείξεις των τύπων

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = U(s+a) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{tu(t)\} = -U'(s).$$

Ειδικά για ισχυρή απόσβεση (με $\xi > 1$) και με τη χρήση ειδικού βοηθητικού συμβόλου a_D : (β:1) η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$), (γ:1) η ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$) και από αυτήν (δ:1) η λύση $u(t)$ της διαφορικής εξίσωσης (με μηδενικές αρχικές συνθήκες). Στη συνέχεια για κρίσιμη απόσβεση (με $\xi = 1$) ανάλογα: (ε:1) η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$), (στ:1) η ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$) και από αυτήν (ζ:1) η λύση $u(t)$ της διαφορικής εξίσωσης (συνεχώς με μηδενικές αρχικές συνθήκες).

A8.5. Διώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως

ΑΣΚΗΣΗ A188 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών, Διώροφα Κτίρια): Θεωρούμε διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως που προσεγγίζεται από αντίστοιχο πλαίσιο χωρίς απόσβεση αλλ' ούτε και φόρτιση $\mathbf{p}(t)$. Προκύπτει το ακόλουθο σύστημα των δύο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

Οι μάζες των ορόφων (που θεωρούνται συγκεντρωμένες στα ύψη των πλακών) είναι $m_1 = 3m$ και $m_2 = 2m$. Το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι συμμετρικό με στοιχεία

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{12} = -k_2, \quad k_{22} = k_2 \quad \text{με} \quad k_1 = 2k \quad \text{και} \quad k_2 = k.$$

Οι δύο ποσότητες m και k είναι γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:2) Κατευθείαν από την πιο πάνω μητρωική μορφή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων και με τη χρήση κατάλληλης τριγωνομετρικής αντικατάστασης ο προσδιορισμός του σχετικού ιδιοπροβλήματος: συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. (β:2) Το ίδιο ερώτημα με τη χρήση της μεθόδου της εκθετικής αντικατάστασης και φανταστικής σταθεράς $\mu = i\omega$. (γ:1) Η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων σε μητρωική μορφή και (δ:2) στη συνέχεια η τελική αλγεβρική της μορφή με τη χρήση και του συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. (ε:1) Οι ιδιοσυχνότητες ω_n του κτιρίου που εξετάζουμε.

ΑΣΚΗΣΗ A189 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών, Διώροφα Κτίρια): Εδώ συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:2) Οι δύο ιδιομορφές (ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων) με δεκαδικές προσεγγίσεις και με τη συνηθισμένη κανονικοποίηση του Πολιτικού Μηχανικού. (β:1) Το μητρώο των ιδιομορφών. (γ:1) Η μία επαλήθευση (όχι και η άλλη) της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών ως προς το μητρώο μάζας \mathbf{M} . (δ:1) Δύο σχέδια (με χάρακα) για τις ιδιοταλαντώσεις του κτιρίου με βάση τις δύο ιδιομορφές του και με αριθμητικά δεδομένα ευρών ταλαντώσεων στα ύψη των δύο πλακών. (ε:3) Η απόδειξη της ορθογωνιότητας των δύο ιδιομορφών ιδεατού διώροφου (διώροφο αρκεί!) κτιρίου διατμήσεως για γενικά μητρώα \mathbf{M} και \mathbf{K} , όχι για τα συγκεκριμένα εδώ.

ΑΣΚΗΣΗ A190 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών, Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε τις προηγούμενες δύο ασκήσεις. Ζητούνται: (α:1) Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων χωρίς μητρώα, τώρα όμως και με απόσβεση η οποία χαρακτηρίζεται από αναλογικό μητρώο αποσβέσεως

$$\mathbf{C} = \frac{c}{m} \mathbf{M}$$

με το c γνωστή θετική σταθερά. (β:2) Η αποσύζευξη των διαφορικών εξισώσεων (απλά με τη χρήση συμβόλων και σε μητρική μορφή: χωρίς πολλές πράξεις). (γ:2) Επανερχόμαστε τώρα στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση: $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Ζητούνται οι μετασχηματισμοί Laplace $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}$ και $U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\}$ με τη χρήση των αρχικών συνθηκών

$$u_1(0) = u_{10}, \quad \dot{u}_1(0) = v_{10}, \quad u_2(0) = u_{20} \quad \text{και} \quad \dot{u}_2(0) = v_{20}$$

χωρίς όμως την αντιστροφή τους. (δ:1) Ποιος είναι ο παρονομαστή $\Delta_L(s)$ στους μετασχηματισμούς αυτούς Laplace; (ε:1) Πώς θα μπορούσε να παραγοντοποιηθεί με σύμβολα (χωρίς ακριβή νούμερα); (στ:1) Τι σοβαρή (αλλά θετική!) συνέπεια έχει μια τέτοια παραγοντοποίηση στους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace $u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\}$ και $u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\}$;

ΑΣΚΗΣΗ A191 (Κεφάλαια A13, A18, Δυναμική των Κατασκευών, Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε τις προηγούμενες τρεις ασκήσεις. Κατ' αρχήν (α:1) με γνωστό το μετασχηματισμό Fourier $U(\omega)$ συναρτήσεως $u(t)$ ζητείται ο μετασχηματισμός Fourier της συναρτήσεως $e^{-i\omega_0 t} u(t)$ με το ω_0 γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται επίσης: (β:1) Το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων χωρίς τη χρήση μητρώων για το δώροφο κτίριο διατμήσεως που εξετάζεται (χωρίς απόσβεση), αλλά τώρα με εξωτερικές φορτίσεις $p_1(t)$ και $p_2(t)$ για τις πλάκες των δύο ορόφων. (Να παραμείνουν τα σύμβολα m και k .) (γ:2) Με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή του σε σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (χωρίς να λυθεί αυτό). (δ:2) Ο παρονομαστής $D_F(\omega)$ στη λύση $U_1(\omega)$ και $U_2(\omega)$ και (ε:2) Οι ιδιοσυχνότητες του κτιρίου ω_1 και ω_2 . Στα δύο τελευταία ερωτήματα να χρησιμοποιηθεί και το βοηθητικό σύμβολο $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

ΑΣΚΗΣΗ A192 (Κεφάλαια A13, A16, Δυναμική των Κατασκευών, Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε τώρα τις προηγούμενες τέσσερις ασκήσεις. Κατ' αρχήν (α:2) στις τριγωνομετρικές σειρές Fourier να αποδειχθεί η ορθογωνιότητα των δύο περιοδικών συναρτήσεων

$$\cos \frac{2m\pi t}{T} \quad \text{και} \quad \sin \frac{2n\pi t}{T} \quad \text{με τα } m \text{ και } n \text{ δύο θετικούς αριθμούς}$$

στο διάστημα $[0, T]$ μιας περιόδου τους. Υποδειξη: Δίνονται οι δύο γνωστοί τριγωνομετρικοί τύποι

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha.$$

(β:2) Με τη μέθοδο της απαλοιφής να αποδειχθεί ότι το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων, αλλ' εδώ και με φόρτιση $\mathbf{p}(t)$, δηλαδή το σύστημα

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$$

μπορεί να αναχθεί σε δύο αποσυσζευγμένες διαφορικές εξισώσεις με την πρώτη να έχει τη μορφή

$$A \frac{d^4 u_1(t)}{dt^4} + B \frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} + \Gamma u_1(t) = g(t)$$

με τα A , B και Γ κατάλληλες σταθερές και το $g(t)$ γνωστή συνάρτηση. (γ:3) Για την πιο πάνω διαφορική εξίσωση με την υπόθεση ότι η συνάρτηση $g(t)$ στο δεξιό μέλος της είναι περιοδική με περίοδο T και επίσης άρτια να υπολογισθεί η μερική λύση $u_{1p}(t)$ που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $g(t)$ σαν κατάλληλη τριγωνομετρική σειρά Fourier. (δ:1) Ποια είναι η σχετική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας $G(\omega)$ ή $H(\omega)$; (Το $H(\omega)$ είναι άλλο σύμβολο για την ίδια ακριβώς συνάρτηση αποκρίσεως.)

ΑΣΚΗΣΗ A193 (Κεφάλαιο A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Σε ένα δώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως οι μάζες των δύο ορόφων είναι $m_1 = 2m$ (του πρώτου) και $m_2 = m$ (του δευτέρου). Για τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας \mathbf{K} έχουμε $k_{11} = 3k$, $k_{12} = -k$, $k_{22} = k$. (Τα m και k είναι γνωστές σταθερές.) Οι δύο ιδιομορφές ταλαντώσεως του κτιρίου $\boldsymbol{\varphi}_1 = [1 \ 2]^T$ και $\boldsymbol{\varphi}_2 = [-1 \ 1]^T$ (ή με ισοδύναμο συμβολισμό $\boldsymbol{\varphi}_1 = \langle 1 \ 2 \rangle^T$ και $\boldsymbol{\varphi}_2 = \langle -1 \ 1 \rangle^T$) θεωρούνται εδώ γνωστές. Ζητούνται: (α:1) Το μητρώο γενικευμένων μαζών \mathbf{M}_d . (β:1) Το μητρώο γενικευμένων

δυσκαμφιών \mathbf{K}_d . (γ:1) Από αυτά και με $\omega_0 := \sqrt{k/m}$ οι ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 του διώροφου κτιρίου (με $\omega_1 < \omega_2$). (δ:1) Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για τις δύο οριζόντιες μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ των πλακών με φόρτιση $\mathbf{p}(t) = [p_1(t) \ p_2(t)]^T$ (ή με ισοδύναμο συμβολισμό $\mathbf{p}(t) = \langle p_1(t) \ p_2(t) \rangle^T$). (ε:2) Χωρίς απόδειξη (κατευθείαν!) το αποσυζευγμένο ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. (στ:2) Από αυτό ξανά οι δύο ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 του κτιρίου.

ΑΣΚΗΣΗ A194 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Σε ένα διβάθμιο μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού (εδώ διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως) σε εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις προκύπτει (σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα) το ακόλουθο σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων (σε μητρική μορφή):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}$$

με $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ το διάνυσμα των μετατοπίσεων $u_{1,2}(t)$ και $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ το διάνυσμα των φορτίσεων $p_{1,2}(t)$. Το μητρώο \mathbf{M} είναι το σταθερό και διαγώνιο μητρώο μάζας με διαγώνια στοιχεία $m_{11} = 3m$, $m_{22} = 2m$ με το m γνωστή σταθερά μάζας. Το μητρώο \mathbf{K} είναι το σταθερό και συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας με στοιχεία $k_{11} = 4k$, $k_{12} = k_{21} = -2k$, $k_{22} = 3k$ με το k γνωστή σταθερά δυσκαμψίας. Προς διευκόλυνση ζητείται και η συνεχής και υποχρεωτική χρήση του συμβόλου (βοηθητικής κυκλικής συχνότητας) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ αντί (στη θέση) της σταθεράς δυσκαμψίας k . Ζητούνται: (α:1) Η γραφή του πιο πάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων σε μη μητρική (συνηθισμένη) μορφή με τη χρήση του συμβόλου ω_0 και με τη μάζα m στους παρονομαστές των δεξιών μελών. (β:5) Με το αντίστοιχο ομογενές σύστημα (δηλαδή με $p_{1,2}(t) = 0$) η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων (ή φυσικών κυκλικών συχνοτήτων) ταλαντώσεως $\omega_{1,2}$ (τελικά με τέσσερα δεκαδικά ψηφία) του μηχανικού αυτού συστήματος υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (δηλαδή με την κατάλληλη χρήση της εκθετικής συναρτήσεως) για τις άγνωστες μετατοπίσεις $u_{1,2}(t)$, αφού πρώτα βρεθεί και επιλυθεί η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση $p_4(\mu) = 0$ (ως προς τη σχετική μεταβλητή μ). (γ:2) Παριστάνει πραγματικά το πιο πάνω σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού ή όχι; Γιατί ακριβώς;

ΑΣΚΗΣΗ A195 (Κεφάλαια A13, A19, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για το μη ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων εκεί ζητούνται: (α:3) Η εύρεση των μετασχηματισμών Fourier $U_{1,2}(\omega)$ των δύο άγνωστων συναρτήσεων $u_{1,2}(t)$ με τις δύο συναρτήσεις φορτίσεως $p_{1,2}(t)$ γνωστές αυθαίρετες συναρτήσεις που διαθέτουν μετασχηματισμούς Fourier. (β:5) Η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων ταλαντώσεως $\omega_{1,2}$ του κτιρίου με βάση το ερώτημα (α).

ΑΣΚΗΣΗ A196 (Κεφάλαια A13, A17, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε την προπροηγούμενη άσκηση. Στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων εκεί θεωρούμε τώρα πως υφίσταται μόνο η φόρτιση $p_1(t)$, η οποία υποτίθεται μάλιστα ότι είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T . Δεν υπάρχει φόρτιση $p_2(t)$: $p_2(t) = 0$. Εδώ ζητούνται: (α:1) Η μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier της μόνης φορτίσεως $p_1(t)$ και οι σχετικοί γενικοί τύποι για τους συντελεστές της c_n (με ολοκληρώσεις στο διάστημα $[0, T]$). (β:2) Οι μερικές αποκρίσεις $u_{p1}(t)$ και $u_{p2}(t)$ του μηχανικού συστήματος (δηλαδή οι συνηθισμένες μερικές λύσεις του μη ομογενούς συστήματος των διαφορικών εξισώσεων χωρίς τις γενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος) για μιγαδική «φόρτιση» $p_1(t) = e^{i\omega t}$ κυκλικής συχνότητας ω διαφορετικής όμως από τις ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2}$ του μηχανικού συστήματος (ενώ υποθέτουμε ότι $p_2(t) = 0$). (γ:2) Οι αντίστοιχες αποκρίσεις $u_{1,2}(t)$ για την αληθινή φόρτιση $p_1(t)$ (με $p_2(t) = 0$ πάλι) με τη μιγαδική σειρά Fourier της $p_1(t)$ να θεωρείται γνωστή. (δ:3) Οι μιγαδικές συναρτήσεις αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας $G_1(\omega)$ (ή $H_1(\omega)$) και $G_2(\omega)$ (ή $H_2(\omega)$) για το παρόν διβάθμιο μηχανικό σύστημα (με δύο βαθμούς ελευθερίας: $u_1(t)$ και $u_2(t)$) και πάλι μόνο υπό τη φόρτιση $p_1(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A197 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Θεωρούμε συνηθισμένο ιδεατό διώροφο κτίριο διατμήσεως με μάζες (τις υποθέτουμε στα ύψη των

πλακών) του πρώτου ορόφου $m_1 = 4m$ και του δεύτερου ορόφου $m_2 = 3m$ (με το σύμβολο m να δηλώνει γνωστή μάζα). Το σχετικό συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας έχει στοιχεία $k_{11} = 3k$, $k_{12} = k_{21} = -2k$ και $k_{22} = 2k$ (με το σύμβολο k να δηλώνει γνωστή σταθερά δυσκαμψίας). Το κτίριο θεωρείται ότι εκτελεί ιδιοταλαντώσεις και, γενικότερα, ελεύθερες ταλαντώσεις. Ζητούνται: (α:1) Το σύστημα των σχετικών διαφορικών εξισώσεων σε μορφή με μητρώα και από αυτή (β:1) Σε συνηθισμένη μορφή χωρίς μητρώα υποχρεωτικά με τη χρήση και της βοηθητικής σταθεράς $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. (γ:4) Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης να εφαρμόζεται κατευθείαν στο πιο πάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων η εύρεση της σχετικής χαρακτηριστικής εξισώσεως. (δ:1) Χωρίς υπολογισμούς, πόσες αυθαίρετες σταθερές πρέπει να εμφανίζονται στη γενική λύση και πώς μπορούν να προσδιορισθούν πρακτικά; (ε:1) Ποια είναι η τριγωνομετρική μορφή της γενικής λύσεως χωρίς μητρώα και χωρίς καμία προσπάθεια υπολογισμού των σταθερών σ' αυτήν;

ΑΣΚΗΣΗ A198 (Κεφάλαια A12, A13, A18, A19, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια):

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται: (α:3) Η αναγωγή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace (με τις αρχικές συνθήκες u_{10}, v_{10}, u_{20} και v_{20} να υποτίθενται γνωστές) και (β:3) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier (χωρίς αρχικές συνθήκες). (γ:2) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής εξισώσεως $p(\omega) = 0$ για τις ιδιοσυχνότητες του κτιρίου.

ΑΣΚΗΣΗ A199 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Στη Δυναμική των Κατασκευών για διακριτά μηχανικά συστήματα (όπως είναι ένα διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως με τις πλάκες των ορόφων απαραμόρφωτες) προκύπτουν συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Για ελεύθερες ταλαντώσεις αυτά μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

με \mathbf{M} , \mathbf{C} και \mathbf{K} τα συμμετρικά μητρώα μάζας, αποσβέσεως και δυσκαμψίας αντίστοιχα και $\mathbf{u}(t)$ το σχετικό διάνυσμα των οριζοντίων μετατοπίσεων των δύο ορόφων του κτιρίου με $u_1(t)$ να δηλώνει τη μετατόπιση του πρώτου ορόφου και $u_2(t)$ τη μετατόπιση του δεύτερου ορόφου. Στο συγκεκριμένο διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως αυτά έχουν τις εξής συγκεκριμένες εκφράσεις:

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

με τα m και k δύο θετικές σταθερές και με μηδενικό το μητρώο αποσβέσεως \mathbf{C} . Εδώ ζητούνται: (α:4) Με την υπόθεση ότι

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \cos \omega t$$

να προσδιορισθούν οι ιδιοσυχνότητες ω_k καθώς και οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $\boldsymbol{\varphi}_k$ του παρόντος διώροφου κτιρίου (θεωρώντας ότι $\varphi_2 = 1$ χάριν της κανονικοποίησης) για τις παρούσες ελεύθερες ταλαντώσεις, εδώ (χωρίς αρχικές συνθήκες) καλύτερα ιδιοταλαντώσεις. (β:4) Τα σχετικά διαγώνια μητρώα \mathbf{M}_d και \mathbf{K}_d των γενικευμένων μαζών και γενικευμένων δυσκαμψιών αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ A200 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια):

Εδώ συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση ξανά με μηδενικό το μητρώο αποσβέσεως \mathbf{C} . Ζητούνται: (α:6) Πρώτα-πρώτα να γίνει η αποσύζευξη του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή να βρεθούν οι αποσυσζευγμένες, δηλαδή χωριστές για κάθε άγνωστη συνάρτηση, διαφορικές εξισώσεις ως προς τις νέες άγνωστες συναρτήσεις $q_1(t)$ και $q_2(t)$ υποθέτοντας και πάλι ότι $\varphi_2 = 1$ για το εύρος των οριζόντιων μετατοπίσεων του δεύτερου ορόφου του κτιρίου και θέτοντας

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

με $\mathbf{q}(t)$ το διάνυσμα των νέων αγνώστων συναρτήσεων. Πώς ακριβώς μπορεί να προσδιορισθεί το σταθερό μητρώο $\boldsymbol{\Phi}$, δηλαδή το μητρώο των ιδιομορφών (ή των τρόπων ταλαντώσεως) σε

μια κατασκευή; Ποια έκφραση έχουν τελικά (χωρίς απόδειξη) οι άγνωστες συναρτήσεις $q_k(t)$ στο διάνυσμα $\mathbf{q}(t)$, δηλαδή ποιες γενικές μορφές έχουν οι λύσεις των αποσυσζευγμένων διαφορικών εξισώσεων; (β:6) Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχει (ακριβώς στα προηγούμενα ερωτήματα) επιπλέον και απόσβεση των ιδιοταλαντώσεων με σχετικό (και επίσης συμμετρικό) μητρώο το μητρώο

$$\mathbf{C} = c \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(με το c γνωστή θετική σταθερά), ζητείται να ελεγχθεί μαθηματικά (με πράξεις) κατά πόσον συνεχίζει να ισχύει η αποσυσζευξη των αρχικών διαφορικών εξισώσεων με την εισαγωγή των νέων αγνώστων συναρτήσεων $q_k(t)$ αντί για τις αρχικές συναρτήσεις $u_k(t)$ ή όχι. Πρόκειται επομένως για κλασική ή για μη κλασική απόσβεση (με το επίπθετο κλασική να χαρακτηρίζει την περίπτωση της δυνατότητας αποσυσζεύξεως και τη φράση μη κλασική την αδυναμία αποσυσζεύξεως);

ΑΣΚΗΣΗ A201 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Σε ένα διβάθμιο μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού, συγκεκριμένα εδώ σε ένα διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως σε εξαναγκασμένες κταλαντώσεις προκύπτει (σύμφωνα με το γνωστό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα) το ακόλουθο σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων (σε μητρωϊκή μορφή):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad \text{με} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

το διάνυσμα των μετατοπίσεων $u_{1,2}(t)$ και $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ το διάνυσμα των φορτίσεων (εξωτερικών δυνάμεων) $p_{1,2}(t)$. Το μητρώο \mathbf{M} είναι το σταθερό και διαγώνιο μητρώο μάζας με διαγώνια στοιχεία

$$m_{11} = 5m \quad \text{και} \quad m_{22} = m$$

με το m γνωστή σταθερά άζας. Το μητρώο \mathbf{K} είναι το σταθερό και συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας με στοιχεία

$$k_{11} = 10k, \quad k_{12} = k_{21} = -3k \quad \text{και} \quad k_{22} = 2k$$

με το k γνωστή σταθερά δυσκαμψίας. Προς διευκόλυνση ζητείται και η συνεχής και υποχρεωτική χρήση του συμβόλου (της βοηθητικής και χωρίς φυσική σημασία κυκλικής συχνότητας) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ στη θέση της σταθερής δυσκαμψίας k . Ζητούνται: (α:2) Η γραφή του πιο πάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων σε μη μητρωϊκή (συνηθισμένη) μορφή με χρήση του συμβόλου ω_0 και με τη μάζα m στους παρονομαστές των δεξιών μελών. (β:4) Για το αντίστοιχο ομογενές σύστημα, δηλαδή με $p_{1,2}(t) = 0$, η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων (ή φυσικών κυκλικών συχνοτήτων) ταλαντώσεως $\omega_{1,2}$ (τελικά με τρία δεκαδικά ψηφία) του παρόντος κτιρίου υποχρεωτικά με εκθετικές αντικαταστάσεις (εννοείται με την κατάλληλη χρήση της εκθετικής συναρτήσεως) για τις άγνωστες μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$, αφού πρώτα βρεθεί και επιλυθεί η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση $p(\mu) = 0$ ως προς τη σχετική μεταβλητή μ . (γ:1) Παριστάνει πραγματικά το πιο πάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων ιδεατό διώροφο κτίριο του Πολιτικού Μηχανικού ή όχι; Γιατί; (δ:1) Από τις ρίζες μ_k της χαρακτηριστικής εξίσωσης $p(\mu) = 0$ επαληθεύεται ότι πραγματικά δεν υπάρχει απόσβεση; Πώς;

ΑΣΚΗΣΗ A202 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:3) Η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1) στην ομογενή μορφή του, δηλαδή με $p_{1,2}(t) = 0$, υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και με τη χρήση των αρχικών συνθηκών $u_k(0) = u_{k0}$ και $\dot{u}_k(0) = v_{k0}$ με $k = 1, 2$ χωρίς όμως την αντιστροφή (εργασία μέχρι την πλήρη εύρεση μόνο) των μετασχηματισμών Laplace $U_{1,2}(s)$ που προκύπτουν. (β:3) Από τους μετασχηματισμούς αυτούς Laplace $U_{1,2}(s)$ (χωρίς αντιστροφή επαναλαμβάνεται!) ζητείται να επαληθευθεί ότι πρόκειται για αποδεκτό διώροφο ιδεατό κτίριο του Πολιτικού Μηχανικού και μάλιστα χωρίς απόσβεση των ταλαντώσεων: σε ελεύθερες ταλαντώσεις. (γ:2) Με την παρούσα μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ποιες προκύπτουν ότι είναι οι σχετικές ιδιοσυχνότητες ταλαντώσεων $\omega_{1,2}$;

ΑΣΚΗΣΗ A203 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις συνεχώς με τη χρήση της σταθεράς $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ζητούνται

τώρα: (α:5) Να βρεθεί μια μερική λύση (ή ειδική λύση) του μη ομογενούς αρχικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων υπό αρμονική φόρτιση της μορφής

$$p_1(t) = p_{0c} \cos \omega t + p_{0s} \sin \omega t \quad \text{και} \quad p_2(t) = 0$$

με τα εύρη p_{0c} και p_{0s} γνωστές σταθερές και την κυκλική συχνότητα φορτίσεως ω επίσης γνωστή και μάλιστα χωρίς συνθήκες συντονισμού. (β:3) Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς του προηγούμενου ερωτήματος, ζητούνται και οι ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2}$ του ιδεατού κτιρίου που εξετάζουμε.

ΑΣΚΗΣΗ A204 (Κεφάλαια A12, A13, A18, A19, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια):

Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις συνεχώς με τη χρήση της σταθεράς $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Στην άσκηση αυτή ζητούνται: (α:5) Η επίλυση του αρχικού μη ομογενούς (με $p_{1,2}(t)$) δύο αυθαίρετες γνωστές φορτίσεις) συστήματος διαφορικών εξισώσεων υποχρεωτικά με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier μέχρι και του σημείου της ευρέσεως των μετασχηματισμών Fourier $U_{1,2}(s)$ των δύο αγνώστων συναρτήσεων $u_{1,2}(t)$ χωρίς όμως την αντιστροφή τους. (β:3) Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς τους προηγούμενου ερωτήματος, ζητούνται ξανά και οι δύο ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2}$ του διώροφου ιδεατού κτιρίου που εξετάζουμε.

ΑΣΚΗΣΗ A205 (Κεφάλαια A6, A12, A13, A19, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια):

Συνεχίζουμε τις τέσσερις προηγούμενες ασκήσεις συνεχώς με τη χρήση της σταθεράς $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Εδώ ζητούνται: (α:1) Η γραφή του αρχικού (του μη ομογενούς) συστήματος δύο διαφορικών εξισώσεων σε μη μητρωϊκή (συνηθισμένη) μορφή με τη χρήση του διαφορικού τελεστή D . (β:3) Η αναγωγή του σε δύο χωριστές (μη συζευγμένες) διαφορικές εξισώσεις ως προς τις δύο **αρχικές** άγνωστες συναρτήσεις $u_{1,2}(t)$. (γ:2) Από την πρώτη από αυτές (ως προς $u_1(t)$) η εύρεση ξανά των ιδιοσυχνοτήτων ταλαντώσεως $\omega_{1,2}$. (δ:2) Για την ίδια διαφορική εξίσωση, που θεωρείται εδώ μεμονωμένη σαν να αφορούσε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα, να βρεθεί με οποιοδήποτε τρόπο η σχετική μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας ω .

ΑΣΚΗΣΗ A206 (Κεφάλαιο A14, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια):

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για τη διαφορική εξίσωση ως προς $u_1(t)$ που προέκυψε εκεί, εδώ όμως στην ομογενή μορφή της, συγκεκριμένα για τη διαφορική εξίσωση

$$(5D^4 + 20\omega_0^2 D^2 + 11\omega_0^4)u_1(t) = 0$$

ζητούνται: (α:7) Η επίλυση της με την κλασική (τη συνήθισμένη) μέθοδο των δυναμοσειρών με τους τέσσερις πρώτους συντελεστές a_k (με $k = 0, 1, 2, 3$) γνωστές σταθερές με βάση τη χρονική στιγμή $t = 0$. Ο σχετικός αναδρομικός (ή επαναληπτικός) τύπος για τον προσδιορισμό της σταθεράς a_k (με $k \geq 4$) αρκεί. (β:1) Γιατί οι πρώτοι τέσσερις συντελεστές a_k υποτίθενται ότι είναι γνωστοί;

ΑΣΚΗΣΗ A207 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια):

Θεωρούμε διώροφο συνηθισμένο ιδεατό κτίριο διατμήσεως που προσεγγίζεται από αντίστοιχο πλαίσιο σε ιδιοταλαντώσεις. Οι μάζες και των δύο ορόφων είναι ίσες με m . Το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι συμμετρικό με στοιχεία $k_{11} = 2k$, $k_{12} = -k$ και $k_{22} = k$. Δεν υπάρχει απόσβεση. Ζητούνται: (α:1) Οι παραδοχές που γίνονται για το κτίριο αυτό. (β:1) Απλά να αναφερθεί ο τύπος που δίνει τη σταθερά k από τα χαρακτηριστικά του κτιρίου. (γ:1) Απλά να αναφερθεί το σχετικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων σε μητρωϊκή μορφή με \mathbf{M} , \mathbf{K} και $\mathbf{u}(t)$. (δ:1) Κατευθείαν από τη μητρωϊκή αυτή μορφή και με μιγαδική εκθετική αντικατάσταση (δηλαδή με $\mu = i\omega$ σ' αυτή) να βρεθεί η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων $D_F(\omega) = 0$ για τις ιδιοσυχνότητες ω του κτιρίου πάλι με \mathbf{M} και \mathbf{K} . (ε:1) Τώρα από τη μητρωϊκή γραφή του σχετικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων στο ερώτημα (γ) να βρεθεί και η συνηθισμένη μορφή του (χωρίς μητρώα) με δύο συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις. (στ:1) Από την τελευταία αυτή μορφή (χωρίς μητρώα) και πάλι με μιγαδική εκθετική αντικατάσταση (δηλαδή με $\mu = i\omega$ σ' αυτήν την εκθετική αντικατάσταση) να βρεθεί ξανά η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων $D_F(\omega) = 0$ για τις ιδιοσυχνότητες ω του κτιρίου, τώρα όμως με τη χρήση ορίζουσας χωρίς μητρώα. (ζ:1) Να γραφεί η προηγούμενη εξίσωση σε συνηθισμένη πολυωνυμική

μορφή με τη χρήση και του βοηθητικού συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ και στη συνέχεια με τη χρήση επιπλέον και του βοηθητικού αγνώστου $\beta = \omega/\omega_0$. (η:1) Με γνωστές τις προσεγγίσεις

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.381966, \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.61803,$$

$$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618034, \quad \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.61803$$

να προσδιορισθούν τα τετράγωνα των λύσεων β^2 και οι ίδιες οι λύσεις β της προηγούμενης εξίσωσης ακριβώς (χωρίς δεκαδικές προσεγγίσεις) και προσεγγιστικά και (θ:1) ανάλογα (και ακριβώς και προσεγγιστικά) και οι δύο ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 του διώροφου κτιρίου με τη γνωστή σειρά τους ξανά με χρήση και της γνωστής ποσότητας ω_0 . (ι:1) Με τη χρήση αυτών των ιδιοσυχνοτήτων να προσδιορισθούν και οι δύο κανονικοποιημένες ιδιομορφές ταλάντωσης του κτιρίου (και ακριβώς και προσεγγιστικά). Τέλος χωρίς πια καθόλου δεκαδικές προσεγγίσεις να ελεγχθεί η πιθανή ορθογωνιότητα των δύο ιδιομορφών που βρέθηκαν ως προς τα μητρώα (ια:1) μάζας \mathbf{M} και (ιβ:1) δυσκαμψίας \mathbf{K} .

ΑΣΚΗΣΗ A208 (Κεφάλαιο A10, A11, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Εδώ συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: Με άμεσους υπολογισμούς και χωρίς δεκαδικές προσεγγίσεις (ακριβώς) (α:1) το μητρώο γενικευμένων μαζών \mathbf{M}_d και ανεξάρτητα (β:1) το μητρώο γενικευμένων δυσκαμψιών \mathbf{K}_d . (γ:2) Με τη χρήση τους το αποσυζευγμένο (διαγωνοποιημένο) σύστημα διαφορικών εξισώσεων τελικά σε συνηθισμένη (μη μητρωϊκή) μορφή ως προς τις κανονικές (ή γενικευμένες) συντεταγμένες $q_1(t)$ και $q_2(t)$. (δ:2) Με γνωστές τις αρχικές συνθήκες $q_1(0) = q_{10}$, $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_{10}$, $q_2(0) = q_{20}$ και $\dot{q}_2(0) = \dot{q}_{20}$ η επίλυσή του τελευταίου συστήματος των αποσυζευγμένων διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε:2) Λεπτομερής εξήγηση για το πώς προσδιορίζονται οι αρχικές αυτές συνθήκες από τις αρχικά διαθέσιμες φυσικές αρχικές συνθήκες $u_1(0) = u_{10}$, $\dot{u}_1(0) = v_{10}$, $u_2(0) = u_{20}$ και $\dot{u}_2(0) = v_{20}$ στις πλάκες των δύο ορόφων του παρόντος διώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως.

ΑΣΚΗΣΗ A209 (Κεφάλαια A12, A13, A14, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Εδώ συνεχίζουμε τις προηγούμενες δύο ασκήσεις. Με χρήση και του συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ζητούνται: (α:2) Στις ελεύθερες ταλαντώσεις του κτιρίου με βάση τη χρονική στιγμή $t = 0$ και με χρήση της μεθόδου των δυναμοσειρών με συντελεστές a_n για τη μετατόπιση $u_1(t)$ της πλάκας του πρώτου ορόφου και b_n για τη μετατόπιση $u_2(t)$ της πλάκας του δεύτερου ορόφου να γραφεί το σύστημα των δύο συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων σε μορφή συστήματος συζευγμένων δυναμοσειρών. (β:5) Από το σύστημα των συζευγμένων δυναμοσειρών να προσδιορισθούν οι αναδρομικοί τύποι για τον υπολογισμό των συντελεστών a_{n+2} και b_{n+2} από τους συντελεστές a_n και b_n (και τους δύο μαζί, επειδή το σύστημα είναι συζευγμένο). (γ:1) Με γνωστές τις αρχικές συνθήκες $u_1(0) = u_{10}$, $\dot{u}_1(0) = v_{10}$, $u_2(0) = u_{20}$ και $\dot{u}_2(0) = v_{20}$ στις πλάκες των δύο ορόφων του κτιρίου να αναφερθεί πώς ακριβώς προσδιορίζονται από αυτές οι πρώτοι συντελεστές των δυναμοσειρών. Έτσι μόνο θα μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν οι αναδρομικοί τύποι.

ΑΣΚΗΣΗ A210 (Κεφάλαια A5, A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια: Σεισμική Φόρτιση): Συνεχίζουμε τις προηγούμενες τρεις ασκήσεις. Με τη χρήση και του συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ζητούνται: (α:4) Σε περίπτωση οριζόντιας κινήσεως του εδάφους (που μερικές φορές οφείλεται σε σεισμούς ή κραδασμούς) με γνωστή επιτάχυνση $a_g(t) = \ddot{u}_g(t)$ κατά τη διεύθυνση του κτιρίου να βρεθεί το σχετικό σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων, που εδώ δε θεωρείται γνωστό. Να δοθούν όλες οι αναγκαίες εξηγήσεις για την κατανόηση του τρόπου σκέψης. (β:4) Στην περίπτωση που $a_g(t) = a_{g0} \cos \omega t$ (με τα a_{g0} και ω δύο γνωστές σταθερές με $\omega \neq \omega_1$ και $\omega \neq \omega_2$, δηλαδή χωρίς συντονισμό) να βρεθεί μια μερική λύση $u_{1p}(t)$ και $u_{2p}(t)$ του αρχικού συζευγμένου συστήματος διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

ΑΣΚΗΣΗ A211 (Κεφάλαια A12, A13, A16, A17, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια: Σεισμική Φόρτιση): Συνεχίζουμε τις προηγούμενες τέσσερις ασκήσεις. Με τη χρήση και του συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ζητούνται: (α:2) Σε περίπτωση οριζόντιας κινήσεως του εδάφους (που μερικές φορές οφείλεται σε σεισμούς ή σε κραδασμούς) με γνωστή τη μετατόπιση $u_g(t)$ κατά τη διεύθυνση του κτιρίου να προσδιορισθεί το σχετικό σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων (με τη μετατόπιση $u_g(t)$, όχι την επιτάχυνση $a_g(t) = \ddot{u}_g(t)$ σ' αυτό), που εδώ δε θεωρείται γνωστό. Να δοθούν και όλες οι αναγκαίες εξηγήσεις για την κατανόηση του τρόπου σκέψης. (β:3) Με την υπόθεση πως η μετατόπιση του εδάφους $u_g(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T και με γνωστή την τριγωνομετρική σειρά Fourier της με συντελεστές a_0, a_n και b_n (με $n = 1, 2, \dots$) να υιοθετηθούν ανάλογες τριγωνομετρικές σειρές Fourier για τις μετατοπίσεις $u_1(t)$ (με συντελεστές a_{10}, a_{1n} και b_{1n}) της πλάκας του πρώτου ορόφου και $u_2(t)$ (με συντελεστές a_{20}, a_{2n} και b_{2n}) της πλάκας του δεύτερου ορόφου. Με τη χρήση τους να αναχθεί το σύστημα των δύο συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα δύο συζευγμένων τριγωνομετρικών σειρών Fourier. Τέλος να βρεθούν τα συστήματα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των συντελεστών (γ:1) a_{10} και a_{20} , (δ:1) a_{1n} και a_{2n} και (ε:1) b_{1n} και b_{2n} (με $n = 1, 2, \dots$) των άγνωστων τριγωνομετρικών σειρών Fourier των οριζόντιων μετατοπίσεων των πλακών των ορόφων $u_1(t)$ και $u_2(t)$ από τη γνωστή τριγωνομετρική σειρά Fourier της οριζόντιας μετατοπίσεως του εδάφους $u_g(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A212 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Εδώ θεωρούμε ιδεατό διώροφο κτίριο διατμήσεως υπό τις συνήθεις παραδοχές που προσεγγίζεται από αντίστοιχο επίπεδο πλαίσιο. Η μάζα του πρώτου ορόφου είναι $m_1 = 3m$ και του δεύτερου ορόφου $m_2 = 2m$ με το m γνωστή σταθερά μάζας. Και οι δύο αυτές μάζες θεωρούνται συγκεντρωμένες στις πλάκες των ορόφων. Για τους συντελεστές δυσκαμψίας τώρα αυτοί έχουν τις τιμές

$$k_{11} = 3k, \quad k_{12} = k_{21} = -2k \quad \text{και} \quad k_{22} = 2k$$

με το k γνωστή σταθερά δυσκαμψίας. (Ο δείκτης 1 αναφέρεται στον πρώτο όροφο και ο δείκτης 2 στο δεύτερο όροφο.) Μπορεί επίσης να υπάρχει και οριζόντια εξωτερική φόρτιση της μορφής

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t) \quad \text{ισοδύναμα} \quad p_1 = p_1(t) \quad \text{και} \quad p_2 = p_2(t)$$

στον πρώτο και στο δεύτερο όροφο αντίστοιχα. Ζητούνται: (α:1) Τα σχετικά μητρώα μάζας \mathbf{M} και δυσκαμψίας \mathbf{K} . Επίσης τα σχετικά διανύσματα στήλης των οριζόντιων μετατοπίσεων $\mathbf{U}(t)$ και των φορτίσεων $\mathbf{P}(t)$. (Όλα τα μητρώα και τα διανύσματα με περισπωμένη κάτω από το σύμβολό τους παρακαλώ! Επίσης τα τετραγωνικά μητρώα υποχρεωτικά με αγκύλες, ενώ τα διανύσματα στήλης υποχρεωτικά με άγκιστρα!) (β:1) Για ποιον ακριβώς λόγο το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι συμμετρικό; (γ:1) Με τη ισχύ του γνωστού συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{U}(t)}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{U}(t) = \mathbf{P}(t)$$

σε μητρωική μορφή ποια είναι η αντίστοιχη συνήθης μορφή (χωρίς μητρώα και διανύσματα) του πιο πάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων για το παρόν κτίριο; (δ:1) Το ίδιο ερώτημα σε περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική φόρτιση $\mathbf{P}(t)$ και επίσης χρησιμοποιηθεί το βοηθητικό σύμβολο συχνότητας

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

καθώς και οι ανηγμένες (στη βοηθητική μάζα m) φορτίσεις

$$p_1^*(t) = \frac{p_1(t)}{m} \quad \text{και} \quad p_2^*(t) = \frac{p_2(t)}{m}$$

για απλοποίηση του συμβολισμού. (ε:2) Με την παρουσία της φορτίσεως και με τη μέθοδο της απαλοιφής ζητούνται οι δύο διαφορικές εξισώσεις για τις άγνωστες μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$. (στ:1) Πόσες συνολικά αυθαίρετες σταθερές έχουν και οι δύο μαζί γενικές λύσεις τους και γιατί (με λεπτομέρειες); (ζ:1) Πώς θα μπορούσαν πρακτικά να προσδιορισθούν οι σταθερές αυτές;

ΑΣΚΗΣΗ A213 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης με τη χρήση της βοηθητικής συχνότητας ω_0 , τώρα όμως χωρίς καθόλου εξωτερική φόρτιση: (α:2) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (και του συμβόλου ω_0) η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση. (β:2) Τώρα οι σχετικές σταθερές μ_1, μ_2, μ_3 και μ_4 των εκθετών υποχρεωτικά με τη χρήση και των συμβόλων

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}} \approx 0.4283729906 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}} \approx 1.3477746774.$$

(γ:1) Οι μορφές των οριζόντιων μετατοπίσεων $u_{1,2}(t)$ των πλακών των δύο ορόφων με σταθερές σ' αυτές $A_{1,2}, B_{1,2}, \Gamma_{1,2}$ και $\Delta_{1,2}$, χωρίς όμως υπολογισμούς τους. (δ:1) Απλά να αναφερθούν οι τύποι του Euler για τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις $e^{\pm i\omega t}$. (ε:1) Να εξηγηθεί λεπτομερώς για ποιον ακριβώς φυσικό λόγο οι εκθέτες $\mu_{1,2,3,4}$ πρέπει να προκύψουν στο παρόν κτίριο φανταστικοί αριθμοί και όχι πραγματικοί ή έστω μιγαδικοί. (στ:1) Ποιες είναι οι δύο ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 (με $\omega_1 < \omega_2$) του κτιρίου αυτού; (Εννοείται με τη βοήθεια των συμβόλων λ_1, λ_2 και ω_0 .)

ΑΣΚΗΣΗ A214 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση ξανά χωρίς εξωτερική φόρτιση. Ζητούνται επίσης: (α:3) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως (εδώ υποχρεωτικά ημιτονικής αντικαταστάσεως και με γωνία φάσεως $+\alpha$ σ' αυτήν) η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση (η εξίσωση συχνοτήτων) για τις ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 (με $\omega_1 < \omega_2$) του παρόντος διώροφου κτιρίου (εννοείται και πάλι με τη βοήθεια των συμβόλων λ_1, λ_2 και ω_0). (β:3) Οι ίδιες οι ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 . (γ:1) Πότε θα ήταν πρακτικά εντελώς ακατάλληλη η μέθοδος της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως και γιατί; (δ:1) Λεπτομερές σχόλιο για το εάν πραγματικά έχει φυσική έννοια η ταλάντωση του παρόντος ιδεατού διώροφου κτιρίου υπό έλλειψη εξωτερικής φορτίσεως $\mathbf{P}(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ A215 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις, τώρα και πάλι με την παρουσία εξωτερικής φορτίσεως $\mathbf{P}(t)$. Ζητούνται επίσης: (α:3) Με γνωστό το μητρώο των ιδιομορφών Φ του παρόντος ιδεατού διώροφου κτιρίου (δε ζητείται να υπολογισθεί!) να εξηγηθεί με πάρα πολλές λεπτομέρειες και αποκλειστικά με τη χρήση μητρωικού συμβολισμού η αναγωγή του αρχικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων σε αποσυσζευγμένη (αλλά μητρωική) μορφή με άγνωστο διάνυσμα το διάνυσμα στήλης $\mathbf{Q}(t)$ των κύριων ή κανονικών συντεταγμένων $q_1(t)$ και $q_2(t)$. (Να μην εκτελεσθούν οι σχετικές πράξεις για το παρόν ειδικό ιδεατό κτίριο!) (β:1) Ποια ειδικά μητρώα υπεισέρχονται στο αποσυσζευγμένο αυτό σύστημα διαφορικών εξισώσεων; Τι ακριβώς μορφές έχουν; (γ:1) Ποιες είναι οι σχετικές αποσυσζευγμένες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις; (δ:1) Οι λύσεις τους (απλή αναφορά τους, όχι υπολογισμός των λύσεων αυτών!) υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$. (ε:1) Έχουν ή όχι φυσική σημασία οι κύριες ή κανονικές συντεταγμένες $q_1(t)$ και $q_2(t)$; Για ποιο κυρίως λόγο τις χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός στη Δυναμική και στις Ταλαντώσεις των Κατασκευών του; (στ:1) Με γνωστές τις κύριες ή κανονικές συντεταγμένες $\mathbf{Q}(t)$ ($q_1(t)$ και $q_2(t)$) πώς ακριβώς μπορούν να προσδιορισθούν οι άγνωστες οριζόντιες μετατοπίσεις $\mathbf{U}(t)$ ($u_1(t)$ και $u_2(t)$) με μητρωικό συμβολισμό; (Γενικά πάλι, χωρίς συγκεκριμένες πράξεις για το παρόν κτίριο.) Τώρα, εάν υπάρχει και μητρώο αποσβέσεως \mathbf{C} στο κτίριό μας: (ζ:1) Πότε μιλάμε για κλασική απόσβεση; (η:1) Πότε μπορούμε να γενικεύσουμε την προηγούμενη μέθοδο αποσυσζεύξεως των διαφορικών εξισώσεων και σε περίπτωση υπάρξεως αποσβέσεως; (θ:2) Στην περίπτωση αυτή να επαναληφθούν οι υπολογισμοί με μητρώα του ερωτήματος (α) για τη γενικότερη αυτή αποσυσζεύξη.

ΑΣΚΗΣΗ A216 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Μελετάμε ιδεατό διώροφο κτίριο διατμήσεως με μάζες των ορόφων (συγκεντρωμένες στα ύψη των πλακών) $m_1 = 2m$ και $m_2 = m$ (με το m μια γνωστή σταθερά μάζας) σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση. Το συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} έχει στοιχεία

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{12} = k_{21} = -k_2 \quad \text{και} \quad k_{22} = k_2 \quad \text{με} \quad k_1 = 2k \quad \text{και} \quad k_2 = k$$

με την ποσότητα k γνωστή θετική σταθερά δυσκαμψίας. Υποχρεωτικά με χρήση και του συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ζητούνται: (α:1) Να υπολογισθεί και να γραφεί χωρίς μητρώα το σχετικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. (β:1) Να αναχθεί σε αλγεβρικό σύστημα με τη συνηθισμένη (όχι την τροποποιημένη!) μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως. (γ:1) Να βρεθεί η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση και (δ:1) να υπολογισθούν οι λύσεις της. (ε:1) Από αυτές να προσδιορισθούν και οι ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2}$ του κτιρίου. (στ:1) Να εφαρμοσθεί τώρα και η μέθοδος της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως (με συνημίτονο) κατευθείαν στο αρχικό σύστημα με τα μητρώα \mathbf{M} και \mathbf{K} και να αναχθεί αυτό στο ιδιοπρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών (και πάλι με μητρώα). (ζ:1) Από το ιδιοπρόβλημα αυτό να υπολογισθεί η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων (ή απλούστερα εξίσωση συχνοτήτων) και τέλος και (η:1) οι ίδιες οι ιδιοσυχνότητες του κτιρίου.

ΑΣΚΗΣΗ A217 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Διώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Ο υπολογισμός των ιδιομορφών ταλαντώσεων με τη χρήση της συνηθισμένης κανονικοποίησης του Πολιτικού Μηχανικού και (β:1) το σχετικό μητρώο ιδιομορφών. (γ:1) Να γίνουν δύο σχήματα για τους τρόπους ταλαντώσεως του κτιρίου με βάση τις ιδιομορφές τόσο ευθύγραμμο όσο και καμπυλόγραμμο, όπως περίπου είναι στην πραγματικότητα. (Να τεθούν αριθμητικά και τα εύρη ταλαντώσεων στα ύψη των πλάκων.) (δ:1) Να επαληθευθεί η ορθογωνιότητα των ιδιομορφών ως προς το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} . (ε:1) Με τη χρήση του μητρώου ιδιομορφών να διαγωνιοποιηθεί το μητρώο μάζας \mathbf{M} . (στ:1) Ποιες είναι οι γενικευμένες μάζες του παρόντος κτιρίου; (ζ:1) Τώρα σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με φορτίσεις $p_1(t)$ και $p_2(t)$ στις πλάκες και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace απλά να αναχθεί το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (χωρίς μητρώα) σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, χωρίς όμως να λυθεί αυτό. (η:1) Ποιος είναι ο παρονομαστής $\Delta(s)$ στη λύση του αλγεβρικού συστήματος σε πολυωνυμική μορφή και πώς θα μπορούσε να παραγοντοποιηθεί (χωρίς πράξεις: θα μπορούσε ...) στο παρόν πρόβλημα και γιατί;

A8.6. Πολύροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως

ΑΣΚΗΣΗ A218 (Κεφάλαια A12, A13, A18, A19, Δυναμική των Κατασκευών: Τριώροφα Κτίρια): Θεωρούμε τριώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως, το οποίο προσεγγίζεται από επίπεδο πλαίσιο. Οι τρεις μάζες των ορόφων είναι γνωστές: m_1 (του πρώτου), m_2 (του δεύτερου) και m_3 (του τρίτου). Είναι επίσης γνωστά και τα έξι στοιχεία $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{22}, k_{23}$ και k_{33} του μητρώου δυσκαμψίας \mathbf{K} του κτιρίου. Ζητούνται: (α:6) Με τη χρήση συνημιτονικής τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως ο προσδιορισμός της αλγεβρικής εξισώσεως ιδιοσυχνοτήτων για τις τρεις ιδιοσυχνότητες ω_i του κτιρίου στη μορφή $D_t(\omega) = 0$ με $D_t(\omega)$ κατάλληλη ορίζουσα. (β:1) Τι βαθμού είναι; Τι ιδιότητες έχουν οι ρίζες της; (γ:1) Πόσες είναι γενικά οι ιδιοσυχνότητες ω_i του κτιρίου; Μετά ζητείται η εύρεση της εξισώσεως ιδιοσυχνοτήτων για τις ιδιοσυχνότητες ω_i (δ:4) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier και (ε:3) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με μηδενικές αρχικές συνθήκες, όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές s_i . (στ:1) Ποια απλή σχέση συνδέει το ω_i και το αντίστοιχο s_i ;

ΑΣΚΗΣΗ A219 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Τριώροφα Κτίρια): Εδώ μελετάμε τις ιδιοταλαντώσεις (προφανώς χωρίς εξωτερική φόρτιση) σε ένα τριβάθμιο μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού, εδώ σε ιδεατό συμμετρικό τριώροφο κτίριο διατμήσεως, που προσεγγίζεται από αντίστοιχο πλαίσιο. Προκύπτει το εξής σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων (σε μητρική μορφή):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{με} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$$

το διάνυσμα των οριζόντιων μετατοπίσεων $u_{1,2,3}(t)$ των πλακών των τριών ορόφων: πρώτου, δεύτερου και τρίτου αντίστοιχα. Το μητρώο \mathbf{M} είναι το σταθερό και διαγώνιο μητρώο μάζας με διαγώνια στοιχεία $m_{11} = 2m$: μάζα πλάκας πρώτου ορόφου, $m_{22} = 2m$: μάζα πλάκας δεύτερου ορόφου και $m_{33} = m$: μάζα πλάκας τρίτου ορόφου, που είναι και η μικρότερη. Το σύμβολο m δηλώνει γνωστή θετική σταθερά μάζας. Και οι τρεις πλάκες του κτιρίου θεωρούνται άκαμπτες

(σε αντίθεση με τα υποστυλώματα, που είναι απλά δύσκαμπτα). Το μητρώο \mathbf{K} είναι το σταθερό και συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας του τριώροφου κτιρίου με στοιχεία

$$k_{11} = k_{22} = 2k, \quad k_{33} = k, \quad k_{12} = k_{21} = k_{23} = k_{32} = -k \quad \text{και} \quad k_{13} = k_{31} = 0.$$

Το σύμβολο k δηλώνει μια γνωστή θετική σταθερά δυσκαμψίας. Προς διευκόλυνση ζητείται και η συνεχής και υποχρεωτική χρήση του συμβόλου (βοηθητικής κυκλικής συχνότητας) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ στη θέση της σταθεράς δυσκαμψίας k . Ζητούνται: (α:1) Η γραφή του πιο πάνω συστήματος των τριών διαφορικών εξισώσεων σε μη μητρωϊκή (συνήθη) μορφή και με τη χρήση του συμβόλου ω_0 αντί για τις σταθερές m και k . (β:5) Η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων (φυσικών κυκλικών συχνοτήτων) ταλαντώσεως $\omega_{1,2,3}$ με $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ (τελικά με τέσσερα δεκαδικά ψηφία) του μηχανικού αυτού συστήματος υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης (δηλαδή με την κατάλληλη χρήση της εκθετικής συναρτήσεως) για τις άγνωστες μετατοπίσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ και $u_3(t)$. Πρέπει βέβαια να επιλυθεί και η σχετική (αλγεβρική) χαρακτηριστική εξίσωση $p_6(\mu) = 0$ ως προς μ . (γ:2) Παριστάνει πραγματικά το πιο πάνω σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων ένα χωρίς απόσβεση βέβαια μηχανικό σύστημα του Πολιτικού Μηχανικού ή όχι; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ A220 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Τριώροφα Κτίρια): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται: (α:5) Να υπολογισθούν ακριβώς οι ίδιες τρεις ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2,3}$ (πάλι με $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$) του τριώροφου ιδεατού κτιρίου της προηγούμενης ασκήσεως, αλλά τώρα με κατάλληλες συνημιτονικές υποθέσεις για τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις $u_{1,2,3}(t)$: π.χ. $u_1(t) = A \cos(\omega t - \alpha)$ (με το A συντελεστή και το α γωνία φάσεως) για την πρώτη από αυτές. (β:2) Για ποιον ακριβώς λόγο επιτρέπονται εδώ τέτοιες απλές συνημιτονικές αντικαταστάσεις για τις άγνωστες συναρτήσεις, που παρακάμπτουν τη γενικότερη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης της προηγούμενης ασκήσεως; (γ:1) Ειδικά εδώ ποια ακριβώς αντικατάσταση: η εκθετική (προηγούμενη άσκηση) ή η συνημιτονική (παρούσα άσκηση) είναι σαφώς απλούστερη για τον Πολιτικό Μηχανικό; Για ποιο λόγο;

ΑΣΚΗΣΗ A221 (Κεφάλαια A12, A13, Δυναμική των Κατασκευών: Τετραώροφα Κτίρια): Θεωρούμε τετραώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως με μάζες των ορόφων m_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Το μητρώο δυσκαμψίας με στοιχεία k_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) είναι επίσης γνωστό. Ζητούνται: (α:1) Για ιδιοταλαντώσεις να αναφερθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για τις οριζόντιες μετατοπίσεις $u_i(t)$ των πλακών σε μητρωϊκή μορφή. (β:1) Να μετατραπεί σε μη μητρωϊκή μορφή. (γ:2) Από τη μη μητρωϊκή μορφή με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής (εδώ ημιτονικής!) αντικατάστασης το σχετικό σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. (δ:1) Η μετατροπή του σε μητρωϊκή μορφή και επίσης. (στ:3) Από τη μητρωϊκή μορφή του αλγεβρικού συστήματος η εύρεση της εξισώσεως ιδιοσυχνοτήτων (ή απλούστερα εξισώσεως συχνοτήτων) του κτιρίου.

ΑΣΚΗΣΗ A222 (Κεφάλαια A12, A13, A18, A19, Δυναμική των Κατασκευών: Πολυώροφα Κτίρια): Σε ιδεατό κτίριο διατμήσεως με n ορόφους ζητούνται: (α:1) Οι παραδοχές οι οποίες γίνονται συνήθως από τον Πολιτικό Μηχανικό (με λεπτομέρειες). (β:1) Θεωρούμε τώρα ένα τέτοιο κτίριο με γνωστά τα μητρώα μάζας \mathbf{M} , δυσκαμψίας \mathbf{K} και αποσβέσεως

$$\mathbf{C} = c\mathbf{K}$$

(εδώ πρόκειται για αναλογική απόσβεση με το c γνωστή θετική σταθερά) και το διάνυσμα φορτίσεως $\mathbf{p}(t)$ (διάνυσμα στήλης) στα ύψη των πλακών των ορόφων. Με τη συνεχή χρήση μητρώων (μητρωϊκή γραφή) ποιο είναι το σχετικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων; (γ:4) Με γνωστό και το μητρώο ιδιομορφών Φ να αποσυσχευθεί λεπτομερώς το πιο πάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων (σε μητρωϊκή γραφή πάλι μετά την αποσυσχευση). (δ:1) Να γραφούν τώρα σε συνηθισμένη μορφή (δηλαδή χωρίς πια μητρώα) οι n αποσυσχευμένες (διαγωνιοποιημένες) διαφορικές εξισώσεις (απλά με τη χρήση δείκτη $k = 1, 2, \dots, n$) και τέλος (ε:1) Να μετατραπούν σε αλγεβρικές εξισώσεις με την κατάλληλη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier, αλλά χωρίς τις αντιστροφές.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ: ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΑ ΕΒΔΟΜΑΔΑ

ΟΜΑΔΑ EMII-A

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A1 ([X] *Τάξη και Μεταβλητές Διαφορικής Εξίσωσης, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις, Κίνηση με Αντίσταση, Δοκός επί Ελαστικής Βάσεως*): Ποιες είναι η τάξη, η ανεξάρτητη μεταβλητή και η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) στις τρεις διαφορικές εξισώσεις

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p_0 \quad (\text{εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με σταθερή φόρτιση } p_0),$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) = F_0 \quad (\text{κίνηση με σταθερή εξωτερική δύναμη } F_0 \text{ και αντίσταση } c\dot{x}(t)),$$

$$EIv''''(x) + kv(x) = p_0 \quad (\text{δοκός επί ελαστικής βάσεως με ομοιόμορφη φόρτιση } p_0)$$

με τα σύμβολα ω_0 , p_0 , m , c , F_0 , E , I και k να δηλώνουν εδώ σταθερές;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A2 ([X] *Δυναμική: Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα*): Ζητούνται: (α) Ποιος είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα στην ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου κατά μήκος του άξονα x ; Σε μια τέτοια κίνηση γενικά μιλώντας μεταβλητές είναι η θέση x , η ταχύτητα v , η επιτάχυνση a και ο χρόνος t . (β) Ποιες σχετικές διαφορικές εξισώσεις ισχύουν συμπεριλαμβάνοντας και εκείνες που συνδέουν τη θέση $x(t)$ με την ταχύτητα $v(t)$ και την ταχύτητα $v(t)$ με την επιτάχυνση $a(t)$; (γ) Ποια μορφή παίρνει ο νόμος του Νεύτωνα με μεταβλητές την ταχύτητα $v = v(x)$ (που θεωρείται εδώ σαν συνάρτηση της θέσεως x) και τη θέση x στην ειδική περίπτωση που $F = F(x)$; (δ) Ποιο σχετικό ενεργειακό θεώρημα μπορεί να προκύψει με ολοκλήρωση;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A3 ([X] *Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση Υλικού Σημείου*): Ζητούνται: (α) Σε κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου μάζας m στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με επιτάχυνση $-g$, δηλαδή με θετική φορά της κινήσεως προς τα πάνω) ποια είναι η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη θέση $x = x(t)$ του υλικού σημείου; (β) Ποια είναι η γενική λύση της (με δύο σταθερές C_1 και C_2); (γ) Ποια είναι η αντίστοιχη μερική (ή ειδική) λύση που επαληθεύει τις δύο αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $\dot{x}(0) = v_0$ την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A4 ([X] *Δυναμική: Κατακόρυφη Κίνηση Υλικού Σημείου με Αντίσταση του Αέρα*): Ζητούνται: (α) Σε κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου μάζας m στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με επιτάχυνση $-g$, δηλαδή με θετική φορά της κινήσεως προς τα πάνω) και αντίσταση του αέρα ανάλογη της ταχύτητας $F_r = cv(t)$ που ανθίσταται στην κίνηση, ποια είναι η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα $v = v(t)$; Υπάρχει διαφορά στην κίνηση (i) προς τα πάνω και (ii) προς τα κάτω όσον αφορά στη σχετική διαφορική εξίσωση ή όχι; Γιατί; (β) Ποια είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (με μία σταθερά C) με τη χρήση της μεθόδου των χωριζόμενων μεταβλητών; (γ) Η αντίστοιχη μερική (ή ειδική) λύση, αν $v(0) = v_0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$; (δ) Η αντίστοιχη θέση $x = x(t)$ υποθέτοντας μάλιστα ότι $x(0) = x_0$ ξανά τη χρονική στιγμή $t = 0$;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A5 ([X και Y] *Επαλήθευση Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων, Δυναμική και Ταλαντώσεις*): Να επαληθευθεί ότι η κλασική διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις σε μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (ή μάζας-ελατηρίου)

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

με $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του $u = 0$, t το χρόνο και ω_0 τη συχνότητα (εννοείται την κυκλική συχνότητα, σχεδόν πάντοτε αυτή χρησιμοποιείται από τον Πολιτικό Μηχανικό) της ταλαντώσεως (χωρίς απόσβεση: $c = 0$, ούτε εφαρμοζόμενη εξωτερική δύναμη: $p(t) \equiv 0$) έχει γενική λύση της μορφής

$$u(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

με τα A και B αυθαίρετες σταθερές. (**Υπόδειξη:** Το ω_0 στη *Mathematica* με Esc Λατινικό ο Esc 0 χωρίς δείκτη. Να αποφεύγονται οι δείκτες στη *Mathematica*. Οι εκθέτες να με Ctrl 6 ή ισοδύναμα Ctrl ^.)

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A6 ([X] *Σχηματισμός Διαφορικής Εξίσωσης*): Ζητούνται: (α) Να σχηματισθεί (να κατασκευασθεί) η διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως που αντιστοιχεί στη διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων (συναρτήσεων)

$$u(t) = A \cosh at + B \sinh at$$

με απαλοιφή των παραμέτρων A και B (όχι όμως και της σταθεράς a). (β) Να δοθούν έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (γ) Να επαληθευθεί ότι η πιο πάνω οικογένεια καμπύλων αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης που προέκυψε. (δ) Με δοσμένες τις αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ (πρόβλημα αρχικών τιμών) για τη διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α) να βρεθεί η λύση του προβλήματος αυτού. (ε) Με βάση και το προηγούμενο ερώτημα να εξηγηθεί γιατί η πιο πάνω οικογένεια καμπύλων είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του ερωτήματος (α). (στ) Να σχηματισθεί η διαφορική εξίσωση της οικογένειας των καμπύλων του ερωτήματος (α), αλλά τώρα με την απαλοιφή και των τριών σταθερών A , B και a θεωρώντας τις και τις τρεις αυθαίρετες σταθερές. (ζ) Να δοθούν οι βασικοί χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξίσωσης που προέκυψε.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A7 ([X] *Σχηματισμός Διαφορικής Εξίσωσης. Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί*): Δίνεται η οικογένεια των καμπύλων

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x$$

με τα A , B , C και D αυθαίρετες σταθερές. Η οικογένεια αυτή αναφέρεται σε πρόβλημα δυναμικής καταπονήσεως δοκού. Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με απαλοιφή των σταθερών αυτών. (β) Η επαλήθευσή της. (γ) Να αναφερθούν οι σχετικές συνοριακές συνθήκες για πρόβολο μήκους L (με $0 \leq x \leq L$). Ανάλογα για (δ) αμφίπακτη δοκό και (ε) για αμφιέριστη δοκό.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-A8 ([X] *Νόμος του Νεύτωνα, Ταλαντώσεις*): Ζητούνται: (α) Υποχρεωτικά με τη χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα η λεπτομερής κατασκευή της διαφορικής εξίσωσης των εξαναγκασμένων αρμονικών ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση σε μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k). (β) Να αναφερθεί η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (γ) Να βρεθεί η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών με αρχικές συνθήκες τις εξής δύο συνθήκες: $u(0) = u_0$ (αρχική μετατόπιση) και $\dot{u}(0) = v_0$ (αρχική ταχύτητα).

ΟΜΑΔΑ EMII-B

ΑΣΚΗΣΗ EMII-B1 ([Y] *Ταλαντώσεις*): Θεωρούμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου (μάζας m) – ελατηρίου (σταθεράς k). Ζητούνται:

(α) Η σχετική διαφορική εξίσωση (differential equation) `de1a` για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του $u = 0$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{de1a} = m u''[t] + k u[t] == 0$$

(β) Σε λίστα οι χαρακτηρισμοί `char1a` της διαφορικής αυτής εξίσωσης. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`char1a = {"συνήθης διαφορική εξίσωση", "δευτέρας τάξεως", "πρώτου βαθμού", "γραμμική", "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές"}}`

Υπόδειξη: Προσοχή στις συμβολοσειρές (strings), όπως είναι οι παραπάνω χαρακτηρισμοί. Πρέπει να είναι μέσα σε εισαγωγικά ακριβώς όπως πιο πάνω. Επίσης τα στοιχεία μιας λίστας χωρίζονται με κόμματα.

(γ) Η λύση (solution) `sol1a` της διαφορικής εξίσωσης (differential equation) `de1a` με τη χρήση της εντολής `DSolve`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{sol1a} = \text{DSolve}[\text{de1a}, u[t], t]$$

(δ) Η συνάρτηση $u_{s1a}(t)$ που αντιστοιχεί στη λύση αυτή `sol1a`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$u_{s1a}[t_] = \text{sol1a}[[1, 1, 2]]$$

Οι αγκύλες για τα στοιχεία λίστας με `Esc` [`Esc` (αριστερή διπλή αγκύλη) και `Esc`] `Esc` (δεξιά διπλή αγκύλη). Στις εντολές που ορίζουν συναρτήσεις παράκληση για τη χρήση του συμβόλου `=` αντί για το σύμβολο `:=`, ώστε να βλέπουμε αμέσως αν η συνάρτηση (εδώ η `us1a[t_]`) ορίσθηκε σωστά ή όχι (άμεσος υπολογισμός της συναρτήσεως, όχι καθυστερημένος όταν τη χρειαστούμε). Στο δεξιό μέλος της εντολής αυτής οι αριθμοί `1, 1, 2` δηλώνουν το πρώτο στοιχείο της λίστας `sol1a` (το πρώτο `1`), στη συνέχεια το πρώτο στοιχείο της νέας λίστας που προκύπτει (το δεύτερο `1`) και τέλος το δεύτερο στοιχείο της τελευταίας λίστας (το `2`).

(ε) Απόπειρα (δυστυχώς εδώ ανεπιτυχής) για την επαλήθευση `ver1a` (verification) της λύσεως $u_{s1a}(t)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{ver1a} = \text{de1a} /. u \rightarrow u_{s1a}$$

Ο λόγος που δεν πέτυχε η επαλήθευση αυτή δεν είναι ότι υπάρχει κάπου λάθος. Είναι απλά ότι η *Mathematica* χρειάζεται να απλοποιήσει το αποτέλεσμα με την εντολή απλοποίησης `Simplify`. Ας κάνουμε την απλοποίηση αυτή με την εντολή

$$\text{ver1a} // \text{Simplify}$$

Τώρα προκύπτει αποτέλεσμα (έξοδος της *Mathematica*) `True` (αληθές), που δείχνει την ορθότητα της λύσεως. Φυσικά αυτό μπορεί να γίνει και κατευθείαν με τη συνθετότερη εντολή

$$\text{ver1a} = \text{de1a} /. u \rightarrow u_{s1a} // \text{Simplify}$$

και γενικά απαιτείται απλοποίηση (με την εντολή `Simplify`) στις επαληθεύσεις. Μερικές φορές (όχι συχνά) είναι αναγκαία η χρήση της ακόμη πιο ισχυρής εντολής `FullSimplify` για την πλήρη απλοποίηση μιας παραστάσεως της *Mathematica*.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-B2 ([Y] *Ταλαντώσεις*): Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση, θεωρούμε και πάλι τις ελεύθερες ταλαντώσεις μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου (μάζας m) –

ελατηρίου (σταθεράς k). Ζητούνται:

(α) Η εξοικείωση με το «μαύρισμα» (με το ποντίκι) των διάφορων κατακόρυφων μπλε γραμμών που έχουν ήδη εμφανισθεί δεξιά στην προηγούμενη άσκηση και των εσωτερικών (προς τις εντολές) και των ενδιάμεσων και των εξωτερικών (προς το δεξιό άκρο της οθόνης). Στη συνέχεια το «μαύρισμα» της κατάλληλης κατακόρυφης μπλε γραμμής δεξιά που περιλαμβάνει όλη την ενότητα της προηγούμενης ασκήσεως (ακριβώς όλη την άσκηση: ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο) και τελειώνει μαζί με την προηγούμενη άσκηση. Μετά το «μαύρισμα» αυτό η αντιγραφή της προηγούμενης ασκήσεως στον πίνακα σημειώσεων (clipboard) των Windows με **Ctrl c** (ή με **Edit -> Copy**) και μετά η επικόλλησή της μετά το τέλος της προηγούμενης ασκήσεως με **Ctrl v** (ή με **Edit -> Paste**). Αυτό που πετυχαίνουμε έτσι είναι να έχουμε ένα πρώτο σχέδιο για την παρούσα άσκηση που δε διαφέρει και πάρα πολύ από την προηγούμενη: αφορά και αυτή σε ταλαντώσεις του ίδιου ακριβώς μηχανικού συστήματος.

(β) Η επίλυση της προηγούμενης ασκήσεως, αλλά τώρα με τη χρήση της κυκλικής ιδιοσυχνότητας (ή φυσικής κυκλικής συχνότητας) ω_0 (στη *Mathematica* το ω με **Esc** Λατινικό ο **Esc** και το μηδέν χωρίς δείκτη: ω_0) αντί για τα δύο ξεχωριστά σύμβολα m (μάζα) και k (σταθερά ελατηρίου). **Υπόδειξη:** Οι εκθέτες στη *Mathematica* με **Ctrl 6** (ή με **Ctrl** και Γαλλική περισπωμένη πάνω από το 6 και αυτή!), επάνοδος στην κανονική γραφή με **Ctrl** και το πλήκτρο του κενού κάτω στο κέντρο του πληκτρολογίου. Στην επίλυση αυτή ζητείται η χρήση των συμβόλων με **b** αντί για **a**, δηλαδή των συμβόλων **de 1b**, **char 1b**, **sol 1b**, **us 1b[t_]** και **ver 1b**. **Υπόδειξη:** Αυτό πρέπει να γίνει με διορθώσεις στην προηγούμενη άσκηση και όχι με ξαναγράψιμο των εντολών! Ειδικά για την επαλήθευση **ver 1b** ζητείται αυτή να γίνει κατευθείαν με τη χρήση και της εντολής απλοποίησης **Simplify**, δηλαδή της τελευταίας εντολής της προηγούμενης ασκήσεως. Οι δύο εντολές που προηγούνται αυτής, δηλαδή η δεύτερη και η τρίτη εντολή από το τέλος της προηγούμενης ασκήσεως, πρέπει στην άσκηση αυτή, όχι στην προηγούμενη άσκηση, να σβησθούν. Το σβήσιμο αυτό γίνεται με «μαύρισμα» των δύο σχετικών κατακόρυφων μπλε γραμμών δεξιά τους (αν είναι δυνατόν και των δύο μαζί) και στη συνέχεια με **Ctrl x** (ή από τα menu με **Edit -> Cut**).

Να μη λησμονηθεί βέβαια ότι όλες οι εντολές στην παρούσα άσκηση πρέπει να εκτελεσθούν στη *Mathematica*, ώστε να πάρουμε τα νέα αποτελέσματά μας με χρήση της ιδιοσυχνότητας ω_0 .

Υπόδειξη: Κατά τη διάρκεια των υπολογισμών αυτών η *Mathematica* διερωτάται μήπως τυχόν και κάναμε λάθος με τη χρήση στην άσκηση αυτή παραπλήσιων συμβόλων (με **b**) με εκείνα της προηγούμενης ασκήσεως (με **a**). Εμείς όμως δεν κάναμε λάθος! Άρα αγνοούμε τις προειδοποιήσεις της *Mathematica* για πιθανό ορθογραφικό λάθος στις σχετικές μπλε γραμμές με το προειδοποιητικό κείμενο μετά από κάθε εντολή στην άσκηση αυτή. Στο τέλος μάλιστα απαλείφουμε τις μπλε αυτές γραμμές με **Ctrl x** (ή από τα menu με **Edit -> Cut**), όπως ήδη εξηγήσαμε. (Η ίδια απαλοιφή μπορεί να γίνει και με δεύτερη εκτέλεση των ίδιων εντολών. Αυτό όμως μας χαλάει την αρίθμηση των εντολών μετά την πρώτη άσκηση, αν δεν είναι ήδη χαλασμένη ..., και είναι σκόπιμο να αποφεύγεται κατά το δυνατόν.) Τελειώσαμε έτσι επιτυχώς και την άσκηση αυτή. Προχωράμε ...!

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Β3 (IV) Ταλαντώσεις): Συνεχίζοντας την αμέσως προηγούμενη άσκηση, ζητείται η εκτέλεση των ίδιων υπολογισμών, όπως και στην αμέσως προηγούμενη άσκηση, αλλά τώρα σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με σταθερή φόρτιση (εξωτερική δύναμη) p_0 , το μηδέν χωρίς δείκτη, p_0 , στη *Mathematica*. (**Βέβαια να μην ξαναγραφούν από την αρχή οι εντολές!**) Να χρησιμοποιηθεί και πάλι η κυκλική ιδιοσυχνότητα ω_0 αριστερά και η ανηγμένη φόρτιση p_0/m δεξιά. Να γίνει και η αλλαγή που πρέπει στους χαρακτηρισμούς της νέας διαφορικής εξισώσεως. Επειδή τώρα έχουμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, αλλάζουμε τα σύμβολα στα νέα σύμβολα **de2**, **char2**, **sol2**, **us2[t_]** και **ver2**. Τέλος σ' ένα σχόλιο (σε παράγραφο κειμένου με **Alt 7** ή με **Format -> Style -> Text**) να αναφερθεί αν πέτυχε ή όχι η επίλυση της ασκήσεως και η επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-B4 ([Y] Ταλαντώσεις): Συνεχίζοντας την αμέσως προηγούμενη άσκηση, ζητείται η εκτέλεση των ίδιων υπολογισμών, όπως και στην προηγούμενη άσκηση, στις ίδιες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, αλλά τώρα και με απόσβεση των ταλαντώσεων με λόγο αποσβέσεως ξ (στη *Mathematica* το ξ με `Esc x Esc` ή με Ελληνικό ξ , αν και η δυνατότητα αυτή δεν προτιμάται!) και με τη χρήση συμβόλων με 3 (όχι πια με 2), δηλαδή των συμβόλων `de3`, `char3`, `sol3`, `us3[t_]` και `ver3`. Επιπλέον να γίνει πρώτα απόπειρα επαληθεύσεως χωρίς τη χρήση της εντολής απλοποίησης `Simplify` και έπειτα να δοθεί η σχετική συνθετότερη εντολή (με `Simplify`). Επίσης αμέσως μετά τον υπολογισμό της σχετικής συναρτήσεως `us3[t_]` να γραφεί και η αντίστοιχη μορφή της αποκλειστικά με υπερβολικές συναρτήσεις. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`us3[t] // ExpToTrig`

ΑΣΚΗΣΗ EMII-B5 ([X και Y] Επαλήθευση Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων, Ταλαντώσεις): Ζητούνται: (α) [X και Y] Να επαληθευθεί ότι η κλασική διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή στις Ταλαντώσεις σε μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας) - ελατηρίου

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

(το ω με `Esc` Λατινικό ο `Esc`) με $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του, t το χρόνο και ω_0 τη συχνότητα (εννοείται την κυκλική συχνότητα, σχεδόν πάντοτε αυτή θα χρησιμοποιείται και θα εννοείται) της ταλαντώσεως (χωρίς απόσβεση: $c = 0$, δεν υπάρχει αποσβεστήρας ούτε εφαρμοζόμενη εξωτερική δύναμη: $p(t) \equiv 0$, δηλαδή ελεύθερη ταλάντωση) έχει γενική λύση της μορφής

$$u(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

με τα A και B δύο αυθαίρετες σταθερές. Να γραφεί η λύση αυτή και σε εκθετική μορφή. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `TrigToExp`. (β) [X και Y] Με βάση την πιο πάνω γενική λύση να βρεθεί η μερική λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0.$$

(γ) [X και Y] Να γίνουν οι πλήρεις χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης σε μορφή λίστας. (δ) [X και Y] Να επαναληφθούν οι απαντήσεις των ερωτημάτων (α), (β) και (γ) τώρα για τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) - a^2 u(t) = 0$$

(με το a σταθερά). Τότε η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$u(t) = A \cosh at + B \sinh at$$

με την παρουσία τώρα υπερβολικών συναρτήσεων (υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο) αντί για τριγωνομετρικές συναρτήσεις. (ε) [X ή Y] Σε ποια φυσικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού απαντώνται οι διαφορικές εξισώσεις των ερωτημάτων (α) και (δ) (με λεπτομέρειες); (στ) [X] Να γίνουν και τα σχετικά σχήματα (επίσης με λεπτομέρειες).

ΟΜΑΔΑ EMII-C

ΑΣΚΗΣΗ EMII-C1 ([X και Y] Δοκοί): Ζητούνται: (α) Να γραφεί η διαφορική εξίσωση `BeamDE` για το βέλος κάμψεως $v(x)$ συνήθους δοκού (beam) μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI υπό κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$. **Υπόδειξη:** Επειδή τα δύο σύμβολα E και I έχουν ειδικές σημασίες στη *Mathematica* (βάση των φυσικών λογαρίθμων e και φανταστική μονάδα i αντίστοιχα),

η δυσκαμψία EI να γράφεται σαν ενιαίο σύμβολο και όχι σαν γινόμενο στο μάθημα αυτό. (Το I είναι το Λατινικό κεφαλαίο I , όχι το μικρό ell .) (β) Στη συνέχεια ζητείται η αντίστοιχη εξίσωση `BeamOnElasticFoundationDE` για δοκό επί ελαστικής βάσεως (beam on elastic foundation). Η σχετική σταθερά k θεωρείται γνωστή. Να δοθούν και οι χαρακτηρισμοί `char` για τη διαφορική αυτή εξίσωση σε μορφή λίστας. Σε σχόλιο `comment 1` να αναφερθεί πού παρουσιάζονται τέτοιες δοκοί.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`comment 1 = "Δοκοί επί ελαστικής βάσεως παρουσιάζονται:`

(α) στις Θεμελιώσεις: πεδιλοδοκοί (ή θεμελιοδοκοί) και

(β) στη Σιδηροδρομική: σιδηροτροχιές";

(Το σχόλιο αυτό σαν εντολή της *Mathematica*. Να μη λησμονηθούν τα εισαγωγικά στη σχετική συμβολοσειρά, `string`, δηλαδή στο κείμενο του σχολίου. Η Αγγλική άνω τελεία, Ελληνικό ερωτηματικό δεξιά στην εντολή αυτή έχει την έννοια να μη δοθεί η σχετική έξοδος της *Mathematica*. Μια φορά φθάνει, για να διαβάσουμε το σχόλιο αυτό!) (γ) Ζητούνται οι συνοριακές συνθήκες (boundary conditions) για τις εξής συνήθεις δοκούς: (i) Πρόβολο με πάκτωση αριστερά: **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`bc1 = {v[0] == 0, v'[0] == 0, v''[L] == 0, v'''[L] == 0}`

(ii) Πρόβολο με πάκτωση δεξιά: `bc2`, (iii) Αμφιέριστη δοκό: `bc3`, (iv) Αμφίπακτη δοκό: `bc4`, (v) Μονόπακτη υπερστατική δοκό με πάκτωση δεξιά: `bc5`. (δ) Σε σχόλιο `comment2` να εξηγηθεί εάν ή όχι έχει νόημα στη Στατική να μιλάμε για συνοριακές συνθήκες `bc6` σε δοκό ελεύθερη και στα δύο άκρα της και γιατί, εάν η δοκός είναι: (i) αστήρικτη και (ii) στηριζόμενη πάνω σε ελαστική βάση. (ε) Να αναφερθούν και οι συνοριακές αυτές συνθήκες `bc6`. **Υπόδειξη:** Μερικές φορές είναι έξυπνο να αντιγράψουμε μια εντολή σε επόμενη παράγραφο ενός notebook της *Mathematica*, εάν οι τροποποιήσεις που πρέπει να επιφέρουμε σ' αυτήν δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Η αντιγραφή γίνεται με `Ctrl c` (μεταφορά στον clipboard των *Windows*) και `Ctrl v` (επικόλληση) ή εναλλακτικά με `Edit -> Copy` και `Edit -> Paste` αντίστοιχα από το menu (τις επιλογές) `Edit` της *Mathematica*.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-C2 (IX και Y) Πρόβολος: Θεωρούμε συνήθη πρόβολο (cantilever) με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$ μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI (η δυσκαμψία, όπως ήδη αναφέρθηκε, με ενιαίο σύμβολο EI όχι με γινόμενο $E I$, όχι με κενό, και όχι με `ell`) και υπό σταθερή κάθετη φόρτιση p_0 . Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση (differential equation) και οι συνοριακές συνθήκες (boundary conditions) που ισχύουν. Επίσης ο αριθμός (number) των συνοριακών συνθηκών. Όλες οι εξισώσεις που ισχύουν (με τη χρήση και της εντολής `Flatten`) και ο αριθμός τους. (β) Η λύση της διαφορικής εξισώσεως και η αντίστοιχη συνάρτηση. (γ) Η επαλήθευση (verification) της διαφορικής εξισώσεως και των συνοριακών συνθηκών. (δ) Σε λίστα οι τύποι για το βέλος κάμψεως $v_s(x)$, τη στροφή $\theta(x)$ (το θ στη *Mathematica* με `Esc q Esc` ή με Ελληνικό θ , προτιμάται ο πρώτος τρόπος), την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$, την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ και την κατανομημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ με απλοποιήσεις των αποτελεσμάτων. (ε) Για παραπέρα επαλήθευση οι τιμές $v_s(0)$, $\theta(0)$, $M(L)$ και $Q(L)$. (στ) Οι μέγιστες τιμές (κατ' απόλυτο τιμή) των ποσοτήτων $v_s(x)$, $\theta(x)$, $M(x)$ και $Q(x)$ θεωρώντας προφανές πού παρουσιάζονται. (ζ) Με δήλωση τιμών $L = 1$, $p_0 = -1$ και $EI = 1$ η σχεδίαση του βέλους κάμψεως (της ελαστικής γραμμής) $v_s(x)$, της στροφής $\theta(x)$, της καμπτικής ροπής $M(x)$, της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ και της φορτίσεως $p(x)$. (η) Στο τέλος όλων μαζί σε ενιαίο σχήμα. **Υπόδειξη:** Θα μπορούσαν ίσως να χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω σχετικές εντολές:

`CantileverDE = EI v''''[x] == p0`

`CantileverBCs = {v[0] == 0, v'[0] == 0, v''[L] == 0, v'''[L] == 0}`

`NumberOfBCs = Length[CantileverBCs]`

`CantileverEqs = {CantileverDE, CantileverBCs}`

```

CantileverEqs = {CantileverDE, CantileverBCs} // Flatten
NumberOfEqs = Length[CantileverEqs]
CantileverSol = DSolve[CantileverEqs, v[x], x]
vs[x_] = CantileverSol[[1, 1, 2]] // Simplify
CantileverVers = CantileverEqs /. v -> vs
{vs[x], θ[x_] = vs'[x], M[x_] = EI θ'[x], Q[x_] = M'[x], p[x_] = Q'[x]} // Simplify
{vs[0], θ[0], M[L], Q[L]}
{vmax = vs[L], θmax = θ[L], Mmax = M[0], Qmax = Q[0]}
values = {L = 1, p0 = -1, EI = 1}
P1 = Plot[vs[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[0.1]},
  PlotLabel -> "DEFLECTION OF THE CANTILEVER", AxesLabel -> {"x", "v"}]
P2 = Plot[θ[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[0.3]}, PlotRange -> {0, -0.2},
  PlotLabel -> "SLOPE OF THE CANTILEVER", AxesLabel -> {"x", "θ"}]
P3 = Plot[M[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[0.5]},
  PlotLabel -> "BENDING MOMENT OF THE CANTILEVER", AxesLabel -> {"x", "M"}]
P4 = Plot[Q[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[0.7]},
  PlotLabel -> "SHEAR FORCE OF THE CANTILEVER", AxesLabel -> {"x", "Q"}]
P5 = Plot[p[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[0.9]},
  PlotLabel -> "LOADING OF THE CANTILEVER", AxesLabel -> {"x", "p"}]
Show[P1, P2, P3, P4, P5, PlotRange -> {-1.1, 1.1},
  PlotLabel -> "SHEAR FORCE, DEFLECTION, SLOPE, MOMENT, LOADING", AxesLabel -> {"x", ""}]

```

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-С3 ([X και Y] *Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως, Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου*): Εξετάζουμε την κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου M μάζας m στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g , μάλλον $-g$) και με αντίσταση του αέρα $cv(t)$ ανάλογη της ταχύτητας $v(t)$ (με θετικό συντελεστή αναλογίας c). Ζητούνται:

(α) [X] Η εύρεση της διαφορικής εξισώσεως για την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M με θετική φορά της $v(t)$ προς τα πάνω.

(β) [Y] Η γραφή της διαφορικής αυτής εξισώσεως (differential equation) de στη *Mathematica*.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de = m v'[t] + c v[t] == -m g$$

(γ) [Y] Με γνωστή την αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου $v(0) = v_0$ να γραφεί η σχετική αρχική συνθήκη (initial condition) ic. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$ic = v[0] == v_0$$

(δ) [Y] Πώς μπορούν να γραφούν οι δύο πιο πάνω εντολές χωρίς τις εξόδους τους (outputs) στη *Mathematica*, οι οποίες δεν είναι ιδιαίτερα πληροφοριακές (δεν προσφέρουν και πολλά ...) σε τέτοιου τύπου εντολές; **Υπόδειξη:** Για την πρώτη να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de = m v'[t] + c v[t] == -m g;$$

(ε) [X και Y] Να λυθεί το σχετικό πρόβλημα αρχικής τιμής. **Υπόδειξη:** Στη *Mathematica* να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve

$$sol = DSolve[{de, ic}, v[t], t]$$

(στ) [Y] Ποια είναι η σχετική συνάρτηση $v_s(t)$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$vs[t_] = sol[[1, 1, 2]] // Apart$$

Και σε απλοποιημένη μορφή; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Simplify.

(ζ) [X και Y] Να υπολογισθεί και η επιτάχυνση $a_s(t)$ του υλικού σημείου M .

(η) [X και Y] Να επαληθευθεί η ισχύς του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$m \text{ as}[t] == -m g - c \text{ vs}[t]$$

(θ) Να υπολογισθεί (με ολοκλήρωση) και η θέση $x(t)$ του υλικού σημείου M με αρχική θέση την $x(0) = x_0$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{xs}[t_] = \text{Integrate}[\text{vs}[\tau], \{\tau, 0, t\}] + x0 // \text{Apart} // \text{Simplify}$$

Υπόδειξη: Το Ελληνικό τ με Esc t Esc.

(ι) [X και Y] Να γίνουν και οι σχετικές επαληθεύσεις (verifications) των αποτελεσμάτων. **Υπόδειξη:** [Y] Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

$$\text{ver1} = \text{xs}'[t] == \text{vs}[t]$$

$$\text{ver1} = \text{xs}'[t] == \text{vs}[t] // \text{Simplify}$$

$$\text{ver2} = \text{xs}''[t] == \text{as}[t]$$

$$\text{ver3} = \text{vs}'[t] == \text{as}[t]$$

οπότε βέβαια και η λίστα

$$\{\text{ver1}, \text{ver2}, \text{ver3}\}$$

δίνει και αυτή αποτελέσματα True.

(ια) [X και Y] Ποιες είναι οι αρχικές τιμές της θέσεως $x_s(0)$, της ταχύτητας $v_s(0)$ και της επιταχύνσεως $a_s(0)$ για τη λύση του παρόντος προβλήματος Κινηματικής-Δυναμικής του υλικού σημείου; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{icv} = \{\text{xs}[0], \text{vs}[0], \text{as}[0]\}$$

και πολύ καλύτερα με τη χρήση και των εντολών Simplify και Apart

$$\text{icv} // \text{Simplify} // \text{Apart}$$

ΑΣΚΗΣΗ EMII-C4 ([X και Y] Επαλήθευση Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων, Ταλαντώσεις):

Ζητούνται: (α) [X και Y] Να ορισθεί η κλασική διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή στις Ταλαντώσεις σε μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας) - ελατηρίου (**Υπόδειξη:** το ω_0 με Esc Λατινικό ο Esc και 0)

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Στην εξίσωση αυτή $u = u(t)$ είναι η μετατόπιση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του, t ο χρόνος και ω_0 η συχνότητα (εννοείται η κυκλική συχνότητα, σχεδόν πάντοτε αυτή θα χρησιμοποιείται και θα εννοείται) της ταλαντώσεως. Επίσης η ταλάντωση είναι χωρίς απόσβεση: $c = 0$, δεν υπάρχει αποσβεστήρας, ούτε εφαρμόζεται κάποια εξωτερική δύναμη: $p(t) \equiv 0$. Δηλαδή έχουμε ελεύθερη ταλάντωση. Στη συνέχεια να επαληθευθεί ότι η διαφορική αυτή εξίσωση έχει γενική λύση της μορφής

$$u(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

με τα A και B αυθαίρετες σταθερές. Να γραφεί η λύση αυτή και σε εκθετική μορφή. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή TrigToExp. (β) [X και Y] Με βάση την πιο πάνω γενική λύση να βρεθεί η μερική λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0.$$

(γ) [X και Y] Να γίνουν οι χαρακτηρισμοί της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης σε μορφή λίστας.

(δ) [X και Y] Να επαναληφθούν οι απαντήσεις των ερωτημάτων (α), (β) και (γ), τώρα όμως για τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) - a^2 u(t) = 0,$$

οπότε η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$u(t) = A \cosh at + B \sinh at$$

με την παρουσία τώρα υπερβολικών συναρτήσεων (του υπερβολικού συνημιτόνου και του υπερβολικού ημιτόνου) αντί για τριγωνομετρικές συναρτήσεις. (ε) [X ή Y] Σε ποια φυσικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού απαντώνται οι διαφορικές εξισώσεις των ερωτημάτων (α) και (δ) (με λεπτομέρειες); (στ) [X] Να γίνουν και τα σχετικά σχήματα (επίσης με λεπτομέρειες).

ΟΜΑΔΑ EMII-D

ΑΣΚΗΣΗ EMII-D1 ([X και Y] **Σχηματισμός Διαφορικής Εξίσωσης**): Δίνεται η συνάρτηση

$$v(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x$$

με το β γνωστή σταθερά και τα A, B, C και D τέσσερις παραμέτρους. Ζητούνται: (α) [X] Να δηλωθεί η συνάρτηση αυτή στη *Mathematica* με το σύμβολο v βέβαια σαν συνάρτηση του x . **Υπόδειξη:** Το β στη *Mathematica* με `Esc b Esc`. (β) [X και Y] Να υπολογισθεί τώρα η τέταρτη παράγωγός της $D^4 v$. (γ) [X και Y] Να υπολογισθεί η διαφορά $d = v''''(x) - \beta^4 v(x)$ με απλοποίηση του αποτελέσματος. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Simplify`. (δ) [Y] Να εξαλειφθεί (καθαρισθεί) το σύμβολο v . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Clear`. (ε) [X και Y] Να γραφεί από την αρχή η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως de που επαληθεύει η συνάρτηση $v(x)$ χωρίς τις παραμέτρους A, B, C και D σ' αυτήν. (στ) [X και Y] Να προσδιορισθεί η γενική λύση `sol` της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (ζ) [X και Y] Σε ένα σχόλιο `comment1` να αναφερθεί σε ποιο ακριβώς πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού αναφέρεται η παρούσα άσκηση και σε ποιο μάθημα του Δ' Έτους Σπουδών ανήκει το πρόβλημα αυτό. **Υπόδειξη:** Να συμπληρωθούν οι τελείες στην πιο κάτω εντολή:

`comment = "Η άσκηση αυτή αναφέρεται σε πρόβλημα ...";`

(Η Αγγλική άνω τελεία στο τέλος χρειάζεται, ώστε να μη γίνει και δεύτερη εμφάνιση του σχολίου αυτού.) (η) Σε ανάλογο σχόλιο `comment2` να αναφερθεί εάν ή όχι έχει επαληθευθεί η διαφορική εξίσωση `de` μετά την εύρεση της λύσεως της `sol` και γιατί.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-D2 ([X] **Συνοριακές Συνθήκες. Μηχανική των Υλικών: Δοκοί**): Ζητούνται: (α) Να γραφεί η διαφορική εξίσωση συνήθους δοκού δυσκαμψίας EI υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$. (β) Να δοθούν οι πλήρεις χαρακτηρισμοί της. (γ) Να υπολογισθεί η γενική λύση της για σταθερή φόρτιση $p(x) = p_0$. (δ) Να γίνει επαλήθευση της λύσεως αυτής. (ε) Να γραφούν οι συνοριακές συνθήκες για τις εξής δοκούς μήκους L με $0 \leq x \leq L$: (i) Αμφίπακτη, (ii) Αμφιέρειστη, (iii) Πρόβολο με ελεύθερο το αριστερό άκρο του $x = 0$ και πακτωμένο το δεξιό $x = L$. (iv) Μονόπακτη υπερστατική δοκό με κύλιση στο αριστερό άκρο της $x = 0$ και πάκτωση στο δεξιό $x = L$.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-D3 ([X και Y] **Δυναμική: Ελεύθερη Πτώση Υλικού Σημείου**): Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών (διαφορική εξίσωση και δύο αρχικές συνθήκες) με t το χρόνο

$$\ddot{x}(t) = -g, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

που αφορά στην ελεύθερη πτώση υλικού σημείου στο γήινο πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση g από την αρχική θέση x_0 και με αρχική ταχύτητα v_0 . Η άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ δηλώνει τη θέση του υλικού σημείου με θετική φορά προς τα επάνω. Ζητούνται: (α) [Y] Η δήλωση της πιο πάνω

διαφορικής εξίσωσης (differential equation) $\ddot{x}(t) = -g$ με το σύμβολο `de`. Η εύρεση της λύσεως `sol` του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών με τη χρήση της εντολής `DSolve`. Η απλοποίηση της λύσεως `sol` που βρέθηκε με χρήση της εντολής `Simplify`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
sol1 = sol//Simplify
```

Η δήλωση συναρτήσεως $x_s(t)$ για την απλοποιημένη λύση που βρέθηκε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
xs[t_] = sol1[[1,1,2]]
```

Η δήλωση ανάλογης συναρτήσεως για την ταχύτητα $v_s(t)$ του υλικού σημείου M . Επίσης για την επιτάχυνση $a_s(t)$ του ίδιου υλικού σημείου. Να γίνει τελικά και επαλήθευση (verification) της λύσεως. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
ver = as[t] == -g
```

(β) [X] Να εκτελεστούν όλοι οι πιο πάνω υπολογισμοί και με το χέρι και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τον υπολογιστή [Y] και με το χέρι [X].

ΑΣΚΗΣΗ EMII-D4 ([X και Y] Δυναμική: Πτώση Υλικού Σημείου με Αντίσταση του Αέρα): Θεωρούμε τώρα την κατακόρυφη προς τα πάνω κίνηση υλικού σημείου M μάζας m στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με επιτάχυνση g) με αρχική ταχύτητα v_0 , αλλά και με αντίσταση του αέρα ανάλογη (με θετική σταθερά αναλογίας $c: c > 0$) του τετραγώνου $v^2(t)$ της ταχύτητας $v = v(t)$ του υλικού σημείου M (με t το χρόνο). Ζητούνται: (α) [X] Να αποδειχθεί η ισχύς της διαφορικής εξίσωσης

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - cv^2.$$

(β) [Y] Η δήλωση της διαφορικής αυτής εξίσωσης στη *Mathematica* με το σύμβολο `de`. Στη συνέχεια η επίλυση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη την αρχική ταχύτητα v_0

$$v(0) = v_0$$

(πρόβλημα αρχικής τιμής) με τη χρήση της εντολής `DSolve`. Να γίνει και απλοποίηση της λύσεως με την εντολή `Simplify`. Να ξαναγραφεί η ίδια διαφορική εξίσωση με τη χρήση της σταθερής ταχύτητας

$$v_f = \sqrt{\frac{mg}{c}}.$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή (ο εκθέτης με `Ctrl 6`, ουσιαστικά με `Ctrl ^`, παρακαλώ!)

```
de1 = de /. m -> c v^2/g
```

Να λυθεί και η απλοποιημένη αυτή διαφορική εξίσωση `de1`. Είναι πραγματικά απλοποιημένη και η λύση `sol1` που προκύπτει; Από τη λύση `sol1` που βρέθηκε να γραφεί η άγνωστη συνάρτηση της ταχύτητας σαν συνάρτηση $v_s(t)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
vs[t_] = sol1[[1, 1, 2]]
```

Να γίνει και επαλήθευση (verification) της λύσεως $v_s(t)$ που βρέθηκε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
ver = de1 /. v -> vs
```

Ίσως να μην αρκεί η εντολή αυτή! Να χρησιμοποιηθεί επομένως και η εντολή `Simplify`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
ver1 = ver//Simplify
```

(γ) [X] Να γίνουν οι πλήρεις χαρακτηρισμοί (τι τύπων είναι) για την παραπάνω διαφορική εξίσωση. (δ) [X] Να εκτελεστούν όλοι οι πιο πάνω υπολογισμοί και με το χέρι και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τον υπολογιστή [Y] και με το χέρι [X].

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-D5 ([X και Y] Ταλαντώσεις: Μονοβάθμιο Μηχανικό Σύστημα, Αρμονικός Ταλαντωτής, Ελεύθερες Ταλαντώσεις): Δίνεται ένας αρμονικός ταλαντωτής μάζας m και ελατηρίου σταθεράς k . Η σχετική διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k u = 0$$

με $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου M από τη θέση ισορροπίας του και t το χρόνο. Ζητούνται: (α) [X] Το σχετικό σχήμα (λεπτομερώς). (β) [X] Η απόδειξη της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως. (γ) [X] Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (δ) [Y] Η δήλωσή της με το σύμβολο de (differential equation, διαφορική εξίσωση) στη *Mathematica*. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de = m u''[t] + k u[t] == 0$$

Η απλοποίηση της διαφορικής αυτής εξισώσεως de με τη χρήση της φυσικής κυκλικής συχνότητας

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

του αρμονικού ταλαντωτή. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de1 = de /. k -> m \omega_0^2$$

Υπόδειξη: Το σύμβολο ω_0 στη *Mathematica* προκύπτει σαν Esc Λατινικό ο Esc και 0 (χωρίς δείκτη). (Ένας εκθέτης προκύπτει με Ctrl 6 ή Ctrl ^, ενώ ένας δείκτης με Ctrl - ή Ctrl _ , αν και δε συνιστάται η χρήση δεικτών, επειδή προκαλεί συχνά σφάλματα σε συναρτήσεις με δείκτες. Θεωρούμε επιπλέον και τις αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad t = 0.$$

Να δηλωθούν και οι αρχικές αυτές συνθήκες (initial conditions) στη *Mathematica* με το σύμβολο ics .

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$ics = \{u[0] == u_0, u'[0] == v_0\}$$

Στη συνέχεια να επιλυθεί το πιο πάνω πρόβλημα αρχικών τιμών, δηλαδή η διαφορική εξίσωση (differential equation) $de1$ μαζί με τις αρχικές συνθήκες (initial conditions) ics . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή $DSolve$, πιο συγκεκριμένα στη μορφή της

$$sol = DSolve[\{de1, ics\}, u[t], t]$$

Στη συνέχεια ζητείται να γραφεί η λύση sol που προσδιορίστηκε σε μορφή συναρτήσεως $u_s(t)$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$us[t_] = sol[[1, 1, 2]]/Apart$$

Σε τι ακριβώς χρησιμεύει η εντολή $Apart$; Να ορισθούν και οι ανάλογες συναρτήσεις για την ταχύτητα $v_s(t)$ με τη χρήση της εντολής

$$vs[t_] = us'[t]$$

καθώς και την επιτάχυνση $a_s(t)$ του υλικού σημείου M . Να γίνει και επαλήθευση (verification) της λύσεως που βρέθηκε. **Υπόδειξη:** Η εντολή

$$ver = as[t] + \omega_0^2 us[t] == 0$$

φαίνεται να μην αρκεί. Άρα χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί και η εντολή $Simplify$. Ποια είναι η λίστα (με τρία στοιχεία) της αρχικής θέσεως, της αρχικής ταχύτητας και της αρχικής επιταχύνσεως (τη χρονική στιγμή $t = 0$) του υλικού σημείου M ; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\{us[0], vs[0], as[0]\}$$

(ε) [X] Να επαληθευθεί και με το χέρι η λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών που ήδη προσδιορίστηκε. (στ) [X και Y] Να επαναληφθούν τα ερωτήματα (γ), (δ) και (ε) για τη διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} - ku = 0$$

(απλά με πρόσημο πλην, −, τώρα). **Υπόδειξη:** [Y] Για να προκύψει η λύση με τη *Mathematica* στην απλούστερη δυνατή μορφή της (με τη χρήση των υπερβολικών συναρτήσεων \cosh και \sinh αντί για την εκθετική συνάρτηση \exp), θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί και η εντολή `ExpToTrig`, καλύτερα σε συνδυασμό με την εντολή `Simplify`, δηλαδή τελικά η εντολή

`us[t_] = sol[[1, 1, 2]]//ExpToTrig//Simplify`

ΟΜΑΔΑ EMII-E

ΑΣΚΗΣΗ EMII-E1 ([X] *Ορθογώνιες Τροχιές, Ρευστομηχανική Ιδεατού Ρευστού*): Ζητούνται:
(α) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της μονοπαραμετρικής οικογένειας των ευθειών

$$y = kx$$

με παράμετρο το k . (β) Σε ποιο κλασικό πρόβλημα της Ρευστομηχανικής ιδεατού ρευστού αναφέρονται; (γ) Να γίνει και το σχετικό σχήμα. (δ) Να βρεθούν κι οι ορθογώνιες τροχιές της μονοπαραμετρικής οικογένειας των παραβολών

$$x^2 - cx + 4y = 0$$

με παράμετρο το c .

ΑΣΚΗΣΗ EMII-E2 ([X και Y] *Ορθογώνιες Τροχιές. Ρευστομηχανική Ιδεατού Ρευστού: Ισοδυναμικές Γραμμές, Γραμμές Ροής. Μετάδοση Θερμότητας: Ισόθερμες Γραμμές, Γραμμές Ροής Θερμότητας*): (α) [X και Y] Να βρεθούν (και με το χέρι [X] και με τον υπολογιστή [Y]) οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπύλων

$$\sinh x \sin y = C_1$$

στο επίπεδο Oxy και με το C_1 σταθερά, μάλλον παράμετρο, που αλλάζει από καμπύλη σε καμπύλη, αλλ' όχι βέβαια πάνω στην ίδια καμπύλη. Οι καμπύλες αυτές θεωρείται ότι παριστάνουν τις γραμμές ροής σε διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική. Τι παριστάνουν οι ορθογώνιες τροχιές τους; **Υπόδειξη:** Τις ισοδυναμικές γραμμές στην ίδια ροή. Οι ρόλοι αυτοί μπορούν βέβαια να εναλλαχθούν σε άλλο κατάλληλο πρόβλημα ροής. (β) [X] Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα στη Μετάδοση Θερμότητας ισχύουν οι ίδιες ορθογώνιες τροχιές: οι τροχιές του προηγούμενου ερωτήματος; Πώς ακριβώς καλούνται οι σχετικές καμπύλες; **Υπόδειξη:** Καλούνται γραμμές ροής θερμότητας (οι γραμμές ροής στη Ρευστομηχανική) και ισόθερμες καμπύλες, δηλαδή με σταθερή θερμοκρασία, ισοθερμοκρασιακές (οι ισοδυναμικές γραμμές στη Ρευστομηχανική).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-E3 ([X και Y] *Ταλαντώσεις*): Δίνεται η γνωστή εξίσωση των ελεύθερων ταλαντώσεων υλικού σημείου M χωρίς απόσβεση

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0, \quad u = u(t),$$

με $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του και με t το χρόνο. Ζητούνται: (α) [X] Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης (τελικά σε πραγματική μορφή) και να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των μερικών λύσεων των οποίων η γενική αυτή λύση αποτελεί γραμμικό συνδυασμό (υπέρθυση, επαλληλία). (β) [Y] Να δηλωθεί η ίδια διαφορική

εξίσωση (differential equation) με το σύμβολο de στη *Mathematica*. **Υπόδειξη:** Το σύμβολο ω_0 με Esc Λατινικό ο Esc και 0 παρακαλώ! Να βρεθεί η γενική λύση sol της διαφορικής εξίσωσης de. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve

```
sol = DSolve[de, u[t], t]
```

Η γενική αυτή λύση είναι γραμμικός συνδυασμός δύο μερικών λύσεων, των

```
sol1 = sol[[1,1,2,1,2]]
```

(οι διπλές αγκύλες με Esc [[Esc και Esc]] Esc παρακαλώ απλά για λόγους εμφανίσεως) και

```
sol2 = sol[[1,1,2,2,2]]
```

Αυτές αποτελούν σύνολο sols θεμελιωδών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης de, το εξής σύνολο:

```
sols = {sol1, sol2}
```

με αντίστοιχες παραγώγους Dsols που υπολογίζονται εύκολα με την εντολή D

```
Dsols = D[sols, t]
```

Ζητείται να αποδειχθεί ότι οι λύσεις αυτές sols είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. **Υπόδειξη:** Το μητρώο (matrix, πίνακας) Wm που αντιστοιχεί στη σχετική ορίζουσα Wronski W είναι προφανώς το εξής:

```
Wm = {sols, Dsols}
```

Η ίδια η ορίζουσα Wronski W μπορεί να υπολογισθεί εύκολα με την εντολή Det για τον υπολογισμό ορίζουσας (determinant). Εάν απαιτείται, να γίνει και απλοποίηση. (Απαιτείται ή όχι; Η απάντηση παρακαλώ σε παράγραφο κειμένου με Alt 7, όχι με Alt 4.) Τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Simplify στη μορφή

```
W = W//Simplify
```

ή με κατευθείαν υπολογισμό

```
W = Det[Wm]//Simplify
```

Ισχύει επομένως η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων sol1 και sol2, όπως πραγματικά πρέπει να συμβαίνει; (Η απάντηση σε παράγραφο κειμένου με Alt 7 παρακαλώ!) Τελικά πώς μπορεί να υπολογισθεί η ορίζουσα Wronski W των λύσεων sols με μία μόνο εντολή της *Mathematica*;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Ε4 (IX και Y) Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου): Θεωρούμε την κίνηση υλικού σημείου M μάζας m μέσα σε ένα λεπτό σωλήνα που περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Λαμβάνοντας υπόψη το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με δύναμη τη φυγόκεντρο δύναμη $m\omega_0^2 u$, τελικά προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \omega_0^2 u = 0, \quad u = u(t), \quad t > 0,$$

με $u = u(t)$ την άγνωστη συνάρτηση, t το χρόνο και το ω_0 γνωστή σταθερά. Ζητούνται: (α) Η δήλωση της διαφορικής αυτής εξίσωσης (differential equation) με το σύμβολο de. **Υπόδειξη:** Το σύμβολο ω_0 με Esc Λατινικό ο Esc και 0 παρακαλώ (καλύτερα χωρίς δείκτη!). (β) Η μερική λύση (partial solution) sol της ίδιας διαφορικής εξίσωσης υπό τις εξής αρχικές συνθήκες (τη χρονική στιγμή $t = 0$): $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ με πλήρη απλοποίηση της λύσεως αυτής. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve καθώς και η εντολή FullSimplify σε μία εντολή. (γ) Η δήλωση της συναρτήσεως $u_s(t)$ που αντιστοιχεί στη λύση sol. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
us[t_] = sol[[1,1,2]]
```

(Οι διπλές αγκύλες με Esc [[Esc και Esc]] Esc παρακαλώ!) (δ) Η επαλήθευση (verification) ver της λύσεως sol που προέκυψε με απλοποίηση μάλιστα του αποτελέσματος ver. **Υπόδειξη:** Να

χρησιμοποιηθεί η εντολή

`ver = de /. u -> us//Simplify`

(ε) Στη λύση `sol` παρουσιάζονται οι συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο, όπως και σε πολλά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Στο ερώτημα αυτό ζητείται απλά η λίστα `list1` των υπερβολικών (όχι τριγωνομετρικών) συναρτήσεων συνημίτονο, ημίτονο, συνεφαπτομένη και εφαπτομένη για την τιμή ωt του ορίσματος. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`list1 = {Cosh[ω0 t], Sinh[ω0 t], Coth[ω0 t], Tanh[ω0 t]}`

(Το σύμβολο ω_0 με `Esc` Λατινικό ο `Esc` και 0 χωρίς δείκτη.) (στ) Στη συνέχεια ζητείται η λίστα `list2` των παραγώγων των συναρτήσεων της λίστας `list1`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η απλή εντολή

`list2 = D[list1, t]`

με `D` την εντολή παραγωγίσεως. (ζ) Ανάλογα ζητείται και η λίστα `list3` των αορίστων ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων της λίστας `list1`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Integrate` για την ολοκλήρωση. (η) Τέλος για τις υπερβολικές συναρτήσεις να ελεγχθεί με μία μόνο εντολή και με τη χρήση κατάλληλης λίστας `formulae` (τύποι) η ισχύς των τύπων

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh 2x = 2 \cosh x \sinh x.$$

Υπόδειξη: Δυστυχώς η σχετική εντολή

`formulae = {Tanh[x] == Sinh[x]/Cosh[x], Cosh[x]^2 - Sinh[x]^2 == 1}`

(ο τρίτος τύπος να προστεθεί ανάλογα!) δεν αρκεί παρά μόνο στον πρώτο τύπο. (Οι εκθέτες με `Ctrl 6` ή `Ctrl ^`, σχεδόν το ίδιο είναι, παρακαλώ!) Απαιτείται και απλοποίηση στον ίδιο τύπο με την εντολή `Simplify` ή (μετά την αποτυχία) αμέσως πιο κάτω με την εντολή

`formulae = formulae//Simplify`

Τελικά πρέπει να προκύψει λίστα με στοιχεία μόνο `True`, δηλαδή «αληθές» (όχι βέβαια `False`, δηλαδή «ψευδές» ή άλλα στοιχεία). (θ) `[X]` Ζητείται επίσης η επίλυση όλης της ασκήσεως με το χέρι.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Ε5 (*[X και Y] Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως*): Σε δοκό επί ελαστικής βάσεως (θεμελίου, θεμελιώσεως, συνήθως του εδάφους) ισχύει η εξής διαφορική εξίσωση (Εξίσωση (11.13.2) της Ενότητας A11.13 του Μέρους A του διδακτικού βιβλίου):

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\beta^4 v = \frac{p}{EI}, \quad v = v(x),$$

σύμφωνα με την προσεγγιστική θεωρία του Winkler με x τη θέση κατά μήκος της δοκού, $v = v(x)$ το βέλος κάμψεως, EI τη δυσκαμψία της δοκού και β γνωστή σταθερά του συστήματος ελαστικής βάσεως-δοκού, που εξαρτάται τόσο από τις ιδιότητες της ελαστικής βάσεως όσο και από τη δυσκαμψία EI και το πάχος b της δοκού. Η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση p στη δοκό θεωρείται σταθερά. Ζητούνται: (α) Η δήλωση της διαφορικής αυτής εξισώσεως με το σύμβολο `de`. **Υπόδειξη:** Η δυσκαμψία EI της δοκού να δηλωθεί με το ενιαίο σύμβολο EI και όχι με πολλαπλασιασμό, γιατί τα σύμβολα E και I έχουν ειδικές σημασίες στη *Mathematica*. Ποιες; Επίσης γιατί προτιμήθηκε το σύμβολο `de` για τη διαφορική εξίσωση; Ποιας Αγγλικής φράσεως αποτελεί σύντμηση; (Η απάντηση σε κοινή παράγραφο κειμένου με `Alt 7`, όχι με `Alt 4`, παρακαλώ!) (β) Έξι χαρακτηρισμοί `char` της διαφορικής εξισώσεως `de` σε μορφή λίστας (πιθανός πρώτος χαρακτηρισμός της: "Συνήθης"). (γ) Στη συνέχεια ο ορισμός της σταθερής συναρτήσεως

$$v_p(x) = \frac{p}{4EI\beta^4}. \quad (2)$$

(Το β με Esc b Esc, ο εκθέτης με Ctrl 6 ή Ctrl ^, σχεδόν το ίδιο είναι, παρακαλώ!) (δ) Η επαλήθευση (verification) ver ότι η σταθερή αυτή συνάρτηση $v_p(x)$ είναι μερική λύση της παρούσας διαφορικής εξίσωσης de. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{ver} = \text{de} /. v \rightarrow v_p$$

(ε) Η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση (homogeneous differential equation) deh. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{deh} = \text{de} /. p \rightarrow 0$$

(στ) Ο ορισμός της συναρτήσεως $v_h(x) = A \cosh \beta x \cos \beta x$ (με το A σταθερά). (ζ) Ο υπολογισμός της τέταρτης παραγώγου $v_h''''[x]$ της συναρτήσεως αυτής. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$D4v_h[x_] = v_h''''[x]$$

ή κάποια ισοδύναμη εντολή. (η) Η επαλήθευση ότι η ίδια συνάρτηση $v_h(x)$ αποτελεί λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης deh. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{ver} = D4v_h[x] + 4 \beta^4 v_h[x] == 0$$

(Το β με Esc b Esc παρακαλώ ή έστω απλά με β με γύρισμα στο Ελληνικό πληκτρολόγιο!) (θ) Στη συνέχεια ζητείται να βρεθεί η γενική λύση solh της διαφορικής εξίσωσης de. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve. (ι) [X] Τέλος ζητείται κι η επίλυση όλης της ασκήσεως με το χέρι.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Ε6 (IX και Y) Ρευστομηχανική: Ιδεατό Ρευστό, Ορθογώνιες Τροχιές: Στη διδιάστατη (επίπεδη) Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού θεωρούμε μια πηγή ρευστού στο σημείο $O = (0, 0)$ και τη σχετική αστρόβιλη και μόνιμη ροή. Οι γραμμές ροής είναι ευθείες που διέρχονται από την πηγή του ρευστού (στην αρχή των συντεταγμένων $O = (0, 0)$). Ζητούνται: (α) Να δηλωθούν οι εξισώσεις των ευθειών αυτών σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) με το σύμβολο lines με ανεξάρτητη μεταβλητή την x και εξαρτημένη την $y = y(x)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{lines} = y[x] == k x$$

Υπόδειξη: Εάν προκαλούν δυσφορία ορισμένες προειδοποιήσεις της Mathematica, να σβήνονται με Ctrl x παρακαλώ. Πολλές μπορούν να αποφεύγονται εντελώς με τη χρήση της εντολής Off

$$\{\text{Off}[\text{General}::\text{spell}], \text{Off}[\text{General}::\text{spell}1];$$

(Τα spell και spell1 φυσικά με ell κι όχι με κεφαλαίο I. Μπορεί να δοκιμασθεί η εντολή αυτή στην παρούσα άσκηση. Η αντίθετη εντολή φυσικά με On αντί Off.) (β) Με παραγωγή ως προς τη μεταβλητή x να βρεθεί η σχετική εξίσωση Dlines. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$D\text{lines} = D[\text{lines}, x]$$

για την παραγωγή αυτή. (γ) Να γραφεί η διαφορική εξίσωση (differential equation) de1 των ευθειών lines με πρόχειρη απαλοιφή της σταθεράς k μεταξύ των εξισώσεων lines και Dlines. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{de1} = y[x] == y'[x] x$$

Πιο επίσημα μπορεί ασφαλώς να χρησιμοποιηθεί η εντολή Eliminate της Mathematica για την απαλοιφή του k . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{de1} = \text{Eliminate}[\{\text{lines}, D\text{lines}\}, k]$$

(δ) Να δοθούν πέντε χαρακτηρισμοί char1 για τη διαφορική εξίσωση de1 σε μορφή μιας λίστας.

(ε) Να λυθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση de1 (γενική λύση με δήλωσή της με το σύμβολο sol1) με απλοποίηση μάλιστα του αποτελέσματος. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές DSolve και Simplify ταυτόχρονα, η εντολή Simplify καλύτερα στο τέλος, δηλαδή με //Simplify στο τέλος.

(στ) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών των ευθειών αυτών lines με δήλωσή της με το σύμβολο de2. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de2 = de1 /. y'[x] -> -1/y'[x]$$

Να εξηγηθεί επίσης με λόγια (σε τρεις γραμμές και σε παράγραφο κειμένου με Alt 7, όχι με Alt 4) η πιο πάνω εντολή από μαθηματικής απόψεως. (ζ) Να επιλυθεί η διαφορική αυτή εξίσωση de2 (γενική λύση με δήλωσή της με το σύμβολο sol2) και μάλιστα με απλοποίηση της λύσεως αυτής. (η) Να ορισθεί και η σχετική συνάρτηση $y_{2a}(x)$ που αντιστοιχεί στο πρώτο μέρος της λύσεως sol2[[1,1,2]] και να γίνει επίσης επαλήθευση (verification) της συναρτήσεως-λύσεως αυτής $y_{2a}(x)$ με δήλωσή της με το σύμβολο ver2a. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

$$ys2a[x_] = sol2[[1,1,2]]$$

(οι διπλές αγκύλες με Esc [[Esc και Esc]] Esc παρακαλώ!) και

$$ver2a = de2 /. y -> ys2a$$

(θ) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα και για το δεύτερο μέλος της λύσεως $y_{2b}(x)$, τώρα όμως με sol2[[2,1,2]]. (ι) [X] Η επίλυση με το χέρι όλης της ασκήσεως και η σχεδίαση των ορθογωνίων τροχιών στο παρόν πρόβλημα Ρευστομηχανικής ιδεατού ρευστού. (ια) [X] Ποιο είναι το ανάλογο (με τις ίδιες ακριβώς ορθογωνίες τροχιές) στη Μετάδοση Θερμότητας;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-E7 ([Y] Δυναμική και Ταλαντώσεις: Απλό Εκκρεμές): Μελετάμε τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση του απλού εκκρεμούς (pendulum) με μήκος νήματος L και με μάζα m στο άκρο του. Ζητούνται: (α) Η σειρά Maclaurin (Maclaurin series) ser της συναρτήσεως $\sin \theta$ με όρους μέχρι και θ^{12} . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Series

$$ser = Series[\text{Sin}[\theta], \{\theta, 0, 12\}]$$

(Το θ με Esc q Esc παρακαλώ!) (β) Η ίδια σειρά, αλλά τώρα χωρίς το συμβολισμό $O(\theta^{13})$ στο τέλος. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Normal. (γ) Η μη γραμμική (η αρχική) διαφορική εξίσωση PendulumDE του εκκρεμούς με άγνωστη συνάρτηση τη γωνία απομακρύνσεως του νήματος από από την κατακόρυφη θέση $\theta = \theta(t)$ με t το χρόνο. Η φυσική κυκλική συχνότητα ω_0 (χωρίς δείκτη ή με δείκτη, ο δείκτης με Ctrl - ή Ctrl _, σχεδόν το ίδιο είναι) του εκκρεμούς θεωρείται γνωστή. (Το σύμβολο ω με Esc Λατινικό ο Esc παρακαλώ!) (δ) Η γενική λύση solg της διαφορικής αυτής εξισώσεως PendulumDE. (ε) Η γραμμικοποιημένη μορφή PendulumDE1 της μη γραμμικής (της αρχικής) διαφορικής εξισώσεως PendulumDE. (στ) Η γενική λύση sol1g της γραμμικής διαφορικής αυτής εξισώσεως PendulumDE1. (ζ) Η μερική λύση sol1p της ίδιας διαφορικής εξισώσεως PendulumDE1 με τις δύο αρχικές συνθήκες

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \theta_1.$$

(Το θ με Esc q Esc.) (η) Η προσεγγιστική μορφή PendulumDE3 της αρχικής διαφορικής εξισώσεως PendulumDE με όρους μέχρι και θ^3 (χωρίς τη λύση της). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{PendulumDE3} = \theta''[t] + \omega_0^2 \text{Normal}[\text{Series}[\text{Sin}[\theta[t]], \{\theta[t], 0, 4\}]] == 0$$

(θ) Τέλος ζητείται και η γενική λύση της αρχικής (δηλαδή της μη γραμμικοποιημένης) διαφορικής εξισώσεως PendulumDE με χρήση της εντολής DSolve. Τι σχόλιο θα μπορούσε να γίνει εδώ; (Η απάντηση σε παράγραφο κειμένου με Alt 7, όχι με Alt 4 παρακαλώ!)

ΑΣΚΗΣΗ EMII-E8 ([X και Y] Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου): Θεωρούμε την κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου M μάζας m στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με επιτάχυνση g), κίνηση του υλικού σημείου προς τα κάτω, προς τη γη (όχι προς τα πάνω) με αντίσταση του αέρα ανάλογη του τετραγώνου $v^2(t)$ της ταχύτητας $v(t)$ του υλικού σημείου M με γνωστή θετική σταθερά αναλογίας c . Ζητούνται: (α) [Y] Η διαφορική εξίσωση de για την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού αυτού

σημείου με θετική φορά της ταχύτητας προς τα πάνω. (β) [Y] Η μερική λύση (partial solution) sol της διαφορικής αυτής εξίσωσης de με ξεκίνημα του υλικού σημείου (τη χρονική στιγμή $t = 0$) με αρχική ταχύτητα $v(0) = v_0$ ($v0$ στη *Mathematica*) μετά από απλοποίησή της. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές *DSolve* και *Simplify*, η δεύτερη καλύτερα στο τέλος, δηλαδή σαν *//Simplify* στο τέλος της εντολής. (γ) [Y] Το ίδιο ερώτημα, αλλά με ξεκίνημα του υλικού σημείου (για $t = 0$) από την ηρεμία. Ποια συνάρτηση παρουσιάζεται στο αποτέλεσμα αυτό; (δ) [X] Η επίλυση με το χέρι του προηγούμενου ερωτήματος (γ). (ε) [X] Συμφωνούν τα αποτελέσματα με το χέρι και με τον υπολογιστή;

ΟΜΑΔΑ EMII-F

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F1 ([X και Y] Ταλαντώσεις): Στις ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου και ίσως αποσβεστήρα ζητούνται (με τα συνηθισμένα σύμβολα m και ξ : το ξ με *Esc* Λατινικό \times *Esc*, και ω_0 : το ω με *Esc* Λατινικό o *Esc* για τις παραμέτρους) οι διαφορικές εξισώσεις:

(α) *vde1* για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση και απλά η λύση της *sol1*. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή *DSolve*.

(β) *vde2* για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση υπό αυθαίρετη φόρτιση $p(t)$ και απλά η λύση της *sol2* με πλήρη απλοποίηση του αποτελέσματος. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή *FullSimplify*, που είναι και αυτή χρήσιμη εδώ.

(γ) *vde3* για ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση και απλά η λύση της *sol3*.

(δ) *vde4* για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση υπό αυθαίρετη φόρτιση $p(t)$ και απλά η λύση της *sol4* με απλοποίηση του αποτελέσματος. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή *Simplify*, που είναι και αυτή χρήσιμη εδώ.

(ε) *vde5* για ελεύθερες ταλαντώσεις με κρίσιμη απόσβεση (υποχρεωτικά με βάση τη διαφορική εξίσωση *vde3*) και απλά η λύση της *sol5* με απλοποίηση του αποτελέσματος. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$vde5 = vde3 /. \xi \rightarrow 1$$

(στ) *vde6* για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με κρίσιμη απόσβεση υπό αυθαίρετη φόρτιση $p(t)$ (υποχρεωτικά με βάση τη διαφορική εξίσωση *vde4*) και απλά η λύση της *sol6* με απλοποίηση.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F2 ([X] Ταλαντώσεις): Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (υπό φόρτιση $p(t)$) ενός μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα υπό ισχυρή απόσβεση (με τα συνηθισμένα σύμβολα m , ξ και ω_0 για τις τρεις παραμέτρους) ζητείται η απόκριση του συστήματος $u(t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$u(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = 0$$

υποχρεωτικά με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F3 ([X και Y] Ταλαντώσεις): Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου (χωρίς αποσβεστήρα) υπό φόρτιση (εξωτερική δύναμη)

$$p(t) = p_0 e^{-at} \quad \text{με} \quad a > 0 \quad \text{και} \quad t \geq 0$$

ζητούνται:

(α) Η απόκριση $u_1(t)$ του συστήματος με μηδενικές αρχικές συνθήκες με την κατευθείαν χρήση του σχετικού ολοκληρωτικού τύπου του Duhamel (6.2.18). **Υπόδειξη:** Να γίνει δήλωση της συναρτήσεως $u_1(t)$ στη *Mathematica* σαν $u1[t_]$. Να γίνει και απλοποίηση του αποτελέσματος.

(β) Η αντίστοιχη συνάρτηση $u_2(t)$ για μοναδιαίες τιμές όλων των παραμέτρων εκτός από τη σταθερά a . Γι' αυτή να τεθεί $a = 0.1$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$u_2[t_] = u_1[t] /. \{m \rightarrow 1, \omega_0 \rightarrow 1, a \rightarrow 0.1, p_0 \rightarrow 1\}$$

(γ) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως αυτής $u_2(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, 30]$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{Plot}[u_2[t], \{t, 0, 30\}]$$

ή πιο «εκλεπτυσμένη», «κομψή» παραλλαγή της (με άξονες, τίτλο, χρώμα, παχύτερη γραμμή, κλπ.).

(δ) Τέλος να γίνουν και σχετικές παρατηρήσεις σε σχόλιο comment (με συμβολοσειρά, string, σε εισαγωγικά) για την προηγούμενη γραφική παράσταση.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F4 ([X] Δυναμική του Υλικού Σημείου): Ένα υλικό σημείο M μάζας m κινείται ευθύγραμμο (κατά μήκος του άξονα Ox) σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δυνάμεως τριβής $F = F(t)$ της μορφής

$$F(t) = bv(t) + cv^3(t), \quad t \geq 0,$$

με t το χρόνο, $v = v(t)$ την ταχύτητα του υλικού σημείου και b και c γνωστές και μάλλον προφανώς αρνητικές σταθερές. Ζητούνται: (α) Η κατασκευή (ο σχηματισμός, η μόρφωση) της διαφορικής εξίσωσης για την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M . (β) Η αναγωγή της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε γραμμική με κατάλληλη νέα άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) $w = w(t)$. Στη συνέχεια για τη διαφορική εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος, δηλαδή για την εξίσωση

$$\frac{dw(t)}{dt} + \frac{2b}{m} w(t) = -\frac{2c}{m}$$

με τις ποσότητες m , b και c γνωστές σταθερές, ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t και εξαρτημένη μεταβλητή (άγνωστη συνάρτηση) τη $w = w(t)$ ζητούνται: (γ) Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (δ) Η επίλυση της αντίστοιχης ομογενούς (με $c = 0$) διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Το ίδιο με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών. Συμφωνούν τα αποτελέσματα; (ε) Ο έλεγχος εάν ή όχι η πιο πάνω μη ομογενής διαφορική εξίσωση (με $c \neq 0$) είναι πλήρης (ή ακριβής) ή όχι. (στ) Ανάλογος έλεγχος μετά από πολλαπλασιασμό της αρχικής (με $c \neq 0$) διαφορικής εξίσωσης επί τη συνάρτηση (πιθανό ολοκληρωτικό παράγοντα)

$$\mu(t) = e^{(2b/m)t}.$$

(ζ) Η γενική λύση της αρχικής (με $c \neq 0$) διαφορικής εξίσωσης με βάση το προηγούμενο ερώτημα. (η) Η λεπτομερής σύγκριση των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων (δ) και (ζ). (θ) Ποια είναι μια προφανής μερική λύση της αρχικής, μη ομογενούς (με $c \neq 0$) διαφορικής εξίσωσης;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F5 ([X και Y] Δυναμική του Υλικού Σημείου): Για τη θέση $r = r(t)$ (με t το χρόνο) υλικού σημείου M μάζας m που κινείται μέσα σε περιστρεφόμενο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 λεπτό ευθύγραμμο σωλήνα με σταθερό τό άκρο του $r = 0$ ισχύει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{r}(t) - \omega_0^2 r(t) = 0 \quad \text{με} \quad t > 0,$$

χωρίς εξωτερική δύναμη $p(t)$ στο δεξιό μέλος. (Στην εξίσωση αυτή έχει ληφθεί υπόψη η φυγόκεντρος δύναμη $m\omega_0^2 r(t)$ φυσικά προς τα έξω, όχι προς το σταθερό άκρο $r = 0$.) Ζητούνται: (α) [X] Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β) [X] Η γενική λύση της σε εκθετική μορφή με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης. (γ) [X] Η μετατροπή της προηγούμενης γενικής λύσεως σε υπερβολική μορφή (με απόδειξη του αποτελέσματος και κατάλληλη αλλαγή των αυθαίρετων σταθερών). (δ) [X] Η μερική λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες

$$r(0) = r_0 \quad \text{με} \quad \dot{r}(0) = v_0$$

(αρχική θέση και αρχική ταχύτητα αντίστοιχα) επίσης σε υπερβολική μορφή. (ε) [X] Η πλήρης επαλήθευση της μερικής λύσεως που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, δηλαδή τόσο ως προς την ίδια τη διαφορική εξίσωση όσο και ως προς τις δύο αρχικές συνθήκες. (στ) [X] Υποχρεωτικά με τη χρήση ορίζουσας Wronski η απόδειξη ότι οι θεμελιώδεις λύσεις που προέκυψαν στη γενική λύση (στην εκθετική της μορφή) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (ζ) [X] Το ίδιο ακριβώς ερώτημα και για την υπερβολική μορφή της γενικής λύσεως. (η) [Y] Να επαναληφθούν όλοι οι υπολογισμοί των προηγούμενων έξι ερωτημάτων (β) έως και (ζ) της ασκήσεως με τη χρήση της *Mathematica*. (θ) [X ή Y] Συμφωνούν ή όχι τα αποτελέσματα με το χέρι [X] και με τον υπολογιστή [Y];

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F6 ([X και Y] Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Συνήθεις Δοκοί): Σε συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) με φόρτιση απλά καμπτικές ροπές M_0 και M_L στα δύο άκρα της προκύπτει η εξής πάρα πολύ απλή ομογενής διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως:

$$v''''(x) = 0, \quad \text{με } 0 \leq x \leq L,$$

με x τη θέση κατά μήκος της δοκού και $v(x)$ το βέλος κάμψεως (εγκάρσια μετατόπιση) της δοκού, το οποίο σχηματίζει την ελαστική γραμμή της στην κάμψη. Ζητούνται: (α) [X και Y] Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (β) [X] Η απόδειξη ότι οι θεμελιώδεις λύσεις που παρουσιάζονται στη γενική αυτή λύση είναι γραμμικά ανεξάρτητες τόσο με άμεσο τρόπο (δηλαδή με βάση τον ορισμό των γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων) όσο και (γ) [X και Y] με τη χρήση της σχετικής ορίζουσας Wronski. (δ) [X και Y] Η μερική λύση που αντιστοιχεί σε γνωστές αρχικές συνθήκες

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI}, \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}$$

με M_0 την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως), που ήδη αναφέρθηκε, Q_0 την τέμνουσα δύναμη στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού και EI τη δυσκαμψία της καθώς και η επαλήθευση της λύσεως.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F7 ([X και Y] Ρευστομηχανική, Ιδεατό Ρευστό, Ορθογώνιες Τροχιές): Σε μια μόνιμη, αστρόβιλη, διδιάστατη (επίπεδη) ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική μέσα σε άπειρο μέσον που οφείλεται σε σημειακή πηγή στην αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$ οι γραμμές ροής είναι οι ευθείες γραμμές που διέρχονται από τη σημειακή πηγή. Ζητούνται: (α) [X και Y] Οι αλγεβρικές εξισώσεις των γραμμών ροής. (β) [X και Y] Η διαφορική εξίσωση που επαληθεύουν. (γ) [X και Y] Ποιες είναι οι ισοδυναμικές γραμμές που αποτελούν τις ορθογώνιες τροχιές των γραμμών ροής υποχρεωτικά με τη μέθοδο των διαφορικών εξισώσεων, εδώ και της διαφορικής εξισώσεως των ισοδυναμικών γραμμών και, στη συνέχεια, με την επίλυση τούτης της διαφορικής εξισώσεως; (δ) [X] Να γίνει και το σχετικό σχήμα των ορθογωνίων τροχιών. (ε) [X ή Y] Ποιο ακριβώς είναι το φυσικό ανάλογο στη Μετάδοση Θερμότητας; (με πολλές λεπτομέρειες).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F8 ([X και Y] Δυναμική του Υλικού Σημείου): Δίνεται η διαφορική εξίσωση της κινήσεως υλικού σημείου M μέσα σε λεπτό ευθύγραμμο σωλήνα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από το σταθερό άκρο του O (υπό την επίδραση μόνο της φυγοκέντρου δύναμης) με t το χρόνο και $u = u(t)$ τη θέση του υλικού σημείου M :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \omega_0^2 u = 0$$

Ζητούνται: Να δηλωθεί η σχετική διαφορική εξίσωση (differential equation) de στη *Mathematica*.

Υπόδειξη: Το Ελληνικό ω με Esc Λατινικό ο Esc παρακαλώ, ο εκθέτης με Ctrl ^ ή Ctrl 6. Αντί για την άμεση επίλυση της διαφορικής αυτής εξισώσεως με τη χρήση της εντολής DSolve θα προτιμηθεί εδώ καταρχήν η βήμα προς βήμα επίλυσή της για την κατανόηση της θεωρίας. Επειδή πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, στην αρχή υποθέτουμε λύση εκθετικής μορφής που τη δηλώνουμε με τη συνάρτηση

$$u_0(t) = e^{\mu t}$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή (με `Exp`, `Exp` στη *Mathematica*, την εκθετική συνάρτηση)

$$u0[t_] = \text{Exp}[\mu t]$$

(Το Ελληνικό μ με `Esc m Esc` παρακαλώ!) Αντικαθιστώντας τη βοηθητική αυτή συνάρτηση $u_0(t)$ στη διαφορική εξίσωση `de`, προκύπτει η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση (characteristic equation), αλλά πολλαπλασιασμένη και επί τον εκθετικό όρο $e^{\mu t}$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{chareq} = \text{de} /. u \rightarrow u0$$

Να γίνει και απλοποίηση της εξισώσεως που προέκυψε με την εντολή `Simplify`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{chareq} = \text{chareq} // \text{Simplify}$$

Αυτό θα μπορούσε βέβαια να είχε γίνει και απευθείας. Στη συνέχεια ζητείται η λύση `sol` της εξισώσεως `chareq` (χαρακτηριστική εξίσωση επί τον εκθετικό όρο $e^{\mu t}$, αλλ' ο όρος αυτός δεν επηρεάζει τις ρίζες!). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Solve`. Πόσες λύσεις `len` προέκυψαν; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Length` (μήκος), πιο συγκεκριμένα

$$\text{len} = \text{Length}[\text{sol}]$$

Για να κατασκευάσουμε τώρα τη γενική λύση (εδώ σε εκθετική μορφή) $u_g(t)$ της διαφορικής εξισώσεως `de`, θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο ρίζες $\mu_{1,2} = \pm \omega$ (που ήδη βρέθηκαν) της χαρακτηριστικής εξισώσεως (πολλαπλασιασμένης επί $e^{\mu t}$) `chareq` στη λύση της `sol`. Συγκεκριμένα θα πάρουμε τις σχετικές θεμελιώδεις λύσεις $e^{\mu_1 t}$ και $e^{\mu_2 t}$ πολλαπλασιασμένες φυσικά επί δύο αυθαίρετες σταθερές C_1 και C_2 αντίστοιχα. Δηλαδή θα πάρουμε το γραμμικό συνδυασμό των δύο θεμελιωδών λύσεων $e^{\mu_1 t}$ και $e^{\mu_2 t}$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$ug[t_] = C[1] \text{Exp}[\text{sol}[[1, 1, 2]] t] + C[2] \text{Exp}[\text{sol}[[2, 1, 2]] t]$$

για τη γενική λύση $u_g(t)$ που ζητείται και, λίγο πιο έξυπνα και με δυνατότητα γενικεύσεως, με χρήση και της εντολής `Sum` για το άθροισμα μέσω της εντολής

$$ug[t_] = \text{Sum}[C[k] \text{Exp}[\text{sol}[[k, 1, 2]] t], \{k, 1, \text{len}\}]$$

Αυτή κάνει χρήση και του ήδη γνωστού αριθμού `len` των λύσεων (εν προκειμένω 2). Βρέθηκε επομένως η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως `de`, κάτι το οποίο ζητείται να επαληθευθεί με τη χρήση και της εντολής `DSolve`. Η γενική αυτή λύση (solution) της διαφορικής εξισώσεως (differential equation) `de` ας αποκληθεί εδώ `solde`. Για την επαλήθευση (verification) τώρα της λύσεως $u_g(t)$ που βρέθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{ver} = \text{de} /. u \rightarrow ug // \text{Simplify}$$

που συμπεριλαμβάνει και απλοποίηση (simplification) με την εντολή `Simplify` του αποτελέσματος, ώστε να προκύψει τελικά `True` (αληθές). Η ίδια γενική λύση $u_g(t)$ μπορεί βέβαια να γραφεί (και είναι συνήθως καλύτερο αυτό!) και με τη χρήση των συναρτήσεων υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο. **Υπόδειξη:** Για τη μετατροπή των εκθετικών συναρτήσεων σε υπερβολικές να χρησιμοποιηθεί η εντολή `ExpToTrig` (εδώ εκ των πραγμάτων για πραγματικές, όχι μιγαδικές, συναρτήσεις) και η εντολή απλοποίησης `Simplify` ταυτόχρονα μέσω της τελικής εντολής

$$ugh[t_] = ug[t] // \text{ExpToTrig} // \text{Simplify}$$

Εδώ το σύμβολο h υποτίθεται ότι αναφέρεται σε υπερβολικές συναρτήσεις (hyperbolic functions). Αν το επιθυμούμε, μπορούμε μάλιστα πολύ εύκολα να απλοποιήσουμε και την εμφάνιση των δύο αυθαίρετων σταθερών C_1 και C_2 αλλάζοντάς τις κατάλληλα σε A και B με την εντολή

$$ugh[t_] = ugh[t] /. \{C[1] + C[2] \rightarrow A, C[2] - C[1] \rightarrow B\}$$

Τελικά ζητείται η επαλήθευση v_{gh} και της τελικής συναρτήσεως $u_{gh}(t)$, δηλαδή ότι αυτή επαληθεύει την αρχική διαφορική εξίσωση (differential equation) de με απλοποίηση φυσικά του αποτελέσματος με τη χρήση της εντολής `Simplify`.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-F9 (IX και Y) Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Δοκοί: Σε συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI ισχύει η ακόλουθη απλή διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p(x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L,$$

με x τη θέση κατά μήκος της δοκού και $v = v(x)$ το βέλος κάμψεως (εγκάρσια μετατόπιση) των σημείων της, που σχηματίζει τελικά την ελαστική γραμμή της, και $p = p(x)$ την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση κατά μήκος της δοκού. Ζητούνται: (α) [Y] Να δηλωθεί η διαφορική αυτή εξίσωση (differential equation) με το σύμβολο de για ομοιόμορφη (σταθερή) κατανεμημένη φόρτιση p . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de = EI \text{v}''''[x] == p$$

Σε ένα άκρο δοκού $x = a$ η δοκός θεωρείται πακτωμένη. Ποιες είναι οι σχετικές συνοριακές συνθήκες $bs1$ για το βέλος κάμψεως $v(x)$ στο άκρο αυτό; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$bs1 = \{v[a] == 0, v'[a] == 0\}$$

Απολύτως ανάλογα να δηλωθούν οι συνοριακές συνθήκες $bs2$, αν το ίδιο άκρο $x = a$ είναι απλά στηριγμένο (με άρθρωση ή κύλιση), καθώς και οι αντίστοιχες συνθήκες $bs3$, αν είναι ελεύθερο. Στη συνέχεια να δηλωθούν και οι πιθανές αριθμητικές τιμές (numerical values) $values$ αντικατάστασης (εφόσον θεωρηθεί σκόπιμο) της δυσκαμψίας $EI = 1$ (με ενιαίο το σύμβολο EI), της κατανεμημένης φορτίσεως $p = -1$ και του μήκους $L = 1$, για να χρησιμοποιηθούν πιο κάτω σε γραφικές παραστάσεις (όχι γενικά!). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$values = \{EI \rightarrow 1, p \rightarrow -1, L \rightarrow 1\}$$

Λόγω της χρήσεως παραπλήσιων συμβόλων, θα μπορούσε ίσως να χρησιμοποιηθεί και η εντολή `{Off[General::spell], Off[General::spell1]}`;

για να αποφεύγονται οι σχετικές προειδοποιήσεις της *Mathematica* για πιθανά ορθογραφικά λάθη, εάν ίσως θεωρούνται άχρηστες (αν και μερικές φορές δεν είναι άχρηστο, προσοχή λοιπόν!).

(β) [Y] Ας προχωρήσουμε τώρα σε μια αμφίπακτη συνήθη δοκό (με $0 \leq x \leq L$), όπως αναφέρθηκε ήδη). Μετά τη δήλωση Αμφίπακτη δοκός (με Alt 5 παρακαλώ!) Ζητείται πρώτα να επιλυθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση de εύλογα με συνοριακές συνθήκες πακτώσεως $bs1$ και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$: πρόκειται για αμφίπακτη δοκό! **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$sola = DSolve[{de, bs1 /. a -> 0, bs1 /. a -> L}, v[x], x]$$

Καλύτερα να απλοποιηθεί το αποτέλεσμα με την εντολή `Simplify` ως εξής:

$$sola = sola // Simplify$$

Ποια είναι η συνάρτηση $v_a(x)$ για το βέλος κάμψεως; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$va[x_] = sola[[1, 1, 2]]$$

Να γίνει και επαλήθευση (verification) της λύσεως $v_a(x)$ που προσδιορίστηκε τόσο για τη διαφορική εξίσωση de όσο και για τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες $bs1$. (Πρέπει επομένως να προκύψουν πέντε `True` σε κατάλληλες λίστες, lists!) **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$vera = \{de, bs1 /. a -> 0, bs1 /. a -> L\} /. v -> va$$

Τέλος ζητείται και η σχεδίαση της σχετικής ελαστικής γραμμής $v_a(x)$ της παρούσας δοκού για

τις πιο πάνω τιμές values των σταθερών EI , ρ και L . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Plot:

```
pa = Plot[va[x] /. values, {x, 0, 1}]
```

(γ) [Y] Ανάλογα ζητείται το βέλος κάμψεως $v_b(x)$ και τα λοιπά αποτελέσματα μέχρι και τη σχεδίαση της ελαστικής γραμμής για μια αμφιέριστη δοκό (δήλωσή της με Alt 5), αλλά τώρα με τη χρήση του δείκτη b (αντί για το δείκτη a). **Υπόδειξη:** Για τη γενική λύση (solution) solb να χρησιμοποιηθεί η πιο άμεση εντολή

```
solb = DSolve[{de, bs2 /. a -> 0, bs2 /. a -> L}, v[x], x] // Simplify
```

και μετά οι χωριστές εντολές (με το δείκτη b τώρα, όχι πια a). **(Υπόδειξη:** Να μεταφερθεί ολόκληρο ταυτόχρονα το σχετικό σύνολο εντολών με «σημείωσή» τους και στη συνέχεια τη χρήση των εντολών Ctrl c και Ctrl v και μετά να γίνουν οι αλλαγές! Κερδίζεται εργασία δακτυλογραφήσεως!)

```
vb[x_] = solb[[1, 1, 2]]
```

```
verb = {de, bs2 /. a -> 0, bs2 /. a -> L} /. v -> vb
```

```
pb = Plot[vb[x] /. values, {x, 0, 1}]
```

Ανάλογα αποτελέσματα ζητούνται επίσης (δ) για τη μονόπακτη δοκό με πάκτωση στο αριστερό άκρο $x = 0$ και με κύλιση στο δεξιό $x = L$ (με δείκτες c αντί a ή b) καθώς και (ε) για τον αντίστοιχο πρόβολο (με δείκτες d αντί a, b ή c). (στ) Τελικά ζητείται η σχεδίαση και των τεσσάρων ελαστικών γραμμών σε ένα μόνο σχήμα. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Show:

```
pa11 = Show[pa, pb, pc, pd]
```

Για την αμφίπακτη δοκό, την αμφιέριστη δοκό και τον πρόβολο υπολογίζουμε εύκολα και τα μέγιστα βέλη κάμψεως d_{max} (σε λίστα) με την εντολή

```
dmax = {va[L/2], vb[L/2], vd[L]}
```

Σε ποια σημεία παρουσιάζονται προφανώς τα βέλη αυτά; (Η απάντηση με Alt 7.) Τελικά υπολογίζονται εύκολα και οι αντίστοιχοι λόγοι (τα πηλίκα) ratios των μέγιστων βελών κάμψεως, π.χ.

```
ratios = {dmax[[2]]/dmax[[1]], dmax[[3]]/dmax[[1]], dmax[[3]]/dmax[[2]] // N}
```

Επομένως πόσες φορές μειώνεται το μέγιστο βέλος κάμψεως d_{max} με τη δεξιά στήριξη στην αμφίπακτη δοκό σχετικά με τον πρόβολο; **Υπόδειξη: Προκύπτει 48 φορές μείωση από μία στήριξη!**

(ζ) [X] Ειδικά για τον πρόβολο ζητείται η εύρεση του βέλους κάμψεως (που δημιουργεί την ελαστική γραμμή) $v_d(x)$ και με το χέρι. Συμφωνούν τα αποτελέσματα με το χέρι και τον υπολογιστή;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-F10 ([X] Δυναμική και Ταλαντώσεις): (α) Με τις μεθόδους της χαρακτηριστικής εξίσωσης και της μεταβολής των παραμέτρων να λυθεί (σε τριγωνομετρική μορφή!) η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p(t), \quad t > 0,$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες, το ω_0 γνωστή θετική σταθερά και με γνωστή αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση $p(t)$. (β) Πού παρουσιάζεται το πρόβλημα αυτό; (γ) Πώς καλείται ο σχετικός τύπος;

ΟΜΑΔΑ EMII-G

ΑΣΚΗΣΗ EMII-G1 ([X] Δυναμική): Σε πτώση υλικού σημείου M κατά τον κατακόρυφο άξονα Oy υπάρχει πέρα από τη γήινη βαρύτητα με επιτάχυνση g (προς τα κάτω) και αντίσταση του αέρα $F(t)$ στην ευθύγραμμη αυτή κίνηση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $v(t)$, δηλαδή της μορφής

$$F(t) = cv^2(t)$$

με το c θετική σταθερά και θετική φορά προς τα πάνω. (Η κίνηση έχει υποτεθεί προς τα κάτω. Άρα η αντίσταση του αέρα $F(t) > 0$ έχει διεύθυνση προς τα πάνω, ενώ το βάρος $W = -mg < 0$ προς τα κάτω προφανώς!) Ζητούνται: (α) Ο σχηματισμός (η κατασκευή) της διαφορικής εξίσωσης για την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου με θετική φορά προς τα πάνω για την ταχύτητα $v(t)$. (β) Τέσσερις χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (γ) Η απόδειξη του τύπου

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) \quad \text{με } a, b > 0,$$

με την εύρεση του αόριστου ολοκληρώματος στο αριστερό μέλος με ανάλυση σε απλά κλάσματα. (Φυσικά ο εκθέτης -1 δηλώνει εδώ απλά αντίστροφη συνάρτηση, ασφαλώς όχι ύψωση σε δύναμη!)

(δ) Η μερική λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης με ξεκίνημα του υλικού σημείου M από την ηρεμία. (ε) Η λύση αυτή σε λυμένη μορφή $v = v(t)$ ως προς την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M υποχρεωτικά με τη χρήση και των συμβόλων (χαρακτηριστικής ταχύτητας v_0 και χρόνου t_0)

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg}{c}} \quad \text{και} \quad t_0 = \sqrt{\frac{m}{cg}}.$$

(στ) Η οριακή ταχύτητα v_∞ (για $t \rightarrow \infty$) του υλικού σημείου M από την ίδια τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος. (ζ) Η ίδια ταχύτητα v_∞ κατευθείαν μέσω της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-G2 ([X] Δυναμική και Ταλαντώσεις): Στο πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων υλικού σημείου M με ιξώδη απόσβεση (σε σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad t > 0,$$

με t το χρόνο, άγνωστη συνάρτηση $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου M από τη θέση ισορροπίας του, ξ το λόγο αποσβέσεως των ταλαντώσεων και ω_0 τη φυσική κυκλική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος. Οι δύο σταθερές ξ και ω_0 είναι γνωστές και θετικές, αλλ' εδώ και με την υπόθεση ότι $0 < \xi < 1$. Ζητούνται: (α) Έξι χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης. (β) Η γενική λύση της σε μιγαδική εκθετική μορφή υποχρεωτικά με τη χρήση και του νέου συμβόλου $\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$. (γ) Η μετατροπή της προηγούμενης γενικής λύσεως σε πραγματική μορφή (με χρήση τόσο της εκθετικής συναρτήσεως όσο και τριγωνομετρικών συναρτήσεων). (δ) Η μερική λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0$$

(αρχική θέση u_0 και αρχική ταχύτητα v_0) υποχρεωτικά σε πραγματική μορφή. (ε) Υποχρεωτικά με τη χρήση ορίζουσας Wronski η απόδειξη ότι οι θεμελιώδεις λύσεις που προέκυψαν στην πραγματική (την τελική) μορφή της γενικής λύσεως, ερώτημα (γ), είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-G3 ([X] Μηχανική των Υλικών, Επιφανειακές Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Θεωρούμε μια συνήθη δοκό δυσκαμψίας EI επί ελαστικής βάσεως (έστω πεδιλοδοκό ή θεμελιοδοκό σε θεμελίωση κατασκευής ή σιδηροτροχιά στη Σιδηροδρομική) σύμφωνα με την κλασική υπόθεση του Winkler (1867). Η σχετική διαφορική εξίσωση για το βέλος κάμψεως της δοκού $v = v(x)$ παίρνει τελικά τη μορφή

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\beta^4 v = \frac{\rho(x)}{EI}$$

με $\rho(x)$ την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση κατά μήκος της δοκού, όπου το β είναι γνωστή θετική σταθερά (που εξαρτάται από τις ιδιότητες τόσο της ελαστικής βάσεως όσο και της δοκού). Ζητούνται: (α) Έξι χαρακτηρισμοί της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης. (β) Η απόδειξη του τύπου

$$\sqrt[4]{-1} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

(γ) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς (με $p(x) = 0$) διαφορικής εξίσωσης σε μιγαδική εκθετική μορφή. (δ) Η μετατροπή της γενικής λύσεως σε καθαρά πραγματική μορφή (με νέους συντελεστές!) με χρήση τόσο της εκθετικής συναρτήσεως όσο και τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-G4 (IX και Y) Μετασχηματισμός Laplace, Ταλαντώσεις: Σε κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M με μάζα $m = 1$, ελατηρίου με σταθερά $k = 5$ και αποσβεστήρα με σταθερά $c = 2$ παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} + 5u = 2e^{-3t}, \quad t \geq 0,$$

ως προς τη μετατόπιση $u = u(t)$ (από τη θέση ισορροπίας) του υλικού σημείου M υπό εξωτερική δύναμη (φόρτιση) $p(t) = 2e^{-3t}$. Ζητούνται: (α) [X] Να εξηγηθεί λεπτομερώς (με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα) πώς ακριβώς προέκυψε η πιο πάνω διαφορική εξίσωση (και με κατάλληλο σχήμα παρακαλώ!). (β) [Y] Να λυθεί η ίδια διαφορική εξίσωση με αρχικές συνθήκες τις $u(0) = 1$ και $\dot{u}(0) = 0$ (αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα αντίστοιχα) υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (γ) [X] Η ίδια λύση να βρεθεί και με το χέρι, πάλι όμως με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (δ) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα (γ), τώρα όμως με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης και των προσδιοριστέων συντελεστών. (ε) [X] Τελικά συμφωνούν τα αποτελέσματα με τον υπολογιστή και με το χέρι; Πλήρως;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-G5 (IX και Y) Μετάδοση Θερμότητας: Σύμφωνα με το γνωστό νόμο της ψύξεως του Νεύτωνα στη Μετάδοση Θερμότητας κατά την ψύξη ενός υλικού σημείου M λόγω της εισαγωγής του σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T_s η θερμοκρασία $T = T(t)$ του υλικού σημείου M (με t το χρόνο) επαληθεύει την απλή διαφορική εξίσωση

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_s$$

με το k μια γνωστή θετική σταθερά ($k > 0$). Ζητούνται: (α) [X] Η επίλυση της αντίστοιχης ομογενούς ($T_s = 0$) διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη γνωστή μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης. (β) [X] Το ίδιο ερώτημα, αλλά τώρα σαν εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών. (γ) [X] Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα και υποχρεωτικά με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου η εύρεση της γενικής λύσεως της πιο πάνω μη ομογενούς (τώρα με $T_s \neq 0$) διαφορικής εξίσωσης. (Ο σχετικός τελικός τύπος της θεωρίας δε θεωρείται γνωστός!). (δ) [X] Το ίδιο ερώτημα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. (ε) [X] Το ίδιο ακριβώς ερώτημα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (στ) [X] Συμφωνούν τα αποτελέσματα; (ζ) [Y] Με τον υπολογιστή τώρα: να δηλωθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση (differential equation) de στη *Mathematica*.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de = T'[t] + k T[t] == k T_s$$

Να βρεθεί η γενική λύση (solution) $solde$ της διαφορικής αυτής εξίσωσης de με τη χρήση της εντολής *DSolve*. Έπειτα και η μερική λύση (partial solution) sol με αρχική συνθήκη $T(0) = T_0$ με πλήρη απλοποίησή της με την εντολή *FullSimplify*. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$sol = DSolve[{de, T[0] == T0}, T[t], t] // FullSimplify$$

Να ορισθεί και η σχετική συνάρτηση $T_p(t)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$Tp[t_] = sol[[1, 1, 2]]$$

(η) [Y] Ανάλογη εργασία να γίνει και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace: Να εφαρμοσθεί αυτή η μέθοδος στη διαφορική εξίσωση de που ήδη ορίστηκε μαζί με την αρχική συνθήκη $T(0) = T_0$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή *LaplaceTransform*, πιο συγκεκριμένα η εντολή

$$It = LaplaceTransform[de, t, s] /. T[0] -> T0$$

(το lt με Λατινικό ell παρακαλώ!), αν θέλουμε μάλιστα (αμφίβολο όμως εάν πρέπει να συστηθεί αυτό) να απλοποιηθεί το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το σύμβολο $U(s)$, για να δηλώνει το μετασχηματισμό Laplace (Laplace transform) της άγνωστης θερμοκρασίας $T(t)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$lt = lt /. LaplaceTransform[T[t], t, s] -> U[s]$$

Να λυθεί τώρα η πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση lt που προέκυψε ως προς $U(s)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Solve` με τη λύση (solution) να δηλώνεται με `sol`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$sol = Solve[lt, U[s]]$$

Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace $U(s)$, επιστρέφουμε φυσικά στη θερμοκρασία $T(t)$ στο πεδίο του χρόνου t από τη μεταβλητή s του μετασχηματισμού Laplace. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `InverseLaplaceTransform`, πιο συγκεκριμένα

$$Ts[t_] = InverseLaplaceTransform[sol[[1, 1, 2]], s, t]$$

Οι λύσεις $T_s(t)$ και $T_p(t)$ πρέπει να συμφωνούν! Συμβαίνει πραγματικά αυτό; (θ) [X και Y] Τελικά ζητείται και η επαλήθευση (verification) της λύσεως $T_s(t) \equiv T_p(t)$ (που ήδη προσδιορίστηκε) της διαφορικής εξίσωσης de τόσο με τον υπολογιστή [Y] με τη χρήση της εντολής

$$ver = de /. T -> Ts // Simplify$$

όσο και με το χέρι [X]. Καλό είναι ο Πολιτικός Μηχανικός να επαληθεύει τις λύσεις που βρίσκει!

ΑΣΚΗΣΗ EMII-G6 ([X] Μηχανικά Συστήματα: Συνάρτηση Μεταφοράς $G(s)$): Σε συνηθισμένο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M μάζας m , ελατηρίου S σταθεράς k και αποσβεστήρα A σταθεράς c με εξωτερική φόρτιση $p(t)$ ζητούνται: (α) Με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα να σχηματισθεί η σχετική διαφορική εξίσωση. (β) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της εξίσωσης αυτής. (γ) Η μετατροπή της στη συνηθισμένη για τον Πολιτικό Μηχανικό μορφή με τη χρήση των σταθερών

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

Σημειώνεται ότι το ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση (χωρίς αποσβεστήρα) μηχανικού συστήματος (δηλαδή με $c = 0$) και ξ είναι ο λόγος αποσβέσεως (ένας αδιάστατος θετικός αριθμός συνήθως μικρότερος της μονάδας, οπότε μιλάμε για ασθενή ή υποκρισίμη απόσβεση). (δ) Να βρεθεί η σχετική συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$. (ε) Μετά να βρεθεί κι η σχετική ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$. (στ) Ποιος είναι επομένως ο ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel για την απόκριση σε τυχαία φόρτιση $p(t)$ (με βάση την ωστική απόκριση $g(t)$ που ήδη βρέθηκε); (ζ) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα, αλλά τώρα με κατευθείαν χρήση του θεωρήματος της συνελιξεως στο μετασχηματισμό Laplace. (η) Συμφωνούν τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων ερωτημάτων;

Σημείωση: Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ δηλώνεται συνήθως με $H(s)$ και όχι με $G(s)$ αντίθετα με ό,τι συμβαίνει εδώ. Ανάλογα ισχύουν και για την ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, που δηλώνεται συνήθως με $h(t)$ και όχι με $g(t)$. Ο λόγος της χρήσεως εδώ των συμβόλων $G(s)$ και $g(t)$ είναι απλά να μη μπορεί να προκληθεί σύγχυση με τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(t)$ που είναι βέβαια μια εντελώς διαφορετική συνάρτηση από τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ ή $H(s)$.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-G7 ([X] Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Με τη χρήση της διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} + P \frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

για το βέλος κάμψεως $v = v(x)$ συνήθους στύλου (ράβδου, υποστρώματος, κολώνας) μήκους L και ελάχιστης δυσκαμψίας της διατομής του EI πακτωμένου στο κάτω άκρο του $x = 0$, αρθρωμένου στο πάνω άκρο του $x = L$ και υπό κατάλληλη θλιπτική αξονική φόρτιση P που προκάλεσε λυγισμό ζητούνται: (α) Η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης. (β) Οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν. (γ) Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού (critical buckling loads) $P_{cr,n}$ και ιδίως το πρώτο από τα φορτία αυτά $P_{cr,1}$, το οποίο είναι και το μόνο που ενδιαφέρει ουσιαστικά τον Πολιτικό Μηχανικό. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ο σχετικός τύπος είναι ο τύπος του Euler για το παρόν πρόβλημα λυγισμού.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-G8 (IX και Y) Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη αμφίπακτη (οπότε είναι και υπερστατική) δοκό μήκους $L = 10$ (με άκρα τα σημεία $x = 0$ και $x = 10$ σε m) και δυσκαμψίας EI . Η δοκός καταπονείται σε κάμψη υπό σταθερή κατανεμημένη κάθετη φόρτιση q_1 (σε kN/m) στο διάστημα (τμήμα της) $[0, 2]$, επίσης δε σταθερή κατανεμημένη κάθετη φόρτιση q_2 στο διάστημα (τμήμα της) $[7, 9]$. Πάνω στην ίδια δοκό εφαρμόζονται επιπλέον και συγκεντρωμένα φορτία P_1 (σε kN) στη θέση $x = 1$ και P_2 στη θέση $x = 5$. Η σχετική διαφορική εξίσωση για το βέλος κάμψεως $v = v(x)$ (με $0 \leq x \leq 10$) έχει την εξής μορφή (με το $p(x)$ να δηλώνει την παρούσα γενικευμένη φόρτιση):

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p(x) \quad \text{με} \quad 0 < x < 10.$$

Ζητούνται: (α) Να δηλωθεί η πιο πάνω γενικευμένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ με κατάλληλη συνάρτηση στη *Mathematica*. (β) [Y] Να δηλωθεί επίσης η σχετική διαφορική εξίσωση `beamde`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
beamde = EI v''''[x] == p[x]
```

Να ορισθούν οι συνοριακές συνθήκες (boundary conditions) πακτώσεως σε άκρο $x = \xi$ δοκού. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
bc[x_] = {v[x] == 0, v'[x] == 0}
```

(Το ξ με `Esc x Esc` παρακαλώ!) Ποιες είναι και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες `bcs` στην παρούσα αμφίπακτη δοκό; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
bcs = {bc[0], bc[10]}
```

για τις πακτώσεις στα δύο άκρα της δοκού $x = 0$ και $x = 10$. Με τη χρήση της εντολής `DSolve` να λυθεί το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
sol = DSolve[{beamde, bcs}, v[x], x]
```

Από αυτήν τη λύση (solution) `sol` προσδιορίζουμε και τη σχετική άγνωστη συνάρτηση (το βέλος κάμψεως) $v = v(x)$ απλοποιώντας μάλιστα πλήρως το αποτέλεσμα. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
vs[x_] = sol[[1, 1, 2]] // FullSimplify
```

Ακολουθεί η επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = 10$ της αμφίπακτης δοκού

```
ver1 = {vs[0], vs'[0], vs[10], vs'[10]} // Simplify
```

Τέλος για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές (values) των EI (σε kN m²), $q_{1,2}$ (σε kN/m) και $P_{1,2}$ (σε kN)

```
values = {EI -> 10^3, q1 -> -2, q2 -> -1, P1 -> 15, P2 -> -2}
```

και με τη χρήση του πακέτου `FilledPlot` της *Mathematica*, το οποίο εισάγεται με την εντολή

```
<< Graphics`FilledPlot`
```

(προσοχή στη βαρεία: είναι πάνω αριστερά, κάτω από το πλήκτρο `Esc`) μπορούμε να σχεδιάσουμε

την ελαστική γραμμή (elastic curve) v της δοκού με την εντολή

```
FilledPlot[vs[x] /. values, {x, 0, 10}, AxesLabel -> {x, v},
  PlotLabel -> "ELASTIC CURVE", PlotStyle -> Thickness[0.01], Fills -> GrayLevel[0.8]]
```

και ανάλογα τη γωνία κλίσεως (στροφής) θ (το θ με Esc q Esc παρακαλώ!) με την εντολή

```
FilledPlot[vs'[x] /. values, {x, 0, 10}, AxesLabel -> {x, \theta},
  PlotLabel -> "SLOPE", PlotStyle -> Thickness[0.01], Fills -> GrayLevel[0.8]]
```

την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M = EIv''$ με την εντολή

```
FilledPlot[EI vs''[x] /. values, {x, 0, 10}, AxesLabel -> {x, M},
  PlotLabel -> "BENDING MOMENT", PlotStyle -> Thickness[0.01], Fills -> GrayLevel[0.8]]
```

την τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q = EIv'''$ με την εντολή

```
FilledPlot[EI vs'''[x] /. values, {x, 0, 10}, AxesLabel -> {x, Q},
  PlotLabel -> "SHEAR FORCE", PlotStyle -> Thickness[0.01], Fills -> GrayLevel[0.8]]
```

και τελευταία την πραγματικά κατανεμημένη φόρτιση (distributed loading) $p^* = EIv''''$ (αλλά τώρα χωρίς τα συγκεντρωμένα φορτία $P_{1,2}$) με την εντολή

```
FilledPlot[EI vs''''[x] /. values, {x, 0, 10}, AxesLabel -> {x, p},
  PlotLabel -> "DISTRIBUTED LOADING", PlotStyle -> Thickness[0.01], Fills -> GrayLevel[0.8]]
```

Τέλος ζητείται ο πρακτικός έλεγχος όλων των πιο πάνω διαγραμμάτων για το αν είναι σωστά ή όχι με λεπτομερείς επεξηγήσεις (σε παράγραφο κειμένου με Alt 7 ή ισοδύναμα Format -> Style -> Text.)

Σημείωση: Οι ενδείξεις στους άξονες γραφικών παραστάσεων είναι συμβολοσειρές και κανονικά πρέπει να περικλείονται σε εισαγωγικά. Αυτό είναι το σωστό! Όταν όμως πρόκειται για ενδείξεις με ένα μόνο γράμμα, όπως συμβαίνει σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, τότε τα εισαγωγικά μπορούν να παραλείπονται χωρίς να αλλάζουν καθόλου οι ενδείξεις στους άξονες.

ΟΜΑΔΑ EMII-H

ΑΣΚΗΣΗ EMII-H1 (IX και Y) Ταλαντώσεις: Συντονισμός): Θεωρούμε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M μάζας m και ελατηρίου S σταθεράς k χωρίς απόσβεση ($c = 0$) με φυσική κυκλική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

υπό συνημιτονική (και ανηγμένη στη μάζα m) εξωτερική δύναμη (φόρτιση) $p(t)$ με την ίδια ακριβώς κυκλική συχνότητα ω_0 της μορφής

$$p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$$

με t το χρόνο και το p_0 σταθερά. Τότε παρουσιάζεται το συνήθως ανεπιθύμητο φαινόμενο του συντονισμού (resonance). Ζητούνται: (α) [Y] Η σχετική διαφορική εξίσωση (differential equation) de με άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) τη μετατόπιση $u = u(t)$ του υλικού σημείου M ως προς τη θέση ισορροπίας του. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de = u''[t] + \omega_0^2 u[t] == p_0 \text{Cos}[\omega_0 t]$$

(Το ω με Esc Λατινικό ο Esc παρακαλώ!) Στη συνέχεια η γενική λύση (general solution) sol1 της διαφορικής αυτής εξίσωσης με χρήση της εντολής (command) DSolve και μάλιστα με απλοποίηση της (simplification) με τη χρήση και της εντολής απλοποίησης Simplify στο τέλος (// Simplify). Ακολούθως ζητείται η ανάλογη μερική λύση (partial solution) sol2 (απλοποιημένη πάλι!) με τη χρήση και των αρχικών συνθηκών (initial conditions) $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. Ποια είναι η σχετική συνάρτηση $u_s(t)$ για τη μερική αυτή λύση; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
us[t_] = sol2[[1, 1, 2]]
```

Γιατί αναφερθήκαμε ήδη σε φαινόμενο συντονισμού; (Η απάντηση να γραφεί σε παράγραφο κειμένου με Alt 7 ή ισοδύναμα Format -> Style -> Text παρακαλώ!) Ας γίνουμε τώρα λίγο πιο συγκεκριμένοι: ο συντονισμός οφείλεται στον όρο της λύσεως ο οποίος αυξάνει γραμμικά με το χρόνο t . Ο όρος αυτός καθίσταται σαφής με τη χρήση της εντολής Coefficient (συντελεστής) για το συντελεστή cf του t στη λύση $u_s(t)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
cf = Coefficient[us[t], t]
```

Ακόμη σαφέστερο γίνεται το φαινόμενο του συντονισμού με το σχετικό σχήμα. Τούτο προκύπτει εύκολα με τη χρήση της εντολής Plot, π.χ. στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 30$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή (για μοναδιαίες τιμές των παραμέτρων ω_0 , u_0 και p_0 και μηδενική τιμή της παραμέτρου v_0 : της αρχικής ταχύτητας του υλικού σημείου)

```
Plot[us[t] /. {w0 -> 1, u0 -> 1, v0 -> 0, p0 -> 1}, {t, 0, 30}]
```

Είναι πραγματικά σαφέστερο το φαινόμενο του συντονισμού με το σχήμα αυτό ή όχι;

(β) [Y] Να βρεθεί η ίδια μερική λύση (solution) με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace (Laplace transformation). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές LaplaceTransform, Solve και InverseLaplaceTransform, πιο συγκεκριμένα

```
lt = LaplaceTransform[de, t, s] /. {u[0] -> u0, u'[0] -> v0}
```

```
sol = Solve[lt, LaplaceTransform[u[t], t, s]]
```

```
ul[t_] = InverseLaplaceTransform[sol[[1, 1, 2]], s, t]
```

(Το lt με ell παρακαλώ από τη λέξη Laplace: μετασχηματισμός Laplace.)

(γ) Να γίνει επαλήθευση (verification) ότι οι λύσεις $u_s(t)$ και $u_l(t)$ (με ell παρακαλώ και πάλι: μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace) που ήδη προσδιορίστηκαν ταυτίζονται με το αποτέλεσμα της επαληθεύσεως (verification) να δηλώνεται με ver και πρέπει να προκύψει True: αληθές.

(δ) [X] Να επαναληφθούν όλοι οι υπολογισμοί των ερωτημάτων (α) και (β) (δηλαδή και με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως και των προσδιοριστέων συντελεστών καθώς και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, όχι όμως και η γραφική παράσταση της λύσεως), αλλά τώρα με το χέρι [X]. Ποια από τις δύο αυτές μεθόδους υπήρξε για σας υπολογιστικά ευκολότερη;

(ε) [X] Συμφωνούν όλα τα αποτελέσματα με το χέρι [X] και με τον υπολογιστή [Y], όπως πραγματικά αναμένουμε;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Η2 ([X και Y] Μετασχηματισμός Laplace, Ταλαντώσεις): Δίνεται η κλασική διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή (σύστημα υλικού σημείου M μάζας m και ελατηρίου S σταθεράς k), αλλ' εδώ με ωστική (κρουστική) εξωτερική δύναμη $p_0(t) = m\Omega\delta(t)$, που προκαλεί ώθηση $\Omega_0 = m\Omega$ τη χρονική στιγμή $t = 0$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \Omega\delta(t) \quad \text{με } t > 0,$$

με $u = u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου M , t το χρόνο και $\delta(t)$ την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac. Ζητούνται: (α) [X] Να εξηγηθεί (με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα) πώς προέκυψε η παραπάνω διαφορική εξίσωση. Από ποιο ακριβώς τύπο δίνεται η κυκλική συχνότητα ω_0 ; (β) [Y] Να δηλωθεί η διαφορική αυτή εξίσωση (differential equation) σαν deq στη Mathematica. **Υπόδειξη:** Το ω_0 να γραφεί σαν ω_0 . Επίσης το μικρό ω με Esc ο Esc, ενώ το κεφαλαίο Ω με Esc O Esc φυσικά! (Τα ο και O Λατινικά παρακαλώ!) (β) [Y] Στη συνέχεια να λυθεί η ίδια διαφορική εξίσωση άμεσα με τη χρήση της εντολής DSolve με τη λύση να δηλώνεται σαν soldeq. (γ) Εναλλακτικό τρόπο λύσεως της ίδιας διαφορικής εξισώσεως αποτελεί η χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Ζητούνται ο μετασχηματισμός Laplace lt της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως

deq, η λύση (solution) sol της πρωτοβάθμιας αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει και η σχετική συνάρτηση $u_s(t)$. **Υπόδειξη:** Για τη συνάρτηση αυτή $u_s(t)$ να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
us[t_] = InverseLaplaceTransform[sol[[1, 1, 2]], s, t] // Expand
```

Πρόκειται για γενική ή για μερική (ή ειδική) λύση; Συμφωνεί η λύση αυτή με τη λύση soldeq που βρέθηκε προηγουμένως; Υπάρχει ουσιαστική διαφορά ή όχι; (Οι απαντήσεις με Alt 7 ή, απόλυτα ισοδύναμα, με Format -> Style -> Text παρακαλώ!) Ποια είναι η αντίστοιχη μερική λύση $u_p(t)$ για ξεκίνημα του υλικού σημείου από την ηρεμία; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
up[t_] = us[t] /. {u[0] -> 0, u'[0] -> 0}
```

Να σχεδιασθεί η ίδια μερική λύση $u_p(t)$ για μοναδιαίες τιμές των σταθερών ω_0 και Ω στο χρονικό διάστημα $[0, 10]$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Plot, πιο συγκεκριμένα

```
figure = Plot[up[t] /. {w0 -> 1, Omega -> 1}, {t, 0, 10}]
```

(με το σχήμα να δηλώνεται σαν figure, δηλαδή σχήμα). Υπάρχει απόσβεση της κινήσεως ή όχι; Γιατί ακριβώς; (δ) [X] Να βρεθούν οι πιο πάνω λύσεις $u_s(t)$ (μερική ή γενική λύση, ποια ακριβώς είναι η διαφορά;) και $u_p(t)$ (μερική λύση για ξεκίνημα από την ηρεμία) με το χέρι [X], πάλι όμως με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε) [X] Συμφωνούν ή όχι τα αποτελέσματα με το χέρι και με τον υπολογιστή;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Η3 (IX και Y) Εξισώσεις Euler, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy): Στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών και σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) οι ορθές τάσεις σ_r, σ_θ και η διατμητική τάση $\tau_{r\theta}$ μπορούν να προσδιορισθούν με τη βοήθεια μόνο της τασικής συναρτήσεως του Airy A που επαληθεύει τη διαρμονική εξίσωση (biharmonic equation). Σε περίπτωση αξονικής συμμετρίας η τασική συνάρτηση του Airy A εξαρτάται προφανώς (λόγω της αξονικής, κυκλικής συμμετρίας) μόνο από την πολική ακτίνα r , δηλαδή $A = A(r)$, και παίρνει τη μορφή μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης bh συγκεκριμένα τη μορφή³

$$\frac{d^4 A}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 A}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dA}{dr} = 0 \quad \text{με } A = A(r) \quad \text{και } r \geq 0.$$

Ζητούνται: (α) [Y] Να δηλωθεί αυτή η συνήθης διαφορική εξίσωση bh (biharmonic equation, διαρμονική εξίσωση) στη Mathematica. Πρόκειται για ομογενή διαφορική εξίσωση Euler (ή Cauchy-Euler), όπως διαπιστώνεται με πολλαπλασιασμό της επί r^4 . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
bhm = Expand[r^4 bh[[1]]] == 0
```

Η σχετική γενική λύση $A_s(r)$ προσδιορίζεται εύκολα με τη χρήση της εντολής DSolve. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
As[r_] = DSolve[bh, A[r], r][[1, 1, 2]]
```

Εύκολα γίνεται και η επαλήθευση (verification) ver της λύσεως αυτής με τη χρήση και της εντολής Simplify. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
ver = bh /. A -> As // Simplify
```

Μπορούμε βέβαια να εργασθούμε και με τον αναλυτικό τρόπο ευρέσεως την ίδιας γενικής λύσεως (general solution) $A_g(r)$ (εδώ της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(r)$) υποθέτοντας μερική λύση (partial solution) ισοδύναμα ειδική λύση (particular solution) της μορφής $A_p(r) = r^\mu$ (με το μ πραγματικό αριθμό) με την εντολή

```
Ap[r_] = r^mu
```

και αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση bhm με την εντολή

³Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (1970), *Theory of Elasticity*, 3η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, Tokyo, σσ. 68-69.

$$\text{cheq} = \text{bhm} /. A \rightarrow \text{Ap}$$

Η εξίσωση που προκύπτει (δηλαδή η χαρακτηριστική εξίσωση, characteristic equation, πολλαπλασιασμένη επί r^4) μπορεί βέβαια να απλοποιηθεί με την εντολή Simplify και ζητείται να γίνει αυτό. Τότε προκύπτει η απλούστερη εξίσωση cheq1. Το ίδιο ζητείται να γίνει και με την αρχική διαφορική εξίσωση bh. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{cheq2} = \text{bh} /. A \rightarrow \text{Ap} // \text{Simplify}$$

Στη συνέχεια ζητείται να προσδιορισθούν όλες οι ρίζες (roots) της χαρακτηριστικής εξισώσεως cheq1 ή cheq2 που βρήκαμε (characteristic equation) cheqroots με τη χρήση της εντολής Solve (ως προς μ εννοείται, όχι ως προς r !). Ποιος είναι ο αριθμός len των λύσεων αυτών; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Length. Σύμφωνα με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως που βρέθηκαν η ζητούμενη γενική λύση (general solution) $A_g(r)$ της παρούσας διαφορικής εξισώσεως Euler (ή Cauchy-Euler), δηλαδή η τασική συνάρτηση του Airy $A = A(r)$ υπό συνθήκες αξονικής συμμετρίας (συμμετρίας γύρω από άξονα, κυκλικής συμμετρίας) παίρνει τη μορφή

$$A_g[r_] = B1 r^0 + B2 \text{Log}[r] r^0 + B3 r^2 + B4 \text{Log}[r] r^2$$

Σε παράγραφο κειμένου (με Alt 7 ή ισοδύναμα με Format -> Style -> Text) ζητούνται οι λεπτομερείς επεξηγήσεις, σε δύο γραμμές, για τη γενική αυτή λύση $A_g(r)$. Ζητείται έπειτα η επαλήθευση ver1 της ίδιας γενικής λύσεως με απλοποίηση μάλιστα του αποτελέσματος με τη χρήση της εντολής Simplify, έτσι ώστε να προκύψει τελικά το αποτέλεσμα True (αληθές).

Έχοντας επιτέλους διαθέσιμη (και επαληθευμένη μάλιστα!) την τασική συνάρτηση του Airy $A_g(r)$ στο παρόν αξονοσυμμετρικό πρόβλημα, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες των ορθών τάσεων σ_r και σ_θ (η διατμητική τάση $\tau_{r\theta}$ είναι προφανώς μηδενική λόγω της αξονικής ή κυκλικής συμμετρίας) με απλές παραγωγίσεις, πιο συγκεκριμένα μέσω των τύπων

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} \quad \text{και} \quad \sigma_\theta = \frac{d^2A}{dr^2}.$$

Υπόδειξη: Για την τάση σ_r καλό είναι να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Expand, δηλαδή

$$\sigma[r_] = (1/r) A_g'[r] // \text{Expand}$$

Το σ με Esc s Esc παρακαλώ! (Για την τάση σ_θ δε χρειάζεται η εντολή Expand. Επίσης το θ με Esc q Esc παρακαλώ!) Οι τάσεις αυτές πρέπει βέβαια να επαληθεύουν την εξίσωση ισορροπίας (equilibrium equation), που εδώ είναι μόνο μία λόγω της αξονικής ή κυκλικής συμμετρίας, η εξής:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Ζητείται η σχετική επαλήθευση. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Simplify στο τέλος, ώστε να προκύψει True (αληθές, δηλαδή να ισχύει η εξίσωση ισορροπίας στο παρόν πρόβλημα της Επίπεδης Ελαστικότητας στη Μηχανική των Υλικών), πιο συγκεκριμένα

$$\text{EquilibriumEquation} = \sigma'[r] + (1/r) (\sigma[r] - \sigma_\theta[r]) == 0 // \text{Simplify}$$

(Στη Mathematica το σ με Esc s Esc και το θ με Esc q Esc παρακαλώ και πάλι!)

(β) [X] Να λυθεί η παρούσα διαφορική εξίσωση Euler (ή Cauchy-Euler) και με το χέρι [X] με υπολογισμό στη συνέχεια και των τάσεων σ_r και σ_θ και επαλήθευση της εξισώσεως ισορροπίας (equilibrium equation). (γ) [X] Συμφωνούν τα αποτελέσματα με το χέρι [X] και τον υπολογιστή [Y];

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Η4 ([X και Y] Μετασχηματισμός Laplace, Μηχανική των Υλικών: Τεχνηή Θεωρία Κάμψεως: Δοκοί): Δίνεται η διαφορική εξίσωση (differential equation) συνήθους δοκού (beam) μήκους L και δυσκαμψίας EI υπό εξωτερική καταναμημένη κάθετη φόρτιση $p = p(x)$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = p(x), \quad 0 < x < L.$$

Ζητούνται: (α) [Y] Να δηλωθεί η σχετική διαφορική εξίσωση BeamDE. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{BeamDE} = EI v''''[x] == p[x]$$

Σημείωση: Η δυσκαμψία EI της δοκού να δηλώνεται με ενιαίο σύμβολο, όχι με γινόμενο, παρακαλώ πολύ! Αυτό είναι σκόπιμο, επειδή τα σύμβολα E και I έχουν ειδικές σημασίες στη *Mathematica*. Συγκεκριμένα παριστάνουν τη βάση των φυσικών λογαρίθμων e και τη φανταστική μονάδα $i = \sqrt{-1}$ αντίστοιχα. Έτσι κι αλλιώς η δυσκαμψία EI είναι τελικά ένα χαρακτηριστικό μέγεθος της δοκού από μόνο του, έστω κι αν υπολογίζεται σαν το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας E του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της δοκού επί τη ροπή αδρανείας I της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονα της διατομής στην κάμψη.

Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση (solution) SolBeamDE της διαφορικής αυτής εξίσωσης με την άμεση χρήση της εντολής DSolve

$$\text{SolBeamDE} = \text{DSolve}[\text{BeamDE}, v[x], x]$$

(β) Ακολούθως ζητείται η χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace για την εύρεση της ίδιας (με ερωτηματικό) λύσεως. Ποια είναι η μετασχηματισμένη κατά Laplace διαφορική εξίσωση με δήλωσή της σαν LT; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή LaplaceTransform. Να βρεθεί η λύση (solution) SolLT της αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει ως προς το ζητούμενο μετασχηματισμό Laplace Sol. Τελικά ζητείται και η σχετική συνάρτηση $v_s(x)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{vs}[x_] = \text{Sol}[[1, 1, 2]] // \text{Expand}$$

Με τις τέσσερις αρχικές συνθήκες (initial conditions) ics

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI}, \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}$$

να υποτίθενται γνωστές στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού και να δηλώνονται με την εντολή

$$\text{ics} = \{v[0] \rightarrow v_0, v'[0] \rightarrow \theta_0, v''[0] \rightarrow M_0/EI, v'''[0] \rightarrow Q_0/EI\}$$

(το θ με Esc q Esc παρακαλώ!) ποια είναι η μερική λύση $v_p(x)$ του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{vp}[x_] = \text{vs}[x] /. \text{ics}$$

(γ) [Y] Συμφωνούν ή όχι οι γενικές λύσεις με την άμεση χρήση της εντολής DSolve και με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace; (Η απάντηση σε παράγραφο κειμένου με Alt 7 ή ισοδύναμα με Format -> Style -> Text παρακαλώ!) (δ) [X] Να επαληθευθεί με το χέρι η μερική λύση $v_p(x)$ με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε) [X] Το ίδιο και η λύση που βρέθηκε με την εντολή DSolve με άμεσες ολοκληρώσεις. (στ) [X, αλλά προαιρετικό το ερώτημα αυτό] Να αποδειχθεί η συμφωνία των δύο λύσεων για τις αρχικές συνθήκες που δόθηκαν με τη χρήση της γνωστής μεθόδου της παραγοντικής ολοκληρώσεως (ή ολοκληρώσεως κατά μέρη ή ολοκληρώσεις κατά παράγοντες).

ΟΜΑΔΑ EMII-I

ΑΣΚΗΣΗ EMII-11 (IX και Y) Μηχανικά Συστήματα: Ταλαντώσεις): Θεωρούμε διβάθμιο μηχανικό σύστημα που αποτελείται από δύο υλικά σημεία M_1 και M_2 ίσων μαζών m και δύο κατακόρυφα ελατήρια S_1 και S_2 ίσων σταθερών k . Το πάνω άκρο του πάνω ελατηρίου S_1 είναι σταθερά στερεωμένο, ενώ το κάτω άκρο του στηρίζει το υλικό σημείο M_1 και πιο κάτω το κάτω ελατήριο S_2 . Το κάτω ελατήριο S_2 στηρίζεται στο πάνω άκρο του στο υλικό σημείο M_1 (μάζας m), ενώ στο κάτω άκρο του στηρίζει το υλικό σημείο M_2 (επίσης μάζας m). Άρα έχουμε ένα κατακόρυφο διβάθμιο μηχανικό σύστημα δύο ελατηρίων S_1 και S_2 (σταθερών k) και δύο υλικών σημείων M_1 και M_2 (μαζών m).

Στο διβάθμιο αυτό μηχανικό σύστημα άγνωστες συναρτήσεις είναι οι (κατακόρυφες) μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ των υλικών σημείων M_1 και M_2 αντίστοιχα ως προς τις θέσεις ισορροπίας τους. Ζητούνται: [X και Y] Τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και στιβαρότητας (όχι, παρακαλώ, δυσκαμψίας εδώ, γιατί δεν υπάρχει κάμψη) \mathbf{K} του παρόντος μηχανικού συστήματος (γραμμένα επίσης και σε μορφή μητρώου). **Υπόδειξη:** Για το μητρώο στιβαρότητας \mathbf{K} να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$K = \{\{2k, -k\}, \{-k, k\}\}; K // \text{MatrixForm}$$

(Να δοθεί και λεπτομερής επεξήγηση.) Ανάλογα έχουμε το διάνυσμα των μετατοπίσεων $\mathbf{u}(t)$ των υλικών σημείων M_1 και M_2 . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$u[t] = \{u1[t], u2[t]\}; u[t] // \text{MatrixForm}$$

και το διάνυσμα των επιταχύνσεων $\mathbf{a}(t)$ των ίδιων σημείων. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$a[t] = D[u[t], \{t, 2\}]; a[t] // \text{MatrixForm}$$

Για την κατάστρωση του σχετικού συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να σχηματίσουμε το σχετικό μητρώο \mathbf{L} με την εντολή

$$L = M.a[t] + K.u[t]$$

για διευκόλυνση μάλιστα εισάγοντας και το σύμβολο

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

στο μητρώο \mathbf{L} με την εντολή

$$L1 = (L/m) /. k -> m \omega_0^2 // \text{Simplify}$$

(το ω με Esc Λατινικό ο Esc παρακαλώ!) Τώρα το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (differential equations) deqs0 έχει τη μορφή

$$\text{deqs0} = \{L1[[1]] == 0, L1[[2]] == 0\}$$

Για απλοποίηση στους υπολογισμούς υποθέτουμε εδώ ότι $\omega_0 = 1$ με την εντολή

$$\text{deqs} = \text{deqs0} /. \omega_0 -> 1$$

και παίρνουμε το σχετικό σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων deqs.

Για την επίλυση του συστήματος αυτού deqs μπορούμε ασφαλώς να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, εδώ όμως για συστήματα διαφορικών εξισώσεων. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$It = \text{LaplaceTransform}[deqs, t, s]$$

(Το σύμβολο It υποτίθεται ότι σημαίνει Laplace transform!) Για παραπέρα διευκόλυνση ορίζουμε και τις αρχικές συνθήκες (αρχικές μετατοπίσεις και αρχικές ταχύτητες) στο παρόν πρόβλημα ελεύθερων (χωρίς φορτίσεις) συζευγμένων ταλαντώσεων στο μετασχηματισμό Laplace It που ήδη βρήκαμε παίρνοντας την τροποποιημένη μορφή του It1. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$It1 = It /. \{u1[0] -> u10, u1'[0] -> v10, u2[0] -> u20, u2'[0] -> v20\}$$

Το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που προέκυψε μπορεί τώρα εύκολα να λυθεί με την εντολή Solve. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{sol} = \text{Solve}[It, \{\text{LaplaceTransform}[u1[t], t, s], \text{LaplaceTransform}[u2[t], t, s]\}] // \text{Simplify}$$

με απλοποίηση μάλιστα του αποτελέσματος. Προχωράμε τώρα στην αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace των αγνώστων συναρτήσεων $u_{1,2}(t)$ που βρήκαμε με την εντολή

$$u1s[t_] = \text{InverseLaplaceTransform}[\text{sol}[[1, 1, 2]], s, t] // \text{Simplify}$$

με απλοποίηση μάλιστα του αποτελέσματος ή καλύτερα και πλήρη απλοποίησή του με την εντολή

```
u1sa[t_] = u1s[t] // FullSimplify
```

Έτσι προσδιορίζουμε πλήρως τη λύση του παρόντος συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Εναλλακτική δυνατότητα μας προσφέρει η αναγωγή αυτού του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων `deqs`, το υπενθυμίζουμε με την απλή εντολή

```
deqs
```

σε μία μόνο διαφορική εξίσωση. Πρόκειται για εύκολο καθήκον στο παρόν απλό σύστημα διαφορικών εξισώσεων `deqs`. Βρίσκουμε πρώτα τη λύση `sol1` της πρώτης διαφορικής εξίσωσης (για το υλικό σημείο M_1) ως προς τη συνάρτηση $u_2(t)$ που δεν εμφανίζεται σε παράγωγο με την εντολή

```
sol1 = Solve[deqs[[1]], u2[t]]
```

και τη σχετική συνάρτηση $u_{2s}(t)$ με την εντολή

```
u2s[t_] = sol1[[1, 1, 2]]
```

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη συνάρτηση αυτή στη δεύτερη διαφορική εξίσωση με την εντολή

```
deq1 = deqs[[2]] /. u2 -> u2s
```

παίρνοντας μία διαφορική εξίσωση με μία άγνωστη συνάρτηση τώρα: μόνο τη $u_1(t)$ (τη μετατόπιση της μάζας M_1). Τη διαφορική αυτή εξίσωση τη λύνουμε εύκολα με την εντολή `DSolve` ως εξής:

```
soldeq1 = DSolve[deq1, u1[t], t] // Simplify
```

και ορίζουμε τη σχετική συνάρτηση $u_{1s}(t)$ με την εντολή

```
u1s[t_] = soldeq1[[1, 1, 2]]
```

καλύτερα σε πλήρως απλοποιημένη μορφή με την εντολή `FullSimplify`

```
u1sa[t_] = u1s[t] // FullSimplify
```

Αν θέλουμε μάλιστα, χρησιμοποιούμε αριθμητική προσέγγιση με δεκαδικούς αριθμούς με χρήση και της εντολής `N` για την προσέγγιση αυτή ως εξής:

```
u1n[t_] = u1s[t] // N
```

Τώρα πια, έχοντας προσδιορίσει την άγνωστη συνάρτηση $u_1(t)$ (τη μετατόπιση του υλικού σημείου M_1), μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη λύση που βρέθηκε στη συνάρτηση $u_2(t)$ (τη μετατόπιση του υλικού σημείου M_2) που είχαμε εκφράσει συναρτήσει της $u_1(t)$

```
u2s[t]
```

με την ακόλουθη εντολή αντικαταστάσεως και απλοποίησης:

```
u2sa[t_] = u2s[t] /. u1 -> u1sa // Simplify
```

Στη συνέχεια κάνουμε και αριθμητική προσέγγιση με τις εντολές `Expand` και `N`

```
u2na[t_] = u2sa[t] // Expand // N
```

Μπορούμε (μάλλον είναι σκόπιμο!) να κάνουμε και επαλήθευση `ver` των λύσεων $u_{1s}(t)$ και $u_{2s}(t)$ που βρήκαμε με την εντολή

```
ver = deqs /. {u1 -> u1sa, u2 -> u2sa} // Simplify
```

Τελικά ας δοκιμάσουμε και την κατευθείαν επίλυση του ίδιου συστήματος με την εντολή `DSolve`. Ίσως είναι καλό να γίνει και η απλοποίηση του αποτελέσματος. Ίσως επιπλέον και αριθμητική προσέγγισή του με την εντολή `N`. Ίσως και απαλοιφή λαθών στρογγυλεύσεως με την εντολή `Chop`

```
sol = DSolve[deqs, {u1[t], u2[t]}, t] // Simplify // N // Chop
```

Δεν είμαστε ακόμη απόλυτα ευχαριστημένοι! Ίσως και η εντολή `ExpToTrig` κάπου. Ίσως, ίσως ...

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-12 (*[X και Y] Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου, Ταλαντώσεις*): Εδώ θεωρούμε το σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως και με σταθερές τις ποσότητες ω_0 και ξ στους συντελεστές

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) + 2\xi\omega_0 v(t) + \omega_0^2 x(t) = p(t) \quad \text{με} \quad \omega_0 > 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad t > 0,$$

με t το χρόνο, $x(t)$ και $v(t)$ τις δύο άγνωστες συναρτήσεις και $p(t)$ γνωστή τυχαία τμηματικά συνεχή συνάρτηση υπό τις αρχικές συνθήκες (για $t = 0$) $x(0) = x_0$ και $v(0) = v_0$ (πρόβλημα αρχικών τιμών).

(α) [X] Ζητούνται: Η λεπτομερής εξήγηση για το πού ακριβώς παρουσιάζεται το σύστημα αυτό στην Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου με σχήμα και με πλήρεις διευκρινίσεις για τις συναρτήσεις $x(t)$, $v(t)$ και $p(t)$ που υπεισέρχονται καθώς και τα σύμβολα ξ και ω_0 και τους συγκεκριμένους τύπους υπολογισμού των ποσοτήτων αυτών. Η αναγωγή του πιο πάνω συστήματος δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Η επίλυση του συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους άγνωστους μετασχηματισμούς Laplace. Ειδικά για την άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ (μόνο αυτή!) η εύρεσή της με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της που προέκυψε στο προηγούμενο ερώτημα και μάλιστα στην πιο απλή δυνατή τελική μορφή της με $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$.

(β) [Y] Με τη *Mathematica* τώρα, αλλά στην ειδική περίπτωση που $\xi = 0$ (δεν υπάρχει απόσβεση για διευκόλυνση στις πράξεις), ζητούνται: Η δήλωση του πιο πάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων (differential equations) `deqs` σε μορφή λίστας (list) με δύο στοιχεία: τις διαφορικές εξισώσεις του συστήματος. Να επιχειρηθεί η λύση (solution) `sol` του συστήματος `deqs` με χρήση της εντολής `DSolve` και με απλοποίηση του αποτελέσματος με την εντολή `Simplify` στο τέλος (`//Simplify`). Μάλλον αποτυγχάνει η επίλυση αυτή. Άρα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Καταρχήν ζητείται ο μετασχηματισμός Laplace του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων `deqs`, ώστε να προκύψει ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (linear algebraic equations) `lineqs`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `LaplaceTransform`. Το σύστημα των γραμμικών αυτών αλγεβρικών εξισώσεων `lineqs` είναι απόλυτα ικανοποιητικό για τη *Mathematica*, όχι όμως ίσως και για το χρήστη της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Γι' αυτό θα μπορούσε ίσως να τροποποιηθεί με τη χρήση των αντικαταστάσεων (substitutions) `subs`

```
subs = {LaplaceTransform[x[t], t, s] -> X[s],
        LaplaceTransform[v[t], t, s] -> V[s],
        LaplaceTransform[p[t], t, s] -> P[s]}
```

Προκύπτει η ισοδύναμη μορφή του συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων `lineqs1`

```
lineqs1 = lineqs /. subs
```

η οποία είναι ασφαλώς πιο σύντομη στην εμφάνιση. Μπορούμε βέβαια να λύσουμε το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων `lineqs` (το προτιμούμε κάπως από το `lineqs1`, γιατί άραγε;) με τη χρήση της εντολής `Solve`, πιο συγκεκριμένα

```
sollin = Solve[lineqs, {LaplaceTransform[x[t], t, s], LaplaceTransform[v[t], t, s]}]
```

Το τελευταίο μας (σχεδόν τελευταίο ...) καθήκον είναι η εύρεση της λύσεως (solution) `sola` με αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace `sollin` που μόλις βρήκαμε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `InverseLaplaceTransform`. Οι άγνωστες συναρτήσεις $x(t)$ και $v(t)$ προκύπτουν τώρα άμεσα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και λίστα δύο συναρτήσεων, συγκεκριμένα

```
{xs[t_] = sola[[1, 1, 2]], vs[t_] = sola[[1, 2, 2]]}
```

(Οι διπλές αγκύλες με Esc [[Esc και Esc]] Esc παρακαλώ!) Απομένει η επαλήθευση (verification) ver του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων deqs. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
ver = deqs /. {x -> xs, v -> vs} // Simplify
```

με απλοποίηση μάλιστα του αποτελέσματος. Για τις αρχικές συνθήκες (initial conditions) ics δίνουμε την εντολή (για $t = 0$)

```
ics = {xs[0], vs[0]}
```

Έτσι διαπιστώνουμε απλά την ισχύ τους, όπως πραγματικά πρέπει.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-13 (*[X και Y] Μηχανική των Υλικών, Ανάλυση Γραμμικών Φορέων: Στύλοι*): Σε μονώροφο κτίριο που προσεγγίζεται από πλαίσιο θεωρούμε ένα στύλο (υποστύλωμα, κολώνα) ύψους L ($0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI . Το κάτω άκρο του στύλου $x = 0$ είναι πακτωμένο στο έδαφος και το πάνω άκρο του στην οριζόντια πλάκα του μονώροφου κτιρίου. Ο στύλος αυτός θεωρείται ότι υφίσταται μόνο μία οριζόντια μετατόπιση $v(L) = v_0$ (v_0 στη *Mathematica*) στο πάνω άκρο του $x = L$ (τίποτε άλλο!). Για το στύλο αυτό που εξετάζεται μεμονωμένα (όχι για όλο το μονώροφο κτίριο!) ζητούνται [X και Y]: Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως beamde για το οριζόντιο βέλος κάμψεως $v = v(x)$ των σημείων x ($0 \leq x \leq L$) του στύλου. Οι σχετικές συνοριακές συνθήκες (boundary conditions) bcs στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών. Η λύση (solution) sol της σχετικής διαφορικής εξισώσεως beamde σε απλοποιημένη μορφή. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
sol = DSolve[{beamde, bcs}, v[x], x] // Simplify
```

και η σχετική συνάρτηση $v_s(x)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
vs[x_] = sol[[1, 1, 2]]
```

Η επαλήθευση (verification) ver της λύσεως αυτής $v_s(x)$ και ως προς τη διαφορική εξίσωση beamde και ως προς τις συνοριακές συνθήκες bcs (σε μία εντολή, εάν είναι δυνατόν). Οι εκφράσεις του βέλους κάμψεως $v_s(x)$, αλλά και της γωνίας στροφής $\theta(x)$, της καμπτικής ροπής (ή ροπής κάμψεως) $M(x)$ και της τέμνουσας δύναμης (ή διατμητικής δύναμης) $Q(x)$ κατά το ύψος x (με $0 \leq x \leq L$) του στύλου σε λίστα συναρτήσεων και σε απλοποιημένη μορφή με την εντολή Simplify. Η τέμνουσα δύναμη $Q(L)$ στο πάνω άκρο του στύλου, όπου και είναι πακτωμένος στην πλάκα. Η σχεδίαση του σχήματος του στύλου (ανηγμένου στη μετατόπιση v_0) για $L = 1$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί κάποια βελτιωμένη ίσως μορφή της εντολής

```
Plot[vs[x]/v0 /. L -> 1, {x, 0, 1}, AxesLabel -> {x, v}, PlotStyle -> Thickness[0.01],  
PlotLabel -> StyleForm["COLUMN SHAPE", FontSize -> 16]]
```

(Δυστυχώς ο κατακόρυφος άξονας x φαίνεται στο σχήμα αυτό σαν οριζόντιος! Κάποια βελτίωση της πιο πάνω εντολής ίσως να υπάρχει στη *Mathematica*! Απλά ίσως!) Τέλος ζητείται ο λεπτομερής συσχετισμός και παραλληλισμός μεταξύ ενός ελατηρίου (ελαστικού και γραμμικού εννοείται) σταθεράς k_s και του παρόντος στύλου (κολώνας, column) ως προς τη συμπεριφορά τους. Ποια ποσότητα k_c στον παρόντα στύλο αντιστοιχεί στη σταθερά k_s του ελατηρίου; (Οι απαντήσεις να γραφούν με πολύ λεπτομερείς επεξηγήσεις, αν είναι δυνατόν, παρακαλώ!)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-14 (*[X και Y] Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Δοκοί*): Θεωρούμε συνήθη πρόβολο μήκους $2L$ και δυσκαμψίας EI πακτωμένο στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και επομένως ελεύθερο στο δεξιό $x = 2L$ με μόνη εξωτερική φόρτιση μια συγκεντρωμένη δύναμη P στο μέσον του προβόλου $x = L$. Για το άγνωστο βέλος κάμψεως $v = v(x)$ του προβόλου που σχηματίζει την ελαστική γραμμή του, ζητούνται:

(α) [X] Η σχετική διαφορική εξίσωση, μία και υποχρεωτικά τετάρτης τάξεως, και οι αντίστοιχες

συνοριακές συνθήκες (δηλαδή το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών) υπό τη φόρτιση P που προαναφέρθηκε. Ο μετασχηματισμός Laplace $V(s)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ με τις παραγώγους της $v''(0)$ και $v'''(0)$ (που δεν είναι άμεσα διαθέσιμες) να παραμένουν σ' αυτόν. Συνεχίζοντας, με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $V(s)$ η εύρεση της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως) $v(x) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$ πάλι συναρτήσει των ποσοτήτων $v''(0)$ και $v'''(0)$. Το ξαναγράψιμο του προηγούμενου αποτελέσματος $v(x)$, τώρα όμως με διάκριση περιπτώσεων: $0 \leq x \leq L$ και $L \leq x \leq 2L$. Ο προσδιορισμός των μέχρι στιγμής άγνωστων παραγώγων $v''(0)$ και $v'''(0)$ από τη λύση $v(x)$ που προέκυψε υποχρεωτικά μέσω των συνοριακών συνθηκών στο ελεύθερο άκρο $x = 2L$ του προβόλου και η επαλήθευση των τιμών αυτών με στατικό τρόπο. Τώρα πια η γραφή του άγνωστου βέλους κάμψεως $v(x)$ στην τελική μορφή του με ενιαίο τρόπο σε όλο το μήκος του προβόλου καθώς και με διάκριση περιπτώσεων: $0 \leq x \leq L$ και $L \leq x \leq 2L$ στις απλούστερες μάλιστα δυνατές μορφές της. Η επαλήθευση της ισχύος και των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών από το βέλος κάμψεως $v(x)$ που βρέθηκε. Τέλος οι συγκεκριμένες τιμές του βέλους κάμψεως $v(x)$ για $x = 0$, $x = L$ και $x = 2L$ καθώς και η πρόχειρη σχεδιάσή του.

(β) [Y] Με τη *Mathematica* τώρα ζητούνται: Η διαφορική εξίσωση (differential equation) τετάρτης τάξεως de στο παρόν πρόβλημα προβόλου που θεωρείται τώρα ότι έχει μήκος $L = 2$ ($0 \leq x \leq 2$) και δυσκαμψία EI (η δυσκαμψία EI με ενιαίο σύμβολο EI στη *Mathematica* παρακαλώ, όχι με γινόμενο!) και ότι καταπονείται με συγκεντρωμένο φορτίο $-P$ (με μείον, προς τα κάτω για θετικό P) στο μέσον του $x = 1$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η συνάρτηση `DiracDelta`. Οι σχετικές τέσσερις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions) bcs στον παρόντα πρόβλοιο μήκους 2 ($0 \leq x \leq 2$) σε μορφή συνηθισμένης λίστας. Η λύση (solution) sol του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών (διαφορική εξίσωση de και συνοριακές συνθήκες bcs). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `DSolve` με χρήση και της εντολής `Simplify`, συγκεκριμένα

```
sol = DSolve[{de, bcs}, v[x], x] // Simplify
```

Η λύση sol περιλαμβάνει και τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(x)$, που δηλώνεται στη *Mathematica* σαν `UnitStep`. Στο αριστερό ήμισυ του προβόλου ($0 < x < 1$) έχουμε τη λύση

```
sol1 = sol /. UnitStep[x - 1] -> 0
```

Δηλαδή θέτουμε $H(x-1) = 0$, επειδή $x-1 < 0$. Αντίθετα στο δεξιό ήμισυ του προβόλου ($1 < x < 2$) θέτουμε $H(x-1) = 1$, επειδή $x-1 > 0$, και παίρνουμε τη λύση

```
sol2 = sol /. UnitStep[x - 1] -> 1 // Simplify
```

με απλοποίηση του αποτελέσματος. Η συνάρτηση $v_s(x)$ για το βέλος κάμψεως του προβόλου (σχεδόν ισοδύναμα για την ελαστική γραμμή του, που δημιουργεί το βέλος κάμψεως) είναι προφανώς

```
vs[x_] = sol[[1, 1, 2]]
```

(Οι διπλές αγκύλες με `Esc` [`Esc` και `Esc`] `Esc`.) Αυτή προκύπτει από τη λύση (solution) sol (που ήδη βρέθηκε) του προβλήματος προβόλου που εξετάζουμε. (Είναι κι αυτό ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών.) Η επαλήθευση (verification) ver της λύσεως $v_s(x)$ επιτυγχάνεται με την εντολή (αντικατάσταση της λύσεως $v_s(x)$ στη διαφορική εξίσωση και στις συνοριακές συνθήκες και απλοποίηση)

```
ver = {de, bcs} /. v -> vs // Simplify
```

και ως προς τη διαφορική εξίσωση de και ως προς τις συνοριακές συνθήκες bcs με απλοποιήσεις φυσικά των αποτελεσμάτων με την εντολή `Simplify`. Μπορούμε να σχεδιάσουμε την ελαστική γραμμή $v_s(x)$ του προβόλου ($0 \leq x \leq 2$) χρησιμοποιώντας την πολύ γνωστή μας εντολή `Plot` στο διάστημα $[0, 2]$ και μη λησμονώντας να πολλαπλασιάσουμε το βέλος κάμψεως $v_s(x)$ επί EI/P , ώστε να έχουμε προς σχεδίαση συνάρτηση χωρίς σύμβολα. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
Plot[(EI/P) vs[x], {x, 0, 2}]
```


Εντελώς ανάλογα ζητείται η σχεδίαση της δεύτερης και της τρίτης παραγώγου της ίδιας συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως του προβόλου) $v_s(x)$. Οι δύο αυτές ποσότητες δείχνουν φυσικά την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$ και την τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(x)$ κατά μήκος του προβόλου αντίστοιχα. Σε ποιο σημείο είναι ασυνεχής η συνάρτηση $v_s'''(x)$ (και η $Q(x)$) φυσικά; Γιατί; **Υπόδειξη:** Η απάντηση σε μία μόνο παράγραφο κειμένου με Alt 7 ή ισοδύναμα με Format -> Style -> Text.) Τελικά ζητούνται οι λίστες τιμών, values (τρεις λίστες: nvalues, Mvalues και Qvalues με τρεις χωριστές εντολές) στο αριστερό άκρο $x = 0$ του προβόλου, στο σημείο εφαρμογής της συγκεντρωμένης δυνάμεως $-P$ (δηλαδή στο σημείο $x = 1$) και στο δεξιό άκρο $x = 2$ του προβόλου για το βέλος κάμψεως $v_s(x)$, την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$ και την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$. **Υπόδειξη:** Για την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$Qvalues = EI \{vs'''[0], vs'''[1], vs'''[2]\}$$

Ποια είναι η μέγιστη τιμή του βέλους κάμψεως $v_s(x)$ και σε ποιο σημείο ακριβώς παρουσιάζεται αυτή; (Να δοθεί εμπειρική απάντηση σε παράγραφο κειμένου με Alt 7 παρακαλώ!)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-15 (*[X και Y] Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός Στύλου*):

Σε ένα συνήθη κυκλικό στύλο (κολώνα, column, υποστύλωμα ή απλούστερα ράβδο) μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI πακτωμένο στο κάτω άκρο του $x = 0$ και με ελεύθερο το πάνω άκρο του $x = L$ ασκείται στο πάνω, το ελεύθερο άκρο του κατάλληλα υψηλό θλιπτικό φορτίο P που προκαλεί (δυστυχώς!) το λυγισμό του στύλου. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί η σχετική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$v''(x) + k^2 v(x) = \frac{P\delta}{EI} \quad \text{με} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως $v = v(x)$ (εξαιτίας του λυγισμού) και δ το βέλος κάμψεως στο πάνω άκρο του στύλου: $\delta = v(L)$, που θεωρείται (το δ) γνωστή ποσότητα. Ισχύουν επίσης και οι δύο γνωστές συνθήκες πακτώσεως $v(0) = v'(0) = 0$ στο πακτωμένο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου που εξετάζουμε.

(α) [X] Ζητούνται: Η γενική λύση $v(x)$ της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως μαζί με τις δύο συνθήκες πακτώσεως (μόνο αυτές!) υποχρεωτικά σε τριγωνομετρική μορφή. Η πλήρης επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε (και διαφορική εξίσωση και συνθήκες πακτώσεως!). Από τη λύση αυτή $v(x)$ ο υπολογισμός της ποσότητας $v(L)$ και η εξίσωσή του με δ : $v(L) = \delta$, όπως ήδη αναφέρθηκε. Από το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος ο υπολογισμός του πρώτου κρίσιμου φορτίου λυγισμού P_{cr} που προκάλεσε το λυγισμό του στύλου που εξετάζουμε και είναι και το μόνο που πρακτικά ενδιαφέρει τον Πολιτικό Μηχανικό. Με διπλασιασμό του μήκους L του στύλου τι ακριβώς θα συμβεί με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του P_{cr} ; Με υποδιπλασιασμό του μήκους L ;

(β) [Y] Με τη *Mathematica* ζητούνται: Η διαφορική εξίσωση (differential equation) BucklingDE σ' αυτό το πρόβλημα λυγισμού (buckling) στύλου (column). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{BucklingDE} = v''[x] + k^2 v[x] == P\delta/EI$$

(Το δ με Esc d Esc παρακαλώ, η δυσκαμψία EI με ενιαίο σύμβολο EI , όχι με γινόμενο!) Με βάση τον πιο πάνω τύπο ορισμού της βοηθητικής σταθεράς k στη διαφορική εξίσωση, έχουμε προφανώς

$$P = k^2 EI$$

Μπορούμε τώρα να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση BucklingDE και να βρούμε τη λύση της (solution) sol. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve. Στο σημείο πακτώσεως $x = 0$ του στύλου έχουμε δύο συνθήκες ics. **Υπόδειξη:** Να δηλωθούν στη *Mathematica* με λίστα από δύο στοιχεία. Ποια είναι τώρα η λύση sol1 της διαφορικής εξισώσεως και των δύο συνθηκών στην πάκτωση; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{sol1} = \text{DSolve}\{\{\text{BucklingDE}, \text{ics}\}, v[x], x\}$$

Ποια είναι η σχετική συνάρτηση για το σχήμα λυγισμού (το βέλος κάμψεως) $v_s(x)$ του στύλου που λύγισε; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
vs[x_] = sol1[[1, 1, 2]] // Factor
```

(οι διπλές αγκύλες με Esc [[Esc και Esc]] Esc παρακαλώ!), καλύτερα με παραγοντοποίηση του αποτελέσματος με την εντολή Factor. Στο πάνω άκρο $x = L$ του στύλου έχουμε επίσης τη συνοριακή συνθήκη (boundary condition) $v(L) = \delta$, που πρέπει και αυτή να γίνει σεβαστή. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
bc = vs[L] == δ // Simplify
```

(το δ με Esc d Esc παρακαλώ!) με απλοποίηση του αποτελέσματος με την εντολή Simplify. Τη συνθήκη αυτή, διηρημένη μάλιστα με δ (φυσικά με $\delta \neq 0$ σε λυγισμό), μπορούμε τώρα να τη λύσουμε ως προς k χρησιμοποιώντας την εντολή Solve

```
solbc = Solve[bc[[1]]/δ == 0, k]
```

(Το δ με Esc d Esc παρακαλώ!) Τώρα πια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} προκύπτει εύκολα από τη λύση solbc λύνοντας φυσικά ως προς Pcr και αντικαθιστώντας την έκφραση του k . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
Psol = Solve[k == π/(2 L) /. k -> Sqrt[Pcr/EI], Pcr]
```

(Το π με Esc p Esc, ένα μόνο p παρακαλώ!) Παίρνουμε τώρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} σε πιο καθαρή μορφή από τη λύση Psol που μόλις βρήκαμε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
Pcr = Psol[[1, 1, 2]]
```

Για μια λίγο πιο αριθμητική έκφρασή του χρησιμοποιούμε και την εντολή N, πιο συγκεκριμένα

```
NPcr = Pcr // N
```

Ακόμη πιο αριθμητικές τιμές παίρνουμε διαιρώντας με τη δυσκαμψία EI του στύλου και θέτοντας αριθμητικές τιμές στο μήκος του L , π.χ. $L = 1$ ή $L = 2$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
{NPcr/EI /. L -> 1, NPcr/EI /. L -> 2}
```

Η μεταβολή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού P_{cr} με το μήκος L του στύλου φαίνεται και στο σχήμα

```
Plot[Pcr/EI, {L, 1, 5}, AxesLabel -> {L, "Pcr"},  
PlotLabel -> "CRITICAL BUCKLING LOAD", PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```

Ποιο είναι το σχετικό συμπέρασμα που εξάγεται (σε παράγραφο κειμένου με Alt 7 ή απόλυτα ισοδύναμα με Format -> Style -> Text);

ΟΜΑΔΑ EMII-J

ΑΣΚΗΣΗ EMII-J1 ([X και Y] Δυναμική των Κατασκευών: Τριβάθμια Μηχανικά Συστήματα, Δυναμικά Χαρακτηριστικά Μονώροφου Κτιρίου, Ιδιοταλαντώσεις, Ιδιοσυχνότητες): Θεωρούμε εδώ το πρόβλημα των ιδιοταλαντώσεων ιδεατού, αλλά εδώ μη συμμετρικού μονώροφου κτιρίου. Το πρόβλημα αυτό ανάγεται σε ένα ομογενές σύστημα τριών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (τριβάθμιο μηχανικό σύστημα) με τρεις αγνώστους (με προσανατολισμό και στην παραπέρα, αν και δυστυχώς πέρα από την παρούσα άσκηση, μελέτη της σεισμικής αποκρίσεως του κτιρίου υπό σεισμική διέγερσή του από το έδαφος) της μορφής

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

Τα μητρώα μάζας \mathbf{M} (διαγώνιο μητρώο όπως συνήθως, αλλ' ασφαλώς όχι πάντοτε, σε κατάλληλο βέβαια σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων) και δυσκαμψίας \mathbf{K} (συμμετρικό μητρώο εξαιτίας

του θεωρήματος της αμοιβαιότητας των Betti–Maxwell στην Τεχνική Μηχανική) έχουν τις μορφές

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & -e_y k_x \\ 0 & k_y & e_x k_y \\ -e_y k_x & e_x k_y & k_z \end{bmatrix}.$$

Έχουμε επίσης

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ \theta_z(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

με t το χρόνο, $u_x(t)$ και $u_y(t)$ τις οριζόντιες μετατοπίσεις του κέντρου βάρους K (κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς $Kxyz$) της πλάκας επικαλύψεως του μονώροφου κτιρίου που εξετάζουμε και $\theta_z(t)$ τη γωνία στροφής της πλάκας, που είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη σε περίπτωση σεισμικής φορτίσεως του κτιρίου. (Δηλαδή θεωρούμε τόσο ευθύγραμμη οριζόντια κίνηση όσο και στροφή, στρέψη στο μονώροφο κτίριό μας με δύο μεταφορικές αποκρίσεις και μία περιστροφική απόκριση. Το σχετικό γενικευμένο δiάνυσμα μετακινήσεων έχει επομένως τρεις συνιστώσες: τις $u_x(t)$, $u_y(t)$ και $\theta_z(t)$.) Οι αποσβέσεις της κινήσεως θεωρούνται μηδενικές. Παραπέρα τα e_x και e_y δηλώνουν τις στατικές εκκεντρότητες του μονώροφου κτιρίου, τα k_x , k_y και k_z τους τρεις δείκτες αντιστάσεως ή συντελεστές δυσκαμψίας (οι δύο πρώτοι) και δυστρεψίας (ο τρίτος) του ίδιου κτιρίου, m τη συνολική μάζα του κτιρίου (που περιλαμβάνει και τις μάζες των υποστυλωμάτων της πλάκας και θεωρείται συγκεντρωμένη στο κέντρο βάρους K της πλάκας) και r τη σχετική ακτίνα αδρανείας. Άρα

$$J_K = mr^2$$

είναι η φυσική ροπή αδρανείας (που περιλαμβάνει τώρα και τη μάζα m), όχι απλά η γεωμετρική ροπή αδρανείας, του κτιρίου στο παραπάνω μητρώο μάζας \mathbf{M} . Ζητούνται:

(α) [X] Η αναλυτική γραφή (χωρίς μητρώα) του παραπάνω συστήματος τριών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με τρεις άγνωστες συναρτήσεις.

(β) [X] Υποθέτοντας τις απλές συνημιτονικές εκφράσεις

$$u_x(t) = \varphi_x \cos(\omega t - \beta), \quad u_y(t) = \varphi_y \cos(\omega t - \beta), \quad \theta_z(t) = \varphi_z \cos(\omega t - \beta)$$

(με τα $\varphi_{x,y,z}$, ω και β σταθερές) για τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις (μετατοπίσεις και στροφή: τρεις ελευθερίες κινήσεως, τρεις βαθμοί ελευθερίας), ποια είναι η ορίζουσα από την οποία μπορούν να προσδιορισθούν οι ιδιοσυχνότητες ω_i στην ιδιοσυχνότητα του παρόντος μονώροφου κτιρίου;

(γ) [X] Ποια είναι η σχετική αλγεβρική εξίσωση; Τι βαθμοί είναι η εξίσωση αυτή ως προς ω^2 ; Για φυσικούς λόγους (χωρίς μαθηματική απόδειξη, που δεν είναι καταρχήν έτσι κι αλλιώς δυνατή χωρίς παραπέρα στοιχεία για τις σταθερές που υπεισέρχονται), τι ρίζες πρέπει να έχει; Πραγματικές ή μιγαδικές; (Δε ζητούνται πάντως οι τύποι που δίνουν τη λύση της αλγεβρικής αυτής εξισώσεως, αν και είναι θεωρητικά διαθέσιμοι. Έστω κι αν δεν τους θυμάσθε από μνήμης, έχετε τουλάχιστον ακούσει γι' αυτούς; Πού και πότε ακριβώς;)

(δ) [Y] Τελικά ζητείται η εύρεση της ίδιας αλγεβρικής εξισώσεως για τον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων ω_i με χρήση της *Mathematica*. **Υπόδειξη:** Καταρχήν πρέπει να ορισθούν τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και δυσκαμψίας \mathbf{K} . Για το πρώτο από αυτά, το \mathbf{M} , μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\mathbf{M} = \{\{m, 0, 0\}, \{0, m, 0\}, \{0, 0, m r^2\}\}$$

(ο εκθέτης με Ctrl 6 ή Ctrl ^), αν και καταρχήν το αποτέλεσμα δε θα είναι σε συνηθισμένη μορφή μητρώου. (Τι παριστάνουν οι ποσότητες m και r ;) Η χρήση και της εντολής *MatrixForm*, δηλαδή

$$\mathbf{M} = \{\{m, 0, 0\}, \{0, m, 0\}, \{0, 0, m r^2\}\} // \text{MatrixForm}$$

φαίνεται να βελτιώνει την έξοδο της εντολής (την κάνει «διδιάστατη»). Υπολογιστικά όμως είναι απαράδεκτη, γιατί δεν επιτρέπει παραπέρα υπολογισμούς με το μητρώο αυτό \mathbf{M} . Για το λόγο αυτό μια καλή λύση είναι η χρήση της σχετικής διπλής, σύνθετης εντολής

$$M = \{\{m, 0, 0\}, \{0, m, 0\}, \{0, 0, m r^2\}\}; M // MatrixForm$$

που εμφανίζει το μητρώο \mathbf{M} σε διδιάστατη (και οπτικά καλύτερη) μορφή, χωρίς όμως να επεμβαίνει στη δομή του, που συνεχίζει να είναι μονοδιάστατη εξαιτίας του πρώτου μέρους της πιο πάνω σύνθετης εντολής. Ανάλογα μπορεί να ορισθεί και το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} μέσω της εντολής

$$K = \{\{kx, 0, -ey kx\}, \{0, ky, ex ky\}, \{-ey kx, ex ky, kz\}\}; K // MatrixForm$$

Τι χαρακτηρισμούς μπορούμε να αποδώσουμε στα μητρώα \mathbf{M} και \mathbf{K} ; Προφανώς με βάση τη σχετική θεωρία (Παράγραφος A13.4.2 του Μέρους Α του διδακτικού βιβλίου) και τα ερωτήματα που προηγήθηκαν οι ιδιοσυχνότητες ω_i θα προκύψουν από το μηδενισμό της οριζουσας του μητρώου

$$\mathbf{L} = -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}.$$

Γιατί άραγε; Το μητρώο αυτό \mathbf{L} μπορεί να υπολογισθεί απλά μέσω της εντολής

$$L = -\omega^2 M + K; L // MatrixForm$$

(ο εκθέτης με Ctrl 6 ή Ctrl ^) τώρα που τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι πλέον γνωστά στη *Mathematica*. Γιατί η παραπάνω εντολή υπήρξε σύνθετη και αυτή; Τώρα πια δεν απομένει παρά ο υπολογισμός της οριζουσας $\det \mathbf{L} \equiv |\mathbf{L}|$ του μητρώου \mathbf{L} . Αυτός μας δίνει αμέσως τη σχετική εξίσωση eqf για την εύρεση των (κυκλικών) ιδιοσυχνοτήτων ω_i στην παρούσα ιδιοταλάντωση του ιδεατού μονώροφου κτιρίου που εξετάζουμε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Det (για την οριζουσα, determinant), πιο συγκεκριμένα

$$\text{eqf} = \text{Det}[L] == 0$$

(το διπλό ίσον με ακολουθία Esc, δηλαδή με Esc == Esc). Πρόκειται ασφαλώς για μια τριτοβάθμια (ως προς ω^2) εξίσωση με τρεις θετικές ρίζες (για φυσικούς λόγους): τις ιδιοσυχνότητες ω_i . Οι αρνητικές ρίζες $-\omega_i$ προφανώς δεν έχουν κανένα πρακτικό νόημα. Η αναλυτική επίλυση της εξισώσεως αυτής είναι εφικτή, αλλά λίγο πολύπλοκη. Για το λόγο αυτό πολύ συχνά προτιμάται η αριθμητική επίλυση. Επομένως ποιες είναι οι ιδιοσυχνότητες ω_i για τις εξής τιμές των σταθερών:

$$m = 1, \quad r = 1, \quad k_x = k_y = k_z = 1, \quad e_x = e_y = \frac{1}{2}$$

(σε κατάλληλες και συμβατές μονάδες εννοείται); **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{sol} = \text{Solve}[\text{eqf} /. \{m \rightarrow 1, r \rightarrow 1, k_x \rightarrow 1, k_y \rightarrow 1, k_z \rightarrow 1, e_x \rightarrow 1/2, e_y \rightarrow 1/2\}, \omega] // \text{Simplify}$$

(το βέλος, όταν χρειάζεται, σαν ακολουθία Esc, δηλαδή με Esc -> Esc) και στη συνέχεια η εντολή

$$\text{sol} // \text{N}$$

Με τον τρόπο αυτό θα προκύψουν οι αριθμητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων αυτών ω_i . Εναλλακτικά θα μπορούσε ασφαλώς να είχε χρησιμοποιηθεί και η εντολή NSolve για την κατευθείαν αριθμητική επίλυση της εξισώσεως eqf και συνήθως αυτό είναι που πραγματικά γίνεται.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-J2 (IX και Y) Δυναμική των Κατασκευών: Διβάθμια Μηχανικά Συστήματα, Δυναμικά Χαρακτηριστικά Διώροφου Κτιρίου, Ιδιοταλαντώσεις, Ιδιοσυχνότητες, Ιδιομορφές Ταλαντώσεως): Αναφερόμαστε στη Δυναμική των Κατασκευών, ένα ιδιαίτερα σημαντικό υποχρεωτικό μάθημα λαμβάνοντας υπόψη και το σεισμογενή χαρακτήρα της χώρας μας. Στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών το μάθημα αυτό διδάσκεται στο 8ο εξάμηνο, στο Δ' έτος σπουδών. Θεωρούμε το πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων (στην περίπτωση μας ιδιοταλαντώσεων χωρίς εξωτερικές δυνάμεις ούτε απόσβεση των ταλαντώσεων)

διώροφου κτιρίου. Εν προκειμένω το διώροφο κτίριο εξιδανικεύθηκε σαν ένα διβάθμιο στοιχειώδες επίπεδο πλαίσιο (σαν πλαισιωτός φορέας). Οι (συνολικές ανηγμένες) μάζες των πλακών είναι $2m$ (της πρώτης πλάκας, αυτής του πρώτου ορόφου) και m (της δεύτερης πλάκας, αυτής του δεύτερου ορόφου). Επίσης οι σταθερές (συντελεστές δυσκαμψίας ή δείκτες αντιστάσεως) των (δύο) ομάδων υποστυλωμάτων είναι $2k$ (για τα υποστυλώματα μεταξύ του εδάφους και της πλάκας του πρώτου ορόφου) και k (για τα υποστυλώματα μεταξύ των πλακών του πρώτου και του δεύτερου ορόφου). Οι σταθερές αυτές προκύπτουν με βάση τα ύψη h και τις δυσκαμψίες EI των υποστυλωμάτων, εν προκειμένω με βάση τον τύπο (13.2.14) της Ενότητας A13.2 του Μέρους A του διδακτικού βιβλίου:

$$k = \frac{24EI}{h^3}.$$

Με τη βοήθεια της Δυναμικής (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) και της Αναλύσεως των Κατασκευών προκύπτει το εξής σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (των εξισώσεων των οριζόντιων κινήσεων των πλακών των δύο ορόφων):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0},$$

$$\text{με } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

για τις άγνωστες μετατοπίσεις, δηλαδή τις οριζόντιες μετατοπίσεις $u_1(t)$ της πρώτης πλάκας και $u_2(t)$ της δεύτερης πλάκας με t το χρόνο. (Και οι δύο πλάκες θεωρούνται ολόσωμοι επίπεδοι φορείς και μη παραμορφώσιμοι πάνω στο επίπεδό τους.) Τα \mathbf{M} και \mathbf{K} είναι τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας αντίστοιχα του πλαισίου που εξιδανικεύει το διώροφο κτίριο. (Το μητρώο αποσβέσεως \mathbf{C} θεωρείται εδώ μηδενικό.) Ζητούνται: (α) [X] Η αναλυτική γραφή (χωρίς μητρώα) του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων. (β) [X] Υποθέτοντας τις απλές ημιτονικές εκφράσεις

$$u_i(t) = \varphi_i \sin(\omega t - \alpha), \quad i = 1, 2$$

(με τα $\varphi_{1,2}$, ω και α σταθερές) γι' αυτές τις δύο άγνωστες μετατοπίσεις, ζητούνται οι (κυκλικές) ιδιοσυχνότητες (φυσικές κυκλικές συχνότητες) $\omega = \omega_i$ του πλαισίου (διώροφου κτιρίου) μας και οι αντίστοιχες ιδιοπερίοδοι $T_i = 2\pi/\omega_i$. Πόσες είναι οι ιδιοσυχνότητες αυτές ω_i στο πρόβλημα ιδιοτιμής που έχουμε; (**Υπόδειξη:** δύο). (γ) [X] Ποιες είναι οι αντίστοιχες ιδιομορφές

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

τόσο για την πρώτη ιδιοσυχνότητα ω_1 όσο και για τη δεύτερη ιδιοσυχνότητα ω_2 του διώροφου κτιρίου υποθέτοντας ότι $\varphi_2 = 1$, δηλαδή μοναδιαίο οριζόντιο εύρος ταλαντώσεως της πλάκας του δεύτερου ορόφου του διώροφου κτιρίου; (δ) [Y] Με βάση και τις οδηγίες στο τελευταίο ερώτημα, στο ερώτημα (δ), της προηγούμενης ασκήσεως για την αποτελεσματική (και υπολογιστικά και οπτικά) γραφή μητρώων στη *Mathematica* ζητείται η εύρεση των αποτελεσμάτων των προηγούμενων ερωτημάτων με τη χρήση του υπολογιστή. **Υπόδειξη:** Καταρχήν ορίζουμε τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και δυσκαμψίας \mathbf{K} του διώροφου κτιρίου που εξετάζουμε μέσω των εντολών

`M = {{2 m, 0}, {0, m}}; M // MatrixForm`

`K = {{3 k, -k}, {-k, k}}; K // MatrixForm`

Σε τι ακριβώς χρησιμεύει η εντολή `MatrixForm`; Ανάλογα ορίζεται και το μητρώο \mathbf{u} των μετατοπίσεων (βέβαια σαν συνάρτηση του χρόνου t):

`u[t_] = {{u1[t]}, {u2[t]}}; u[t] // MatrixForm`

Το μητρώο αυτό μπορεί ασφαλώς να παραγωγισθεί, π.χ.

```
u"[t] // MatrixForm
```

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων στο παρόν (εξιδανικευμένο και πολύ απλό) πρόβλημα Δυναμικής των Κατασκευών είναι προφανώς το εξής:

$$de = M.u''[t]+K.u[t] == \{\{0\}, \{0\}\}$$

(το διπλό = με ακολουθία Esc, δηλαδή με Esc == Esc). Γιατί; Σε τι χρησιμεύουν οι τελείες στην πιο πάνω εντολή; (**Υπόδειξη:** Στον πολλαπλασιασμό μητρώων στη *Mathematica*.) Υποθέτουμε τώρα σαν μετατοπίσεις $u_{1,2}(t)$ τις ημιτονικές εκφράσεις του ερωτήματος (β). Επομένως

$$\{u1p[t_] = \phi1 \text{Sin}[\omega t - \alpha], u2p[t_] = \phi2 \text{Sin}[\omega t - \alpha]\};$$

(Το α με Esc a Esc παρακαλώ!) Άρα οι διαφορικές εξισώσεις μας de παίρνουν τις μορφές

$$de = de /. \{u1 \rightarrow u1p, u2 \rightarrow u2p\} // Simplify$$

Αυτές είναι πια καθαρά αλγεβρικές εξισώσεις (χωρίς καθόλου παραγώγους). Με απλοποίηση μάλιστα του ημιτονικού όρου $\sin(\omega t - \alpha)$, παίρνουμε ένα ομογενές σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (linear algebraic equations) με δύο αγνώστους: τα εύρη ταλαντώσεων $\phi_{1,2}$

$$\text{Table}[eq[i] = de[[1, i, 1, 1]] == 0, \{i, 1, 2\}]$$

(τα διπλά σύμβολα με ακολουθίες Esc παρακαλώ). Το σύστημα αυτό έχει καταρχήν μόνο την τετριμμένη (δηλαδή τη μηδενική) λύση. Εάν όμως μηδενίζεται η ορίζουσα $\det \mathbf{L} \equiv |\mathbf{L}|$ του μητρώου των συντελεστών του \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \{\{\text{Coefficient}[eq[1][[1]], \phi1], \text{Coefficient}[eq[1][[1]], \phi2]\}, \\ \{\text{Coefficient}[eq[2][[1]], \phi1], \text{Coefficient}[eq[2][[1]], \phi2]\}\}$$

δηλαδή, εάν ισχύει η εξίσωση

$$\text{Det}[\mathbf{L}] == 0$$

που είναι δευτεροβάθμια ως προς ω^2 , τότε έχουμε και μία απλή απειρία μη μηδενικών λύσεων. (Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν για φυσικούς λόγους δύο θετικές ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2}$ στις ιδιοταλαντώσεις του ιδεατού διώροφου κτίριου μας.) Σημειώνουμε ότι την ίδια πιο πάνω εξίσωση τη βρίσκουμε ευκολότερα (πιο άμεσα) και ως εξής:

$$\text{determinant} = \text{Det}[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] == 0$$

(ο εκθέτης με Ctrl 6 ή Ctrl ^). Δηλαδή η (κυκλική) συχνότητα ω παίρνει σαν τιμή της μία από τις δύο ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2}$ του παρόντος ιδεατού διώροφου κτιρίου, πιο συγκεκριμένα

$$\text{sol} = \text{Solve}[\text{determinant}, \omega] // Simplify$$

(ο εκθέτης συνεχώς με Ctrl 6 ή Ctrl ^). Εναλλακτικά έχουμε τη μορφή

$$\text{sol1} = \text{sol} /. k \rightarrow m \omega^2 // \text{PowerExpand}$$

Δηλαδή για καθεμία από τις δύο ιδιοσυχνότητες

$$\{\omega[1] = \text{sol}[[2, 1, 2]], \omega[2] = \text{sol}[[4, 1, 2]]\}$$

(τα διπλά σύμβολα με ακολουθίες Esc: Esc [[Esc και Esc]] Esc αντίστοιχα) που είναι διαθέσιμη αναλυτικά ή προσδιορίζεται αριθμητικά μέσω της αριθμητικής λύσεως

$$\text{sol2} = \text{sol} // \mathbf{N}$$

το σύστημα των δύο ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που προαναφέρθηκε

$$\{\text{eq}[1], \text{eq}[2]\}$$

έχει μία απλή απειρία λύσεων $\varphi_{1,2}$. Οι λύσεις αυτές καλούνται **ιδιομορφές ταλαντώσεως** (και αρκετά απλούστερα **ιδιομορφές**) και παριστάνουν τα προσημασμένα εύρη των (οριζόντιων) ιδιοταλαντώσεων των πλακών που εξετάζονται εδώ, αν θυμηθούμε τις ημιτονικές εκφράσεις των μετατοπίσεων $u_{1,2}(t)$ που ήδη υποθέσαμε. Μεταξύ αυτών των άπειρων λύσεων πολύ συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός επιλέγει εκείνη που αναφέρεται σε μοναδιαίο εύρος ταλαντώσεως του ανώτερου (εν προκειμένω του δεύτερου) ορόφου του κτιρίου του (για μεγαλύτερη σαφήνεια της πλάκας του δεύτερου ορόφου του κτιρίου του). Επομένως με $\varphi_2 = 1$ το φ_1 (δηλαδή το εύρος ταλαντώσεων της πλάκας του πρώτου ορόφου του ίδιου κτιρίου) προκύπτει αμέσως με την εντολή

$$s1 = \text{Solve}[\text{eq}[1] /. \{\omega \rightarrow \omega[1], \varphi_2 \rightarrow 1\}, \varphi_1]$$

(Θα μπορούσε βέβαια να είχε χρησιμοποιηθεί εξίσου καλά και η άλλη εξίσωση, δηλαδή η εξίσωση $\text{eq}[2]$.) Η ζητούμενη ιδιομορφή ταλαντώσεως του διώροφου κτιρίου που εξετάζεται είναι η εξής:

$$\varphi[1] = \{\{s1[[1, 1, 2]]\}, \{1\}\}$$

(Για ποιο λόγο έχει τεθεί το 1 παραπάνω;) Ανάλογα μπορούμε να πάρουμε και τη δεύτερη ιδιομορφή ταλαντώσεως του κτιρίου (που αντιστοιχεί στη δεύτερη ιδιοσυχνότητα ω_2). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

$$s2 = \text{Solve}[\text{eq}[1] /. \{\omega \rightarrow \omega[2], \varphi_2 \rightarrow 1\}, \varphi_1]$$

$$\varphi[2] = \{\{s2[[1, 1, 2]]\}, \{1\}\}$$

(Και να μην ξεχνάμε: τα διπλά σύμβολα με ακολουθίες **Esc**, π.χ. **Esc** [[**Esc** παρακαλώ.)

Πριν ακόμη πλησιάσει στο τέλος της η παρούσα άσκηση, ας τεθεί ένα πολύ εύκολο ερώτημα. Με γνωστές τις ιδιοσυχνότητες $\omega_{1,2}$, ποιες είναι οι αντίστοιχες ιδιοπερίοδοι $T_{1,2}$;

Πρέπει να σημειωθεί τέλος ότι, όπως γνωρίζουμε από την Παράγραφο A13.4.3 του Κεφαλαίου A13 του Μέρους A του διδακτικού βιβλίου, οι ιδιομορφές ταλαντώσεως φ είναι ορθογώνιες ως προς τα μητρώα μάζας \mathbf{M} , σχέση (13.4.23), και δυσκαμψίας \mathbf{K} , σχέση (13.4.24). Δηλαδή ισχύουν οι εξής συνθήκες **ορθογωνιότητας** (ή **ορθογωνικότητας**):

$$\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_2 = 0, \quad \varphi_2^T \mathbf{M} \varphi_1 = 0$$

(με το σύμβολο T να δηλώνει ανάστροφο μητρώο, εν προκειμένω διάνυσμα γραμμής αντί διάνυσμα στήλης) για το μητρώο μάζας \mathbf{M} και αντίστοιχα για το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} . Τούτο μπορεί να αποδειχθεί (και για τις δύο ιδιομορφές ταλαντώσεων που ήδη βρέθηκαν) με τη χρήση της εντολής

$$\{\text{Transpose}[\varphi[1]] \cdot \mathbf{M} \cdot \varphi[2], \text{Transpose}[\varphi[2]] \cdot \mathbf{M} \cdot \varphi[1]\}$$

(με την τελεία, υπενθυμίζεται, να δηλώνει απλά πολλαπλασιασμό μητρώων) για το μητρώο μάζας \mathbf{M} του παρόντος ιδεατού διώροφου κτιρίου. Να εκτελεσθούν και οι ανάλογοι υπολογισμοί για το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} .

Τελικά ο Πολιτικός Μηχανικός οφείλει να υπολογίσει τις γενικευμένες μάζες $M_{1,2}$ καθώς επίσης και τις γενικευμένες δυσκαμψίες $K_{1,2}$ του μηχανικού συστήματος που εξετάζει (εν προκειμένω διβάθμιου και αναφερόμενου σε ιδεατό διώροφο κτίριο). Ποιες είναι οι τιμές των γενικευμένων αυτών ποσοτήτων, που δίνονται από τους τύπους

$$M_i = \varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i, \quad K_i = \varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_i, \quad i = 1, 2;$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\{\text{Transpose}[\varphi[1]] \cdot \mathbf{M} \cdot \varphi[1], \text{Transpose}[\varphi[2]] \cdot \mathbf{M} \cdot \varphi[2]\}$$

για την εύρεση των γενικευμένων μαζών $M_{1,2}$ και μια απόλυτα ανάλογη εντολή για την εύρεση των γενικευμένων δυσκαμψιών $K_{1,2}$. **Υπόδειξη:** Πρέπει να προκύψουν οι τιμές

$$M_1 = \frac{3}{2} m, \quad M_2 = 3m \quad \text{και επίσης} \quad K_1 = \frac{3}{4} k, \quad K_2 = 6k.$$

Να ελεγχθεί επίσης εάν ισχύουν οι σχέσεις

$$K_i = \omega_i^2 M_i, \quad i = 1, 2,$$

που συνδέουν τις γενικευμένες μάζες M_i και τις γενικευμένες δυσκαμψίες K_i .

(ε) [X] Να αποδειχθούν και με το χέρι οι πιο πάνω συνθήκες ορθογωνιότητας των ιδιομορφών ταλαντώσεως $\boldsymbol{\varphi}_i$. Μετά να υπολογισθούν και οι γενικευμένες μάζες M_i και δυσκαμψίες K_i ($i = 1, 2$).

(στ) [Y] Θα ήταν ίσως ενδιαφέρον να γίνει και η σχεδίαση των ιδιομορφών ταλαντώσεως του κτιρίου (που έχουν ήδη προσδιορισθεί) με τη χρήση της *Mathematica*. Τα σημεία τα οποία πρέπει να χρησιμοποιηθούν είναι τα εξής:

```
data1 = {{0, 0}, {1/2, 1}, {1, 2}, {-1, 2}, {-1/2, 1}, {0, 0}};
```

για την πρώτη ιδιομορφή (με τις τετμημένες να δηλώνουν προσημασμένα εύρη ταλαντώσεων, έστω και αρνητικά, ενώ τις τεταγμένες: 0, 1 και 2 τον όροφο του κτιρίου (με 0 στην κάτω πλάκα του ισογείου: στην πλάκα πάνω στο έδαφος). **Υπόδειξη:** Μια πρώτη δυνατότητα αποτελεί η χρήση της εντολής `ListPlot`:

```
ListPlot[data1, PlotJoined -> True, PlotStyle -> Thickness[0.012]]
```

(τα βέλη με ακολουθία `Esc`: `Esc -> Esc`) ή κάποια βελτιωμένη μορφή της για την πρώτη ιδιομορφή ταλαντώσεως $\boldsymbol{\varphi}_1$. Όμοια και για τη δεύτερη ιδιομορφή ταλαντώσεως $\boldsymbol{\varphi}_2$ με `data2` αντί `data1`, όπου

```
data2 = {{0, 0}, {-1, 1}, {1, 2}, {-1, 2}, {1, 1}, {0, 0}};
```

δηλαδή

```
ListPlot[data2, PlotJoined -> True, PlotStyle -> Thickness[0.012]]
```

(Γιατί δόθηκαν αυτές οι τιμές των δεδομένων στις λίστες `data1` και `data2`;) Μια δεύτερη (και ίσως βελτιωμένη) επιλογή αποτελεί η χρήση της εντολής `Graphics`, πιο συγκεκριμένα

```
Show[Graphics[{GrayLevel[0.7], Polygon[data1]}, Axes -> True],  
PlotLabel -> "TWO-STOREY BUILDING: FIRST VIBRATION MODE"]
```

για την πρώτη ιδιομορφή στο ιδεατό διώροφο κτίριο (two-storey building) που εξετάζεται και

```
Show[Graphics[{GrayLevel[0.7], Polygon[data2]}, Axes -> True],  
PlotLabel -> "TWO-STOREY BUILDING: SECOND VIBRATION MODE"]
```

για τη δεύτερη ιδιομορφή $\boldsymbol{\varphi}_2$, η οποία είναι και λίγο πιο εντυπωσιακή. Γιατί είναι έτσι; Πολύ βελτιωμένες μορφές παραστάσεως των ιδιομορφών ταλαντώσεως είναι επίσης δυνατές.

Στο σημείο αυτό τελειώνει η παρούσα μακρά (αλλά ίσως όχι και τόσο άχρηστη) [X και Y] άσκηση. Ελπίζεται πως έχει δώσει μια (έστω και αμυδρή) εικόνα στο φοιτητή και στη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό για την επίλυση των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων τα οποία παρουσιάζονται στις ιδιοταλαντώσεις κτιρίων και στον υπολογισμό των ιδιοσυχνότητων και των ιδιομορφών ταλαντώσεως. (Οι ιδιοταλαντώσεις αποτελούν τη βάση για την παραπέρα μελέτη των ελεύθερων και στη συνέχεια και των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων των ιδίων κτιρίων.) Αν έχει συμβεί αυτό, τότε η άσκηση πέτυχε το σκοπό της. Προφανώς ο σκοπός μας δεν ήταν η εκμάθηση εντολών της *Mathematica*, αλλά η χρήση τους μόνο σαν εργαλείο! Άλλιώς απέτυχε δυστυχώς!

ΑΣΚΗΣΗ EMII-J3 ([X και Y] Ταλαντώσεις: Διβάθμια Μηχανικά Σύστημα, Ιδιοτιμές): Εδώ θεωρούμε τις ιδιοταλαντώσεις διβάθμιου μηχανικού συστήματος, π.χ. του συννηθισμένου μηχανικού συστήματος δύο μαζών m και δύο ελατηρίων σταθερών k ή εναλλακτικά ενός διώροφου ιδεατού κτιρίου με άκαμπτες πλάκες που έχουν μάζες m και που προσεγγίζεται από απλό αντίστοιχο διώροφο πλαίσιο. Υποθέτουμε επίσης ότι δεν υπάρχει απόσβεση (το μητρώο αποσβέσεως \mathbf{C} είναι

μηδενικό). Σε ένα τέτοιο μηχανικό σύστημα προκύπτει το εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων (system of differential equations) deqs:

$$m\ddot{u}_1(t) + 2ku_1(t) - ku_2(t) = 0, \quad m\ddot{u}_2(t) - ku_1(t) + ku_2(t) = 0.$$

Ζητούνται [X και Y]: Οι σχετικές ιδιοσυχνότητες (eigenfrequencies) ή φυσικές κυκλικές συχνότητες (natural frequencies) ω_1 και ω_2 (γιατί είναι μόνο δύο;) υποχρεωτικά με τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως

$$u_1(t) = A e^{\mu t}, \quad u_2(t) = B e^{\mu t}.$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

Clear[A, B]

deqs = {m u1''[t] + 2 k u1[t] - k u2[t] == 0, m u2''[t] - k u1[t] + k u2[t] == 0}

{u1h[t_] = A Exp[μ t], u2h[t_] = B Exp[μ t]}

(το μ με Esc m Esc παρακαλώ ή με αλλαγή πληκτρολογίου και κατευθείαν Ελληνικό μ)

subs = deqs /. {u1 -> u1h, u2 -> u2h} // Simplify

lineqs = {eq 1 = subs[[1, 1]]/Exp[μ t] == 0, eq 2 = subs[[2, 1]]/Exp[μ t] == 0}

sol = Solve[lineqs, {A, B}]

det = Det[{{Coefficient[eq 1[[1]], A], Coefficient[eq 1[[1]], B]},
{Coefficient[eq 2[[1]], A], Coefficient[eq 2[[1]], B]}}] == 0

det 1 = (det[[1]] /. k -> m ω0^2)/m^2 == 0 // Simplify

solμ = Solve[det 1, μ] // Simplify

(το μ με Esc m Esc παρακαλώ και πάλι ή απλά με αλλαγή του πληκτρολογίου και Ελληνικό μ)

nsolμ = solμ // N

eigenfrequencies = {ω 1 = nsolμ[[4, 1, 2, 1]] ω0, ω 2 = nsolμ[[2, 1, 2, 1]] ω0}

(το ω με Esc Λατινικό ο Esc, παρακαλώ πάντα με Ελληνικό ω, όχι ασφαλώς με w, απαράδεκτο!)

{ω 1, ω 2}

με λεπτομερείς επεξηγήσεις του έργου της καθεμιάς από τις εντολές αυτές. Ποια θα μπορούσε να είχε παραλειφθεί; Ποιες να είχαν συμπυκνωθεί;

Ειδικά στο παρόν διβάθμιο μηχανικό σύστημα, επειδή δεν υπάρχει καθόλου απόσβεση των ταλαντώσεων, συχνά (πολύ συχνά!) ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί για το ίδιο ακριβώς σύστημα διαφορικών εξισώσεων deqs αντίστοιχες τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις (συνημιτονικές ή ημιτονικές) και με γωνίες φάσεως α μάλιστα, ώστε να αποφύγει τις φανταστικές ιδιοτιμές μ, π.χ.

$$\{u1h[t_] = A \text{Cos}[\omega t - \alpha], u2h[t_] = B \text{Cos}[\omega t - \alpha]\}$$

(το α με Esc a Esc παρακαλώ!). Ποιες είναι τώρα οι σχετικές αντικαταστάσεις subs; Οι αντίστοιχες γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις lineqs; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

lineqs = {eq 1 = subs[[1, 1]]/Cos[ω t - α] == 0, eq 2 = subs[[2, 1]]/Cos[ω t - α] == 0}

(το ω με Esc Λατινικό ο Esc και το α με Esc a Esc παρακαλώ!). Ποια είναι η σχετική λύση sol; Η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση det για τις ιδιοτιμές ω_1 και ω_2 ; Να προσδιορισθούν και πάλι οι ιδιοσυχνότητες αυτές με ανάλογες εντολές, στο τέλος ίσως και λίγο απλούστερες. Συμφωνούν τα αποτελέσματα της τριγωνομετρικής αυτής αντικαταστάσεως με εκείνα της εκθετικής αντικαταστάσεως προηγουμένως; Προκύπτουν ακριβώς οι ίδιες ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 ή όχι;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-14 ([X και Y] Ταλαντώσεις: Απόκριση Μονοβάθμιου Μηχανικού Συστήματος σε Αρμονική Φόρτιση, Μιγαδική Συνάρτηση Αποκρίσεως στο Πεδίο της Συχνότητας): Θεωρούμε

το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας, ελατηρίου και αποσβεστήρα, το οποίο περιγράφεται στην Παράγραφο Α6.1.1 του Κεφαλαίου Α6 του Μέρους Α του διδακτικού βιβλίου. Ζητούνται [X και Y]: Η σχετική ομογενής διαφορική εξίσωση (Παράγραφος Α6.1.2) και η γενική λύση της τόσο σε εκθετική όσο και σε υπερβολική μορφή. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

$$deh = u''[t] + 2 \xi \omega_0 u'[t] + \omega_0^2 u[t] == 0$$

(το ξ με Esc x Esc και το ω με Esc Λατινικό ο Esc, παρακαλώ!)

$$us[t_] = DSolve[deh, u[t], t][[1, 1, 2]]$$

$$us1[t_] = us[t] // ExpToTrig$$

Στη συνέχεια ζητείται η μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως υπό συνημιτονική φόρτιση $p_0 \cos \omega t$ (Παράγραφος Α6.1.3). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

Clear[A, B]

$$dec = deh[[1]] == (p0/m) \text{Cos}[\omega t]$$

$$uc[t_] = A \text{Cos}[\omega t] + B \text{Sin}[\omega t]$$

$$eq = dec /. u \rightarrow uc // FullSimplify$$

$$\text{lineqs} = \{\text{eq}1 = \text{Coefficient}[eq[[1]], \text{Cos}[\omega t]] == 0, \\ \text{eq}2 = \text{Coefficient}[eq[[1]], \text{Sin}[\omega t]] == 0\}$$

$$\text{sol2} = \text{Solve}[\text{lineqs}, \{A, B\}] // \text{Simplify}$$

$$\text{sol3} = (\text{sol2} /. \omega \rightarrow \beta \omega_0 // \text{Simplify}) /. \omega_0 \rightarrow \text{Sqrt}[k/m]$$

(το β με Esc b Esc παρακαλώ ή κατευθείαν με τη χρήση Ελληνικού πληκτρολογίου)

$$\text{sol4} = \{A, B\} /. \text{sol3}[[1]]$$

$$\text{ucs}[t_] = uc[t] /. \text{sol3}[[1]] // \text{Simplify}$$

Με τη χρήση (αρχικά) και της εντολής

Clear[A, B]

να γίνει ανάλογη εργασία για την αντίστοιχη ημιτονική φόρτιση με δείκτες s (sine) αντί c (cosine) τώρα, π.χ. με us αντί uc. Συμφωνούν τα αποτελέσματα με εκείνα της Παραγράφου Α6.1.3;

Ανάλογη εργασία ζητείται να γίνει και για τη μιγαδική εκθετική «φόρτιση» (γιατί μπήκαν τα εισαγωγικά στη λέξη φόρτιση;) $p_0 e^{i\omega t}$ (Παράγραφος Α6.1.4 του Κεφαλαίου Α6 του Μέρους Α του διδακτικού βιβλίου). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

$$dee = deh[[1]] == (p0/m) \text{Exp}[i \omega t]$$

(η φανταστική μονάδα i, δηλαδή η ποσότητα $i = \sqrt{-1}$, συνεχώς με Esc ii Esc, διπλό i παρακαλώ!)

$$ue[t_] = C \text{Exp}[i \omega t]$$

$$eq = dee /. u \rightarrow ue // FullSimplify$$

$$\text{lineq} = \{\text{eq}1 = \text{Coefficient}[eq[[1]], \text{Exp}[i \omega t]] == 0\}$$

$$\text{sol2} = \text{Solve}[\text{lineq}, C] // \text{Simplify}$$

$$\text{sol3} = (\text{sol2} /. \omega \rightarrow \beta \omega_0 // \text{Simplify}) /. \omega_0 \rightarrow \text{Sqrt}[k/m]$$

(το β με Esc b Esc παρακαλώ ή κατευθείαν με τη χρήση Ελληνικού πληκτρολογίου)

$$\text{sol4} = C /. \text{sol3}[[1]]$$

$$\text{use}[t_] = ue[t] /. \text{sol3}[[1]] // \text{Simplify}$$

Στη συνέχεια ζητείται να επαληθευθεί [X και Y] ότι η απόκριση στην παραπάνω μιγαδική

εκθετική «φόρτιση» $p_0 e^{i\omega t}$ είναι ίση με το άθροισμα των αντίστοιχων αποκρίσεων στη συνημιτονική φόρτιση $p_0 \cos \omega t$ και στην ημιτονική φόρτιση $p_0 \sin \omega t$, οι οποίες εξετάστηκαν προηγουμένως.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
ver = ucs[t] + I uss[t] == use[t]
```

(δεν αρκεί!) και επιπλέον η εντολή απλοποίησης Simplify

```
ver // Simplify
```

Ποια είναι η σχετική μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$, αρκεί να μη γίνεται σύγχυση με τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(x)$) εννοείται στο πεδίο της (κυκλικής) συχνότητας ω (Παράγραφος Α6.1.6 του Κεφαλαίου Α6 του Μέρους Α του διδακτικού βιβλίου). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
G0[ω_] = sol4/p0
```

και χωρίς τη χρήση του λόγου $\beta = \omega/\omega_0$ η κάπως σύνθετη εντολή (επειδή $\omega_0 = \sqrt{k/m}$)

```
G[ω_] = (G0[ω] /. β -> ω/ω0 // Simplify) /. k -> m ω0^2 // Factor
```

Συμφωνούν τα αποτελέσματα με εκείνα του διδακτικού βιβλίου (στο Μέρος Α, Κεφάλαιο Α6) ή όχι;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-J5 (IX και Y) Ταλαντώσεις: Διβάθμιο Μηχανικό Σύστημα): Στις Ταλαντώσεις θεωρούμε το διβάθμιο μηχανικό σύστημα το οποίο αποτελείται από ένα ελατήριο S_1 σταθεράς k_1 με στερεωμένο (ακίνητο) το πάνω άκρο του και με το κάτω άκρο του να στηρίζει υλικό σημείο M_1 μάζας m_1 . Ακολουθεί στη σειρά (προς τα κάτω) δεύτερο ελατήριο S_2 σταθεράς k_2 που στηρίζει δεύτερο υλικό σημείο M_2 μάζας m_2 . Στο υλικό σημείο M_2 στηρίζεται τρίτο ελατήριο S_3 σταθεράς k_3 με στερεωμένο (ακίνητο) το κάτω άκρο του (κάτω-κάτω στο μηχανικό σύστημά μας). Ζητούνται:

(α) Με την απλοποιητική υπόθεση ίσων μαζών $m_1 = m_2 = m$ των δύο υλικών σημείων M_1 και M_2 και ίσων σταθερών $k_1 = k_2 = k_3 = k$ των τριών ελατηρίων S_1, S_2 και S_3 ζητούνται οι δύο σχετικές ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 τόσο με το χέρι [X] όσο και με τον υπολογιστή [Y] και με όλες τις γνωστές μεθόδους.

(β) Συμφωνούν όλα τα αποτελέσματα (και με το χέρι [X] και με τον υπολογιστή [Y]) ή όχι;

(γ) Ποια είναι η ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στο παρόν διβάθμιο μηχανικό σύστημα (με μάζες και ελατήρια) και στο αντίστοιχο (απλοποιημένο βέβαια) μηχανικό σύστημα που προσεγγίζει (με πλαίσιο) διάφορο ιδεατό κτίριο διατμήσεως;

(δ) Στη Δυναμική των Κατασκευών ποιες προσεγγίσεις γίνονται συνήθως στην περίπτωση του κτιρίου από τον Πολιτικό Μηχανικό;

ΟΜΑΔΑ EMII-K

ΑΣΚΗΣΗ EMII-K1 (IX) Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων. Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Παραμορφώσεις από Τέμνουσα Δύναμη: Δοκός Timoshenko): Στην Τεχνική Θεωρία Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών η διαφορική εξίσωση της κάμψεως συνήθως δοκού που χρησιμοποιείται συνήθως προκύπτει σύμφωνα με τη θεωρία των Euler-Bernoulli ή ισοδύναμα Bernoulli-Euler (περίπου 1750 μ.Χ.) και είναι η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$EIv''''(x) = p(x).$$

Σ' αυτήν $v(x)$ είναι το βέλος κάμψεως της δοκού (που σχηματίζει την ελαστική γραμμή της δοκού), $p(x)$ η κατανομημένη κάθετη φόρτιση πάνω στη δοκό (και τα δύο εδώ με θετική διεύθυνση προς τα πάνω) και EI η δυσκαμψία της δοκού. Η επιρροή της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ στις παραμορφώσεις της δοκού έχει αγνοηθεί. Την επιρροή αυτή την πήρε υπόψη του ο Timoshenko (το 1921 μ.Χ.).

Ο Timoshenko χρησιμοποίησε στις συνθήκες ισορροπίας της δοκού τη γωνία στροφής $\psi(x)$ της διατομής της δοκού (σαν δεύτερη άγνωστη ποσότητα πέρα από το βέλος κάμψεως $v(x)$) αντί για την κλίση $v'(x)$ της ελαστικής γραμμής της δοκού. Δηλαδή δε δεχθηκε ότι $\psi(x) = v'(x)$. Σύμφωνα με την ακριβέστερη αυτή θεωρία του Timoshenko (1921 μ.Χ.) προκύπτει το σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} kGF[v''(x) - \psi'(x)] + p(x) &= 0, \\ EI\psi''(x) + kGF[v'(x) - \psi(x)] &= 0. \end{aligned}$$

Στο σύστημα αυτό υπεισέρχεται επιπλέον και η σταθερά

$$kGF = kFG = (kF)G = F'G,$$

δηλαδή το γινόμενο της επιφάνειας ολισθήσεως $F' = kF$ της διατομής της δοκού που κάμπτεται επί το μέτρο διατμήσεως (ή ολισθήσεως) G του (ισότροπου και γραμμικά ελαστικού) υλικού της δοκού. Η επιφάνεια ολισθήσεως $F' = kF$ της διατομής της δοκού προσδιορίζεται με πολλαπλασιασμό της αληθινής επιφανείας F της διατομής αυτής επί ένα συντελεστή k που εξαρτάται από το σχήμα της διατομής. Ο συντελεστής αυτός k αποδεικνύεται ότι είναι ίσος με $k = 5/6$ για ορθογωνική διατομή και με $k = 0.9$ για κυκλική διατομή. Σκοπό της παρούσας ασκήσεως δεν αποτελεί η διερεύνηση της σχετικής θεωρίας, αλλ' απλά η αναγωγή του παραπάνω συστήματος δύο διαφορικών εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις, τις $v(x)$ και $\psi(x)$, σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (είτε ως προς $v(x)$ είτε ως προς $\psi(x)$). Ζητούνται: (α) Ποια είναι η σχετική διαφορική εξίσωση ως προς τη γωνία στροφής $\psi(x)$ της διατομής της δοκού; **Υπόδειξη:** Να παραγωγισθεί μία φορά η δεύτερη διαφορική εξίσωση και να αντικατασταθεί η άγνωστη ποσότητα $v''(x) - \psi'(x)$ που υπεισέρχεται από την πρώτη διαφορική εξίσωση (με αφαίρεση των δύο εξισώσεων). Πρέπει τότε να προκύψει η διαφορική εξίσωση

$$EI\psi'''(x) = p(x).$$

Ποια είναι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης τόσο με τρεις (διαδοχικές) ολοκληρώσεις όσο και (πολύ καλύτερα) με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και τελικά ενός συνελικτικού ολοκληρώματος; (β) Ποια είναι η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση ως προς το ίδιο το βέλος κάμψεως $v(x)$; **Υπόδειξη:** Και πάλι να παραγωγισθεί η δεύτερη διαφορική εξίσωση μία φορά και στη συνέχεια να αντικατασταθούν σ' αυτήν οι εκφράσεις των $\psi'(x)$ και $\psi'''(x)$ από την πρώτη διαφορική εξίσωση. (Προφανώς για την εύρεση της $\psi'''(x)$ η πρώτη διαφορική εξίσωση θα πρέπει να παραγωγισθεί δύο φορές.) Τελικά πρέπει να προκύψει η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$EIv''''(x) = p(x) - \frac{EI}{kGF} p''(x).$$

Αυτή μοιάζει με την αρχική εξίσωση

$$EIv''''(x) = p(x)$$

σύμφωνα με τη θεωρία των Euler-Bernoulli (ή Bernoulli-Euler) με τη διαφορά όμως πως τώρα (εδώ σύμφωνα με τη θεωρία του Timoshenko) στο δεξιό μέλος έχουμε την ποσότητα

$$p^*(x) = p(x) - \frac{EI}{kGF} p''(x).$$

Δηλαδή τώρα υπεισέρχεται επιπλέον και η δεύτερη παράγωγος $p''(x)$ της κατανεμημένης κάθετης φορτίσεως $p(x)$. Ποια είναι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης:

$$EIv''''(x) = p^*(x),$$

τόσο με τέσσερις ολοκληρώσεις όσο και (πολύ καλύτερα) με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και τελικά συνελκτικού ολοκληρώματος; (γ) Ασφαλώς ας σημειωθεί ότι η θεωρία του Timoshenko μεταπίπτει σ' αυτήν των Euler-Bernoulli, αν θεωρηθεί άπειρο το μέτρο διατμήσεως (ή ολισθήσεως) G του ισότροπου ελαστικού υλικού της δοκού ($G \rightarrow \infty$). Ας σημειωθεί επίσης ότι πάρα πολύ συχνά στην πράξη ο Πολιτικός Μηχανικός αγνοεί, δε λαμβάνει υπόψη του την επιρροή της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ πάνω στην παραμόρφωση της δοκού που κάμπτεται. Περιορίζεται έτσι στη θεωρία της δοκού των Euler-Bernoulli (περίπου 1750 μ.Χ.) αντί για την πολύ ακριβέστερη θεωρία της δοκού του Timoshenko (1921 μ.Χ.).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Κ2 ([X και Y] Διαφορικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμός Laplace, Ωστική Συνάρτηση δέλτα του Dirac. Ταλαντώσεις: Μηχανικά Συστήματα: Σύστημα Μάζας-Ελατηρίου, Συνάρτηση Μεταφοράς, Ωστική Απόκριση, Συνέλιξη, Ολοκλήρωμα Duhamel): Θεωρούμε το γνωστό μηχανικό σύστημα (m, k) μάζας-ελατηρίου (με m τη μάζα και k τη σταθερά του ελατηρίου) με το ένα άκρο του ελατηρίου ακίνητο, ενώ στο άλλο άκρο είναι στερεωμένη η μάζα m . Η γνωστή μας σχετική διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

με $u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του και $p(t)$ την εξωτερική δύναμη (τη φόρτιση) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο (κατά τη διεύθυνση της επιμηκύνσεως του ελατηρίου). Επομένως η ταλάντωση έχει θεωρηθεί χωρίς απόσβεση και εξαναγκασμένη λόγω της εξωτερικής δυνάμεως (της φορτίσεως) $p(t)$. Ζητούνται: (α) [X] Πώς προέκυψε η παραπάνω γραμμική διαφορική εξίσωση; Τι χαρακτηρισμούς μπορούμε να κάνουμε γι' αυτήν; (β) [X] Η αναγωγή της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς το μετασχηματισμό Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$ υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$u(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = 0.$$

(γ) [X] Η εφαρμογή στην ειδική περίπτωση ωστικής δυνάμεως (ωθήσεως)

$$p(t) = \Omega \delta(t)$$

τη χρονική στιγμή $t = 0$ με $\delta(t)$ την ωστική συνάρτηση (ή κρουστική συνάρτηση) δέλτα του Dirac. Ποιος είναι τώρα ο μετασχηματισμός Laplace $U(s)$ της λύσεως $u(t)$; (δ) [X] Η σχετική συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ (ή $H(s)$); Η αντίστοιχη ωστική απόκριση $g(t)$ (ή $h(t)$) με

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\};$$

(ε) [X] Η λύση $u(t)$ του συγκεκριμένου προβλήματος (μηδενικών) αρχικών τιμών; Η (κυκλική) ιδιοσυχνότητα (φυσική κυκλική συχνότητα) ω_0 του παρόντος μηχανικού συστήματος; Η αντίστοιχη ιδιοπερίοδος T ; (στ) [Y] Η εύρεση των ίδιων αποτελεσμάτων (και πάλι με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace) με τη βοήθεια της *Mathematica*. **Υπόδειξη:** Μπορούν, π.χ., να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες ανεξάρτητες εντολές ή παραλλαγές τους:

```
de = m u''[t] + k u[t] == Ω DiracDelta[t];
con = {u[0] -> 0, u'[0] -> 0};
lp = LaplaceTransform[de, t, s] /. con /. LaplaceTransform[u[t], t, s] -> U[s] // Simplify
sol = Solve[lp, U[s]]
G[s_] = sol[[1, 1, 2, 1]]
g[t_] = InverseLaplaceTransform[G[s], s, t]
us[t_] = InverseLaplaceTransform[sol[[1, 1, 2]], s, t]
```

Σε τι χρησιμεύει η καθεμία από τις εντολές αυτές; (ζ) [X ή Y] Συμφωνούν τα αποτελέσματα με το χέρι [X] και με τον υπολογιστή [Y] που βρέθηκαν στα προηγούμενα δύο ερωτήματα; (η) [X] Σε περίπτωση τυχαίας δυνάμεως $p(t)$ που εφαρμόζεται πάνω στο υλικό σημείο στην παρούσα εξαναγκασμένη ταλάντωση ποια είναι η σχετική απόκριση $u_p(t)$ με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνελίξεως ή (σχεδόν ισοδύναμα) με τη χρήση της ωστικής (ή κρουστικής) αποκρίσεως $g(t)$, η οποία έχει ήδη προσδιορισθεί; Πώς καλείται το σχετικό ολοκλήρωμα;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Κ3 ([X και Y] *Δυναμοσειρές, Ταλαντώσεις*): Θεωρούμε πάλι την εξαιρετικά απλή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως de του αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

σε συνηθισμένο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου (m, k) με m τη μάζα και k τη σταθερά του ελατηρίου, όπου t δηλώνει το χρόνο και $u(t)$ τη μετατόπιση της μάζας m ως προς τη θέση ισορροπίας της. Ζητούνται: (α) [X] Από ποιον ακριβώς τύπο έχει προσδιορισθεί η σταθερά ω_0 ; Πώς αποδεικνύεται ο τύπος αυτός με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα; (β) [X] Ποια είναι η γενική λύση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο των δυναμοσειρών; Συμφωνεί η λύση αυτή με την πιο άμεση λύση που βασίζεται στη χαρακτηριστική εξίσωση και στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις; (Εντούτοις η μέθοδος των δυναμοσειρών είναι γενικότερη, ισχύει και για διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές!) (γ) [Y] Πώς μπορεί να γραφεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση de στη *Mathematica*; (**Υπόδειξη**: Το σύμβολο ω γράφεται με Esc Λατινικό ο Esc.)

Θα προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση αυτής της διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο των δυναμοσειρών (γύρω από το ομαλό σημείο $t = 0$, γιατί ομαλό;) χρησιμοποιώντας τη *Mathematica* με όρους μέχρι και t^{20} . Η προσεγγιστική αυτή λύση της μορφής

$$u_s(t) \approx \sum_{k=0}^{20} a_k t^k$$

μπορεί να γραφεί στη *Mathematica* σαν

```
us[t_] = Sum[a[k] t^k, {k, 0, 20}]
```

(δ) [Y] Ποιες είναι οι εκφράσεις της πρώτης και της δεύτερης παραγωγού της συναρτήσεως $u_s(t)$; Επομένως ποια προσεγγιστική μορφή δυναμοσειράς des παίρνει τώρα (χωρίς πια παραγωγούς) η διαφορική εξίσωση de; **Υπόδειξη**: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
des = de /. u -> us
```

(ε) [Y] Θέλουμε τώρα να μηδενίσουμε όλους τους συντελεστές των δυνάμεων t^k της ανεξάρτητης μεταβλητής t (για $k = 0, 1, \dots, 20$). **Υπόδειξη**: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
{eq[0] = des /. t -> 0, Table[eq[k] = Coefficient[des[[1]], t^k] == 0, {k, 1, 20}]}
```

για τις σχετικές εξισώσεις eq (οι διπλές αγκύλες με ακολουθίες Esc, δηλαδή Esc [[Esc και Esc]] Esc). Το επόμενο βήμα μας είναι ασφαλώς αφήνοντας τις δύο πρώτες σταθερές a_0 και a_1 αυθαίρετες (βέβαια άμεσα προσδιορίσιμες από τις αρχικές συνθήκες), να προσδιορίσουμε με βάση αυτές τις δύο σταθερές όλες τις επόμενες σταθερές a_k (με $k \geq 2$). Για το σκοπό αυτό λύνουμε πολύ εύκολα τις πιο πάνω εξισώσεις με τη χρήση της εντολής Solve. **Υπόδειξη**: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
tb = Table[s[k] = Solve[eq[k], a[k+2]][[1]], {k, 0, 18}]
```

Έχοντας τώρα διαθέσιμες τις εκφράσεις των σταθερών αυτών a_k , τις αντικαθιστούμε στην αρχική δυναμοσειρά μας $u_s(t)$. Προσδιορίζουμε έτσι την τελική έκφραση της λύσεως $u_g(t)$ (προσεγγιστική γενική λύση της διαφορικής εξίσωσής μας de), π.χ. μέσω της εντολής

```
uf[t_] = us[t] /. s[18] /. s[17] /. s[16] /. s[15] /. s[14] /. s[13] /. s[12] /. s[11]
/. s[10] /. s[9] /. s[8] /. s[7] /. s[6] /. s[5] /. s[4] /. s[3] /. s[2] /. s[1] /. s[0] // Simplify
```

που κάνει τις σχετικές αντικαταστάσεις. Πώς ακριβώς; Ασφαλώς η πιο κάτω συνεπτυγμένη μορφή της πιο πάνω εντολής (με τη χρήση της εντολής Do, σε τι συμβάλλει αυτή;)

```
ug[t_] = us[t]; Do[ug[t_] = ug[t] /. s[k], {k, 18, 0, -1}]
```

(πώς λειτούργησε η εντολή αυτή;) είναι σαφώς προτιμότερη και μας δίνει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα, όπως αμέσως διαπιστώνουμε γράφοντας στη συνέχεια απλά ug[t]. (στ) [Y] Στην παρούσα απλή διαφορική εξίσωση de μπορούμε να ελέγξουμε το αποτέλεσμα που βρέθηκε με την άμεση επίλυση της διαφορικής εξίσωσης de με την εντολή DSolve. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
sol = DSolve[de, u[t], t]
```

(λύση με τριγωνομετρικές συναρτήσεις, συνημίτονο και ημίτονο, στην παρούσα ελεύθερη ταλάντωση του αρμονικού ταλαντωτή) και να βρεθεί το ανάπτυγμα της λύσεως sol που προσδιορίστηκε σε δυναμοσειρά για την εύρεση της αντίστοιχης προσεγγιστικής (με όρους μέχρι και t^{20}) λύσεως $u_h(t)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
uh[t_] = Series[sol[[1, 1, 2]], {t, 0, 20}] // Normal // Simplify
```

(οι διπλές αγκύλες με ακολουθίες Esc, π.χ. Esc [[Esc.]. Επ' ευκαιρία, σε τι έχει «χρησιμεύσει» (εάν έχει χρησιμεύσει, αμφίβολο) η εντολή Normal; (Ζ) [Y] Τελικά διαπιστώνεται ότι οι δυναμοσειρές $u_h(t)$ και $u_g(t)$ συμπίπτουν, αρκεί να σημειωθεί η κάπως διαφορετική έκφραση των δύο αυθαίρετων σταθερών σ' αυτές. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
uh[t] == ug[t] /. {C[1] -> a[0], C[2] -> a[1]/ω} // Simplify
```

Διαπιστώνεται πράγματι η σύμπτωση αυτή; (η) [Y] Απολύτως ανάλογα μπορούμε να πάρουμε τις δυναμοσειρές s2 των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos \omega t$ και $\sin \omega t$ που εμφανίζονται (με τη χρήση και πάλι των εντολών Series και Normal) και να ελέγξουμε εάν μπορεί ή όχι να προκύψει από αυτές η συνάρτηση $u_h(t)$. Πιθανώς αυτό μπορεί να γίνει μέσω της εντολής

```
uh[t] == C[1] s2[[1]] + C[2] s2[[2]] // Simplify
```

(οι διπλές αγκύλες με δύο ακολουθίες Esc: τις ακολουθίες Esc [[Esc για τις διπλές αριστερές αγκύλες και Esc]] Esc για τις διπλές δεξιές αγκύλες αντίστοιχα) ή μιας κατάλληλα τροποποιημένης μορφής της. (**Υπόδειξη:** Πρέπει φυσικά να προκύψει σαν αποτέλεσμα το αποτέλεσμα True.)

ΟΜΑΔΑ EMII-L

ΑΣΚΗΣΗ EMII-L1 ([X] *Μετασχηματισμός Fourier. Ταλαντώσεις, Μονοβάθμια Μηχανικά Συστήματα, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις, Μιγαδική Συνάρτηση Αποκρίσεως*): Εδώ εξετάζουμε το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c (με $c > 0$) είτε με ασθενή (υποκρίσιμη) είτε με ισχυρή (υπερκρίσιμη) απόσβεση. Αυτό το σύστημα διέπεται από την τόσο γνωστή μας συνήθη διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = p(t), \quad t \geq 0,$$

με t το χρόνο, $u = u(t)$ την άγνωστη συνάρτηση (τη μετατόπιση του υλικού σημείου M ως προς τη θέση ισορροπίας του $u = 0$) και $p(t)$ την εξωτερική δύναμη (τη φόρτιση) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M στην παρούσα εξαναγκασμένη (αφού $p(t) \neq 0$) ταλάντωσή του. Χρησιμοποιούμε και τη σταθερά ω_0 (τη φυσική κυκλική συχνότητα ταλαντώσεων του παρόντος μηχανικού συστήματος χωρίς όμως τον αποσβεστήρα) καθώς και το λόγο αποσβέσεως των ταλαντώσεων ξ με

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

Μπορούμε έτσι άμεσα (διαιρώντας με τη μάζα m) να φέρουμε την πιο πάνω συνήθη διαφορική εξίσωση στην τόσο μα τόσο κλασική για τον Πολιτικό Μηχανικό μορφή της

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = p^*(t) \quad \text{με} \quad u = u(t), \quad p^*(t) := \frac{1}{m} p(t) \quad \text{και} \quad t \geq 0.$$

Η νέα συνάρτηση $p^*(t) := p(t)/m$ είναι προφανώς η ανηγμένη στη μάζα m φόρτιση. Ζητούνται:

(α) Σε περίπτωση περιοδικής εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως) $p(t)$ (με περίοδο T) ποια είναι η σχετική με τη δύναμη αυτή $p(t)$ τριγωνομετρική σειρά Fourier; Ποιοι τύποι δίνουν τους συντελεστές της a_n και b_n ; Ποια είναι η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier για τη μερική (ή ειδική) λύση $u(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης; Ποιοι τύποι δίνουν τους συντελεστές της; Για ποιο λόγο συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός αγνοεί στην πράξη τη γενική λύση $u_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης; Σε ποιες περιπτώσεις δεν πρέπει να την αγνοεί;

(β) Η επίλυση του προηγούμενου ερωτήματος με τη χρήση μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier. Συμφωνούν τελικά τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος και του παρόντος;

(γ) Σε περίπτωση μη περιοδικής εξωτερικής δυνάμεως $p(t)$ (χωρίς περίοδο T) η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier για την αναγωγή της πιο πάνω γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς το μετασχηματισμό Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (Στην εξίσωση αυτή υπεισέρχεται βέβαια και ο μετασχηματισμός Fourier $P(\omega)$ της εξωτερικής δυνάμεως $p(t)$.) Ποια είναι η λύση $U(\omega)$ της πρωτοβάθμιας αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει; Πώς ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως (στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας ω) $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$), αν δεν υπάρχει κανένας κίνδυνος συγχύσεως με τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(t)$, εδώ όμως υπάρχει στο επόμενο ερώτημα!) και πώς υπεισέρχεται στη λύση που προαναφέρθηκε; Επομένως ποια είναι η μερική λύση $u(t)$ της πιο πάνω συνήθους διαφορικής εξίσωσης με τη χρήση του ολοκληρωτικού τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier;

(δ) Τι ισχύει στην ειδική περίπτωση της εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως) $p(t) = \delta(t)$ με $\delta(t)$ τη γνωστή ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac; Στην περίπτωση που $p(t) = H(t)$ με $H(t)$ τη βηματική συνάρτηση του Heaviside; Τέλος πώς ακριβώς σχετίζεται η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ με την ωστική απόκριση $g(t)$ του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-L2: ([Y] Σειρές Fourier. Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Πολιτικός Μηχανικός υποτίθεται ότι πρόκειται να επιλύσει πρόβλημα αμφιέριστης συνήθους δοκού (άρθρωση αριστερά και κύλιση δεξιά ή αντίστροφα) μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) υπό πεπερασμένη κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ (σε kN/m) με τη χρήση σειρών Fourier. Αν και καταρχήν κάθε σειρά Fourier (πλήρης τριγωνομετρική, εκθετική, συνημιτονική ή ημιτονική) είναι κατάλληλη, εντούτοις κατά τη γνώμη σας ποια από αυτές ταιριάζει περισσότερο στο συγκεκριμένο πρόβλημα; (με λεπτομέρειες!)

ΑΣΚΗΣΗ EMII-L3 ([X και Y] Σειρές Fourier, Φόρτιση Δοκού): Θεωρούμε δοκό Δ μήκους $L = 2\pi$ (η θέση x στο διάστημα $[-\pi, \pi]$) υπό κάθετη φόρτιση $p(x)$ (σε kN/m) που δίνεται από τον τύπο

$$p(x) = p_0 \operatorname{sgn} x \quad \text{με} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

με sgn το πρόσημο, sign , το συν 1 ή το πλην 1, στη *Mathematica* εντολή *Sign* ενός αριθμού και με το p_0 μια θετική σταθερά. Ζητούνται: (α) [Y] Να σχεδιασθεί η πιο πάνω συνάρτηση $p(x)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ σε ανηγμένη μορφή, δηλαδή η συνάρτηση $p(x)/p_0$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή *Plot*. (β) [X και Y] Να υπολογισθούν οι συντελεστές a_n και b_n για τη σχετική πλήρη σειρά Fourier (για n μέχρι και 15) υποχρεωτικά με τον υπολογισμό των σχετικών ολοκληρωμάτων τόσο με το χέρι [X] όσο και με τον υπολογιστή [Y]. **Υπόδειξη:** [Y] Να χρησιμοποιηθεί η εντολή *Table* και να δημιουργηθούν δύο λίστες συντελεστών: οι A και B . (γ) [X ή Y] Τι παρατηρείται για τους συντελεστές a_n ; Γιατί είναι όλοι μηδενικοί; (Ζητούνται τόσο η μαθηματική εξήγηση όσο και απλή φυσική εξήγηση.) (δ) [X και Y] Τελικά ποια ακριβώς είναι η προσεγγιστική σειρά Fourier $p_{15}(x)$

(με όρους μέχρι και $n = 15$) της παραπάνω φορτίσεως $p(x)$ της δοκού Δ στην πιο απλή μορφή της τόσο με το χέρι [X] όσο και με τον υπολογιστή [Y]; **Υπόδειξη:** [Y] Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$pf[x_] = \text{Sum}[B[[n]] \text{Sin}[n x], \{n, 1, 15\}]$$

τόσο σε κλειστή μορφή όσο και αριθμητικά. (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή N.) Τι παρατηρείται για τη σύγκλιση αυτής της σειράς Fourier; Είναι γρήγορη, μέτριας ταχύτητας συγκλίσεως ή αργή; Γιατί άραγε; (ε) Να σχεδιασθούν (στο ίδιο σχήμα) τόσο η αληθινή φόρτιση $p(x)$ της δοκού Δ όσο και η προσέγγισή της $p_{15}(x)$ σε ανηγμένη μορφή φυσικά. Πού παρατηρούνται οι μεγαλύτερες αποκλίσεις, δηλαδή το μεγαλύτερο σφάλμα $\varepsilon_{15}(x) = p(x) - p_{15}(x)$; (στ) Τι παρατηρείται ως προς τη συνέχεια των συναρτήσεων $p(x)$ και $p_{15}(x)$ στο μέσον $x = 0$ της δοκού; (ζ) Παραπέρα από την παραπάνω προσεγγιστική σειρά Fourier $p_{15}(x)$ ζητείται να διαπιστωθεί με κατάλληλη αντικατάσταση (συγκεκριμένα για $x = \pi/2$) ότι μια πρώτη ρητή προσέγγιση του αριθμού π είναι η προσέγγιση $\pi \approx 135904/45045 \approx 3.01707$. Γιατί άραγε η προσέγγιση αυτή είναι τόσο κακή; (η) Ακολουθώς τι έχετε παρατηρήσει για τη σειρά Fourier που βρέθηκε για $n = 15$; Παρουσιάζεται ή όχι το φαινόμενο Gibbs και πού; (θ) Τέλος ζητείται να ελεγχθεί η ισχύς της ταυτότητας του Parseval (προσεγγιστικά για $n = 15$ και πάλι).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-L4 (IX και Y) Σειρές Fourier, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Δοκοί): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα μιας επιμήκους ορθογωνικής περιοχής $R = [-L, L] \times [-h, h]$ στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών (βλ., π.χ., Timoshenko, S. P. and Young J. N., *Theory of Elasticity*, 3rd edition. McGraw-Hill, New York, 1970, σσ. 53–61) υπό κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ κατά μήκος του άξονα Ox στην κάτω πλευρά του ορθογωνίου R . Για την επίλυση του προβλήματος αυτού και τον υπολογισμό όλων των συνιστωσών σ_{ij} του τανυστή των τάσεων σ είναι σκόπιμο η φόρτιση $p(x)$ να αναλυθεί σε σειρά Fourier. Σαν ειδική περίπτωση θεωρούμε εκείνη όπου η φόρτιση αυτή είναι σταθερή, ίση με p στο διάστημα $[-d, d]$ (με $0 < d < L$) και μηδέν έξω από το διάστημα αυτό. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται σε δοκό με στήριξη στο διάστημα $[-d, d]$ τόσο στο απλό πιο πάνω πρόβλημα όσο και στο πρόβλημα της προσεγγιστικά περιοδικής στηρίξεως της δοκού, π.χ. σε μια γέφυρα με περιοδικά τοποθετημένες στηρίξεις. Ζητούνται:

(α) Ο υπολογισμός των συντελεστών Fourier a_n (με $n = 0, 1, 2, \dots$) στο πιο πάνω πρόβλημα και η επαλήθευση ότι οι συντελεστές b_n είναι μηδενικοί. (Θεωρητικά μιλώντας, γιατί είναι μηδενικοί;) **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Integrate. Πρέπει τελικά να προκύψουν οι εκφράσεις

$$a_0 = \frac{pd}{L} \quad \text{και} \quad a_n = \frac{2p}{n\pi} \sin \frac{n\pi d}{L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots$$

(β) Ποιες είναι οι τιμές των συντελεστών a_n (για $n = 0, 1, \dots, 10$) στην ειδική περίπτωση όπου $p = 10 \text{ kN/m}$, $d = 6 \text{ m}$ και $L = 10 \text{ m}$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν η εντολές Table και N.

(γ) Να γραφεί συνάρτηση για το μερικό άθροισμα $S_m(x)$ της σειράς Fourier που προαναφέρθηκε με m όρους. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Sum.

(δ) Ποια είναι η αριθμητική έκφραση του αθροίσματος αυτού για $m = 9$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και πάλι η εντολή N.

(ε) Τελικά ζητείται να σχεδιασθούν (στην ίδια γραφική παράσταση) και τα τέσσερα αθροίσματα $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_9(x)$ και $S_{27}(x)$ σε όλο το μήκος της δοκού (για $L = 10$ φυσικά) και στον άξονα Oy στο διάστημα $[-2, 14]$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Plot και μέσα στην εντολή αυτή η προαιρετική επιλογή PlotRange. Τι παρατηρούμε από τη σχεδίαση αυτή; Φαίνεται να είναι ακριβής ή όχι; Παρουσιάζεται το φαινόμενο Gibbs ή όχι; Επ' ευκαιρία σε τι αφορά το φαινόμενο Gibbs;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-L5 (IX και Y) Σειρές Fourier. Ταλαντώσεις: Μονοβάθμια Μηχανικά Συστήματα, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις): Θεωρούμε την κλασική διαφορική εξίσωση της κινήσεως (εν προκειμένω των ταλαντώσεων) υλικού σημείου M στη μία διάσταση (κατά μήκος του άξονα Ox)

στο κλασικό μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t), \quad (1)$$

όπου m είναι η μάζα, c ο συντελεστής αποσβέσεως, k η σταθερά του ελατηρίου (το οποίο έλκει το υλικό σημείο M προς την αρχή των συντεταγμένων $u = 0$) και $p(t)$ η εξωτερική δύναμη (φόρτιση) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M . Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση που $m = 2$, $c = 3$ και $k = 98$ (στις συνήθεις μονάδες). Τότε η πιο πάνω διαφορική εξίσωση παίρνει την εξής μορφή:

$$2\ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + 98u(t) = p(t). \quad (2)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η εξωτερική δύναμη (φόρτιση) $p(t)$ που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M έχει την εξής έκφραση:

$$p(t) = \begin{cases} 2t + \pi, & \text{εάν } -\pi \leq t \leq 0, \\ -2t + \pi, & \text{εάν } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases} \quad (3)$$

Επίσης ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π , δηλαδή με $p(t + 2k\pi) = p(t)$ για ακέραιες τιμές του k .

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Sign για το πρόσημο ενός αριθμού. Πιο συγκεκριμένα να δηλωθεί η πιο πάνω συνάρτηση $p(t)$ ως εξής:

$$p[t_] := -2 t \text{ Sign}[t] + \pi$$

(Το π με Esc p Esc, παρακαλώ, ή απλά με π από το Ελληνικό πληκτρολόγιο.)

Η παρούσα άσκηση μπορεί να λυθεί και το χέρι [X] και με τον υπολογιστή [Y] με σύγκριση μάλιστα των αποτελεσμάτων. Επίσης σε πολλά από τα παρακάτω ερωτήματα υπάρχουν και υποδείξεις για τη λύση της με τη χρήση της *Mathematica*.

Καταρχήν ποια είναι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $p(t)$ μέσα στο διάστημα $[-\pi, \pi]$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Plot. Στη συνέχεια ζητείται ο υπολογισμός των συντελεστών a_n και b_n της σειράς Fourier της συναρτήσεως $p(t)$ στο χρονικό διάστημα $[-\pi, \pi]$ με βάση τους γνωστούς τύπους

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin nt dt \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Τι παρατηρείται για τους συντελεστές b_n ; (Η απάντηση μέσα στο notebook παρακαλώ με Alt 7 ή με Format -> Style -> Text), αν είναι δυνατόν.) **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή απλοποίησης Simplify. Άρα πώς μπορούν να απλοποιηθούν οι τύποι για τους συντελεστές a_0 και a_n (με $n = 1, 2, \dots$); Σύμφωνα με αυτά ζητείται τώρα να υπολογισθούν οι συντελεστές a_0 και a_n με τον αρχικό (πιο πάνω) ή τον απλοποιημένο σχετικό τύπο. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Integrate, πιο συγκεκριμένα (για τους συντελεστές a_n με $n = 1, 2, \dots$),

$$a[n_] = (2/\text{Pi}) \text{ Integrate}[p[t] \text{ Cos}[n t], \{t, 0, \text{Pi}\}]$$

Παραπέρα, εάν χρειάζεται, να γίνει και απλοποίηση του αποτελέσματος που βρέθηκε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Simplify. Ποιες είναι οι τιμές των συντελεστών a_n για $n = 1, 2, \dots, 15$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{Ac} = \text{Table}[a[n], \{n, 1, 15\}]$$

Ποιες είναι τώρα οι αριθμητικές τιμές των πιο πάνω συντελεστών; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή N, δηλαδή N[Ac]. Άρα ποια είναι η προσεγγιστική έκφραση $p_{15}(t)$ της δυνάμεως $p(t)$, η οποία ασκείται (συγκεκριμένα $p_{15}(t) \approx p(t)$) με όρους μέχρι και δέκατης πέμπτης τάξεως: $\cos 15t$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$p_{15} = \text{Sum}[a[n] \text{ Cos}[n t], \{n, 0, 15\}]$$

Παρατήρηση: Υπενθυμίζεται ότι σαν σύμβολο του πολλαπλασιασμού στη *Mathematica* συνιστάται να χρησιμοποιείται το κενό (space). Μπορεί όμως να χρησιμοποιείται και το αστεράκι (*).

Ακολουθως ζητείται η γραφή του ομογενούς μέρους de της διαφορικής εξίσωσης (2) υπό τις παρούσες συνθήκες. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$de = 2 un''[t] + 3 un'[t] + 98 un[t] == 0$$

Ποια είναι η λύση αυτής της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `DSolve`, δηλαδή

$$sol1 = DSolve[de, un[t], t]$$

Ποια είναι η αριθμητική έκφραση της ίδιας λύσεως; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `N` (φυσικά με το κατάλληλο όρισμα). Τι παρατηρείται ως προς το αποτέλεσμα της αποσβέσεως που υπάρχει; Είναι λογικό αυτό; Στη συνέχεια θα εξετασθεί μόνο η μερική λύση (ή ειδική λύση) της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και θα αγνοηθεί η γενική λύση του ομογενούς μέρους της, το οποίο αφορά στο μεταβατικό φαινόμενο). Είναι επιτρεπτό αυτό; Πότε ναι και πότε όχι;

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τη σειρά Fourier της συναρτήσεως $p(t)$ όρο προς όρο στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (2). (Σημειώνεται ότι υπάρχουν μόνο συνημιτονικοί όροι $a_n \cos nt$.) Δεχόμαστε σχετική μερική (ή ειδική) λύση της αντίστοιχης μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$2\ddot{u}_n(t) + 3\dot{u}_n(t) + 98u_n(t) = a_n \cos nt \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

της μορφής

$$u_p(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt. \quad (6)$$

Απαιτείται στ' αλήθεια και ο ημιτονικός όρος $B_n \sin nt$; Γιατί; (Η απάντηση μέσα στο notebook με `Alt 7` ή με `Format -> Style -> Text`). Ποια τελική έκφραση έχουμε επομένως για τον υπολογισμό των προσδιοριστέων συντελεστών A_n και B_n της μερικής (ή ειδικής) λύσεως $u_p(t)$ της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, όπου η εξωτερική δύναμη (η φόρτιση) $p(t)$ στο δεξιό μέλος αναλύθηκε ήδη σε σειρά Fourier, συνημιτονική εν προκειμένω. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$up[t_] = An Cos[n t] + Bn Sin[n t]$$

και παραπέρα η εντολή

$$eqn = Simplify[de == 2 up''[t] + 3 up'[t] + 98 up[t] == an Cos[n t]]$$

Απομένει να βρεθούν οι συντελεστές A_n και B_n , ώστε τόσο ο συνολικός συνημιτονικός όσο και ο συνολικός ημιτονικός συντελεστής να είναι ίσοι με μηδέν. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$sol2 = Simplify[Solve[{eqn /. Cos[n t] -> 0, eqn /. Sin[n t] -> 0, {An, Bn}}]]$$

Από το σχετικό αποτέλεσμα παρατηρούμε τις εκφράσεις για τους συντελεστές A_n και B_n στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών για διαφορικές εξισώσεις. Το εύρος C_n για κάθε κυκλική συχνότητα δίνεται προφανώς από τον τύπο

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά τους συντελεστές αυτούς C_n , π.χ. τους 15 πρώτους συντελεστές. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$Cn = Table[Sqrt[An^2 + Bn^2] /. sol2, {n, 1, 15}]$$

(**Παρατήρηση:** Η εντολή `/.sol2` υποδηλώνει τις αντικαταστάσεις που αναφέρονται στην έκφραση `sol2`.) Επομένως τώρα μπορεί να βρεθεί η γενική έκφραση της μερικής (ή ειδικής) λύσεως $u_n(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (5). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$f = Simplify[(An /. sol2) Cos[n t] + (Bn /. sol2) Sin[n t]]$$

Τώρα πια μπορούμε να πάρουμε και τις συγκεκριμένες εκφράσεις των συναρτήσεων $u_n(t)$.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\{u1 = f /. n \rightarrow 1 // N, u2 = f /. n \rightarrow 2 // N, u3 = f /. n \rightarrow 3 // N, u4 = f /. n \rightarrow 4 // N, \\ u5 = f /. n \rightarrow 5 // N, u6 = f /. n \rightarrow 6 // N\}$$

Μπορεί να γραφεί απλούστερα η πιο πάνω εντολή;

Η τελική απόκριση $u(t)$ του μηχανικού συστήματός μας έχει επομένως βρεθεί προσεγγιστικά. Παραδείγματος χάρη, με όρους μέχρι και έκτης τάξεως μέσω της εντολής

$$\text{response} = \text{Simplify}[u1 + u2 + u3 + u4 + u5 + u6]$$

(Πώς μπορεί να γραφεί απλούστερα η ίδια εντολή;)

[Y] Απομένει η σχεδίαση του αποτελέσματος αυτού. Θα χρησιμοποιήσουμε το διάστημα $[-3\pi, 3\pi]$. Ζητείται η σχεδίαση της αποκρίσεως (μετατοπίσεως κατά μήκος του άξονα Ou) $u(t)$ (προσεγγιστικά βέβαια). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή σχεδίασεως

$$\text{Plot}[\text{response}, \{t, -3 \text{ Pi}, 3 \text{ Pi}\}]$$

ΟΜΑΔΑ EMII-M

ΑΣΚΗΣΗ EMII-M1 ([X και Y] *Μετασχηματισμός Laplace, Μετασχηματισμός Fourier, Αρμονικός Ταλαντωτής με Ιξώδη Απόσβεση, Συνάρτηση Μεταφοράς, Μιγαδική Συνάρτηση Αποκρίσεως, Πεδία Χρόνου και Συχνότητας*): (α) Για μια συνάρτηση $u(t)$ ζητούνται (με τη χρήση των δύο εντολών LaplaceTransform και FourierTransform) οι μετασχηματισμοί Laplace και Fourier της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της $\dot{u}(t)$ και $\ddot{u}(t)$ αντίστοιχα. Τι παρατηρείται; (β) Θεωρούμε την κλασική συνήθη διαφορική εξίσωση de του αρμονικού ταλαντωτή με ιξώδη απόσβεση (σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

(με t το χρόνο). Τι παριστάνουν οι θετικές σταθερές m , c και k στο αριστερό μέλος; Η άγνωστη συνάρτηση $u(t)$; Η γνωστή συνάρτηση $p(t)$ στο δεξιό μέλος; (γ) Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς $G_L(s) = 1/Z_L(s)$ του μηχανικού αυτού συστήματος. Επομένως για μετασχηματισμό Laplace $P_L(s)$ της γνωστής συναρτήσεως $p(t)$ (της εξωτερικής δυνάμεως, της φορτίσεως) ποιος είναι ο μετασχηματισμός Laplace $U_L(s)$ της αποκρίσεως (response) του μηχανικού συστήματος με γνωστές αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$; (δ) Τώρα με εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier (δυστυχώς όχι αυτόματα στη Mathematica) ζητείται να υπολογισθεί η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G_F(\omega) = 1/Z_F(\omega)$ του ίδιου μηχανικού συστήματος, που είναι βέβαια συνάρτηση του ω στο πεδίο της συχνότητας ω , ασφαλώς όχι στο πεδίο του χρόνου t . Επομένως για μετασχηματισμό Fourier $P_F(\omega)$ της γνωστής συναρτήσεως $p(t)$ ποιος είναι ο μετασχηματισμός Fourier $U_F(\omega)$ της αποκρίσεως (response) του μηχανικού συστήματος; Απαιτούνται αρχικές συνθήκες και στο μετασχηματισμό Fourier; Γιατί αυτή η διαφορά από το μετασχηματισμό Laplace; (ε) Να συγκριθούν οι χρήσεις των μετασχηματισμών Laplace και Fourier στην παρούσα εφαρμογή σε κλασικά μηχανικά συστήματα ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-M2 ([Y] *Μηχανική των Υλικών: Δοκοί*): Εδώ εξετάζουμε πρόβολο μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI υπό σταθερή φόρτιση p_0 . Άγνωστη συνάρτηση είναι εδώ το βέλος κάμψεως $v(x)$. Ζητούνται: (1) Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως beam de και (2) οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες bcs. (3) Όλες μαζί οι εξισώσεις αυτές eqs. (4) Η λύση τους sol και (5) η σχετική συνάρτηση $v_s(x)$ (με απλοποίηση). (6) Η επαλήθευση της λύσεως sol και η έξοδος (output) της σχετικής εντολής. (7) Σε λίστα οι συναρτήσεις για τη γωνία στροφής $\theta(x)$, την καμπτική ροπή $M(x)$ και την τέμνουσα (διατμητική) δύναμη $Q(x)$ (με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Μ3 (IY Ταλαντώσεις): Εδώ θεωρούμε μονοβάθμιο αρμονικό ταλαντωτή υλικού σημείου-ελατηρίου ιδιοσυχνότητας ω_0 χωρίς απόσβεση και σε εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$. Ζητούνται: (8) Η σχετική διαφορική εξίσωση vde και η (9) δήλωση με το σύμβολο ics των αρχικών συνθηκών $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ σε μορφή δηλώσεων τιμών (όχι εξισώσεων!). Θεωρούμε τώρα τις έξι εξωτερικές φορτίσεις

$$p_1(t) = p_0 \cos \omega_0 t, \quad p_2(t) = p_0 \sin(\omega_0 t - \alpha), \quad p_3(t) = p_0 e^{i\omega t},$$

$$p_4(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3, \quad p_5(t) = p_0 t \cos \omega t \quad \text{και} \quad p_6(t) = p_0 t \cos \omega_0 t$$

(με $\omega \neq \omega_0$). Ζητούνται απλά οι υποθέσεις (10) $u_{p1}(t)$, (11) $u_{p2}(t)$, (12) $u_{p3}(t)$, (13) $u_{p4}(t)$, (14) $u_{p5}(t)$ και (15) $u_{p6}(t)$ που πρέπει να γίνουν για τις αντίστοιχες μερικές (ή ειδικές) λύσεις $u_p(t)$ σύμφωνα με τη γνωστή μας μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. (16) Σε σχόλιο comment1 ποιες άλλες μέθοδοι θα μπορούσαν να εφαρμοσθούν; Στη συνέχεια ζητούνται επίσης: (17) ο μετασχηματισμός Laplace lt της διαφορικής εξίσωσης vde, (18) η λύση sol της αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει, (19) ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ilt, (20) η συνάρτηση $u_s(t)$ για τη λύση του προβλήματος αυτού, (21) η επαλήθευση ver1 των αρχικών συνθηκών και (22) ver2 της διαφορικής εξίσωσης (με απλοποίηση). Από την παραπάνω λύση $u_s(t)$ ζητούνται μετά οι λύσεις (23) για $p(t) = p_0$, (24) για $p(t) = p_0 e^{-ct}$ και (25) για $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ (και οι τρεις με απλοποιήσεις).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Μ4 (IY Μετασχηματισμός Laplace): Θεωρούμε το γνωστό μετασχηματισμό Laplace. Ζητούνται: (26) Η δήλωση της εντολής υπολογισμού του στη Mathematica με το σύμβολο L αντί για το σύμβολο LaplaceTransform. (Από 'δώ και πέρα ζητείται η συνεχής χρήση του συμβόλου αυτού L.) (27) Λίστα με δύο στοιχεία: (i) τη φράση «Γραμμική ιδιότητα» και την ιδιότητα αυτή, ώστε να προκύψει αποτέλεσμα True (αληθής). Ανάλογα για το μετασχηματισμό Laplace (28) της δευτέρας παραγωγού και (29) της τετάρτης παραγωγού επαρκώς παραγωγίσιμης συναρτήσεως $u(t)$, (30) του μετασχηματισμού Laplace ολοκληρώματος και (31) του θεωρήματος της συνελίξεως. (32) Πίνακας TableOfDerivatives των δέκα πρώτων παραγωγών παραγωγίσιμης συναρτήσεως $u(t)$ και (33) λίστα με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Μ5 (IY Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων): Θεωρούμε εδώ το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) \quad \text{και} \quad \dot{y}(t) = 4x(t) + 3y(t)$$

με τις αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $y(0) = y_0$. Ζητούνται: Η δήλωση (34) των διαφορικών εξισώσεων με το σύμβολο sde και (35) των αρχικών συνθηκών με το σύμβολο ics. Στη συνέχεια (36) η άμεση λύση sol αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών (με πλήρη απλοποίηση), (37) οι αντίστοιχες συναρτήσεις $x_s(t)$ και $y_s(t)$ σε λίστα και (38) η επαλήθευση ver τόσο των διαφορικών εξισώσεων όσο και των αρχικών συνθηκών (με μία εντολή και απλοποίηση). Μετά (39) να δηλωθούν οι τιμές $x_0 = 3$ και $y_0 = 1$ σαν αντικαταστάσεις με το σύμβολο values και (40) να σχεδιασθεί η αντίστοιχη λύση $x_s(t)$ και $y_s(t)$ με τίτλο «SOLUTION OF THE SYSTEM» και άξονες t και x, y .

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-Μ6 (IY Ταλαντώσεις): Ζητούνται: (41) Να δηλωθεί ο πίνακας των εννέα συναρτήσεων x^{3k} με $k = 0, 1, \dots, 8$ σε λίστα list. (42) Στη συνέχεια με μια σύντομη εντολή να υπολογισθούν (43) το μητρώο Wmat της αντίστοιχης ορίζουσας Wronski W και μετά (44) η ίδια η ορίζουσα Wronski W . Θεωρούμε τώρα τη διαφορική εξίσωση του μονοβάθμιου ταλαντωτή υλικού σημείου-ελατηρίου-αποσβεστήρα με ισχυρή απόσβεση σε ελεύθερες ταλαντώσεις με σταθερές ω_0 και ξ . Ζητούνται: (45) Η δήλωσή της με το σύμβολο vde και (46) των αρχικών συνθηκών $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ (σαν εξισώσεων) με το σύμβολο ics. (47) Η λύση sol του προβλήματος αυτού (με πλήρη απλοποίηση) και (48) η σχετική συνάρτηση $u_s(t)$ με χρήση και του συμβόλου $a_D = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$ (με κατάλληλη αντικατάσταση). Να υπολογισθούν οι δύο συναρτήσεις (49) $u_1(t)$ και (50) $u_2(t)$ που πολλαπλασιάζουν τις αρχικές τιμές u_0 και v_0 αντίστοιχα στη λύση και (51) να αποδειχθεί η γραμμική

ανεξαρτησία τους με χρήση κατάλληλης ορίζουσας W . Τέλος σε σχόλια comment2 και comment3 να γραφούν τα γενικά συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από την ορίζουσα W (52) γενικά και (53) για λύσεις διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-M7 (IY Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε μια συνήθη δοκό μήκους $2a$ ($a > 0$) και δυσκαμψίας EI με κάθετη φόρτιση $p(x)$. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού. Ζητούνται: (54) Η σχετική διαφορική εξίσωση bde. (55) Ο μετασχηματισμός Laplace lt της διαφορικής εξίσωσης bde (χωρίς συνοριακές συνθήκες) και (56) η απλοποιημένη γραφή του $lt1$ με τη χρήση των συμβόλων $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ και $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$. (57) Η λύση sol1 της αλγεβρικής εξίσωσης $lt1$ και (58) η λύση sol της αντίστοιχης εξίσωσης lt . (59) Στη συνέχεια από τη λύση sol το βέλος κάμψεως $v_s(x)$ χωρίς αρχικές συνθήκες και υπό αυθαίρετη φόρτιση $p(x)$. (60) Τώρα η δήλωση subs1 αντικαταστάσεων των αρχικών τιμών $v(0)$, $v'(0)$, $v''(0)$ και $v'''(0)$ με κατάλληλη χρήση γνωστών τιμών v_0 , θ_0 , M_0 και Q_0 για $x = 0$. (61) Σε σχόλιο comment4 τι δηλώνει καθεμιά από τις τέσσερις αυτές τιμές; Σε σχόλια comment5 και comment6 από ποιους απλούς τύπους μπορούν να υπολογισθούν οι ποσότητες (62) M_0 και (63) Q_0 για πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$; (64) Τώρα ζητείται να ξαναγραφεί η λύση $v_s(x)$ σαν $v_{s1}(x)$ με τις αντικαταστάσεις subs1 και τη χρήση και της εντολής Apart και στη συνέχεια (65) να γίνει επαλήθευση ver1 της λύσεως $v_{s1}(x)$ ως προς τη διαφορική εξίσωση bde. (66) Σε λίστα να υπολογισθούν οι τιμές της συναρτήσεως $v_{s1}(x)$ και των τριών πρώτων παραγώγων της για $x = 0$. Θεωρούμε τώρα τη φόρτιση $p(x)$ της δοκού ότι αποτελείται από μια ομοιόμορφη κατανεμημένη φόρτιση p_0 και δύο συγκεντρωμένα φορτία P_1 και P_2 στο μέσον της δοκού και στο δεξιό άκρο της αντίστοιχα. Ζητούνται επίσης: (67) Η δήλωση της ωστικής συναρτήσεως $\delta(x)$ του Dirac με το σύμβολο δ . (68) Η δήλωση της πιο πάνω φορτίσεως της δοκού σαν $p_1(x)$ και (69) η αντίστοιχη μορφή bde1 της διαφορικής εξίσωσης bde. (70) Με το σύμβολο subs2 η δήλωση των αντικαταστάσεων $H(a) \rightarrow 1$, $H(2a) \rightarrow 1$ και $H(x - 2a) \rightarrow 0$ για τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(x)$ ειδικά στο παρόν πρόβλημα δοκού με $0 \leq x \leq 2a$. (71) Ο μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής εξίσωσης bde1 με τις αντικαταστάσεις subs1 και subs2, (72) η λύση sol1 της αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει και (73) το βέλος κάμψεως $v_{s1}(x)$ υπό την παρούσα φόρτιση $p_1(x)$ (με απλοποίηση). (74) Σε δύο σχόλια comment7 και comment8 να εξηγηθεί (75) πού υστερεί η λύση αυτή $v_{s1}(x)$ για μια συγκεκριμένη δοκό (π.χ. για έναν πρόβολο) και (76) τι ακριβώς πρέπει να κάνει ο Πολιτικός Μηχανικός, ώστε να μπορέσει να την αξιοποιήσει;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-M8 (IY Δυναμική των Κατασκευών): Θεωρούμε ένα δώροφο ιδεατό κτίριο διατήσεως. Με τις συνήθεις παραδοχές προκύπτουν οι εξής δύο συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις ως προς τις δύο άγνωστες οριζόντιες μετατοπίσεις των ορόφων $u_1(t)$ και $u_2(t)$:

$$4\ddot{u}_1(t) + 221\omega_0^2 u_1(t) - 125\omega_0^2 u_2(t) = 0 \quad \text{και} \quad 3\ddot{u}_2(t) - 125\omega_0^2 u_1(t) + 125\omega_0^2 u_2(t) = 0.$$

(Το ω_0 είναι γνωστή σταθερά.) Ζητούνται: (77) Η δήλωση του συστήματος αυτών των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σαν bdes. (78) Η δήλωση του συμβόλου $c = \cos(\omega t - \alpha)$. (79) Σε λίστα η δήλωση δύο δοκιμαστικών συναρτήσεων $u_{10}(t)$ και $u_{20}(t)$ για τη χρήση της μεθόδου της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως με βάση το c και (80) η μορφή baes που παίρνει τώρα το σύστημα bdes. (81) Στη συνέχεια από τις εξισώσεις baes η εύρεση των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (82) eq1 και (83) eq2 (με απλοποιήσεις). Τώρα (84) η κατευθείαν γραφή της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων FrequencyEquation1 με τη χρήση ορίζουσας και (85) η λύση της sol (με δεκαδικές προσεγγίσεις). Σε σχόλια comment9 και comment10 (86) πόσες είναι οι λύσεις της εξίσωσης FrequencyEquation1 και (87) πόσες από αυτές είναι δεκτές στο δώροφο κτίριό μας; (88) Αυτές που δεν είναι αποδεκτές για ποιο λόγο απορρίπτονται; (89) Αν γνωρίζαμε τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και δυσκαμψίας \mathbf{K} , να γραφεί πάλι η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων. Σε σχόλια comment11 και comment12 ποιες άλλες μέθοδοι θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν (90) για το ίδιο πρόβλημα και (91) για το κάπως διαφορετικό και πρακτικά πιο ενδιαφέρον πρόβλημα της σεισμικής φορτίσεως του κτιρίου;

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ II: ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕ NOTEBOOKS

Τα δύο προηγούμενα μέρη αυτού του τεύχους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II για Πολιτικούς Μηχανικούς περιελάμβαναν εκφωνήσεις εφαρμοσμένων ασκήσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού χωρίς τις λύσεις τους. Επίσης στο κύριο τεύχος του ίδιου διδακτικού συγγράμματος, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς, πέρα από τη θεωρία έχουν συμπεριληφθεί και πολλές πλήρως λυμένες εφαρμογές της χωρίς όμως τη χρήση του υπολογιστή.

Άρα υπάρχει έλλειψη λυμένων ασκήσεων με τη χρήση του υπολογιστή και εδώ του προγράμματος συμβολικών υπολογισμών (και όχι μόνο ...) *Mathematica* εννοείται πάντοτε στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτή η έλλειψη επιδιώκεται να καλυφθεί στο παρόν μέρος του τεύχους.

Συγκεκριμένα στο μέρος αυτό περιλαμβάνονται οκτώ εκτενείς ομάδες ασκήσεων (με 57 ασκήσεις) που είναι προσανατολισμένες στη λύση τους με τη *Mathematica*. Μετά τις εκφωνήσεις των ασκήσεων ακολουθούν οι λύσεις τους σε notebooks της *Mathematica*, εδώ με χρήση της έκδοσης (version) 4.1 της *Mathematica*, με την πλήρη παράθεση των notebooks αυτών (και εντολών και εξόδων της *Mathematica*) και όχι απλά υποδείξεων. Πρόκειται για πάνω από 700 εντολές της *Mathematica*, που αντιστοιχούν στα ερωτήματα των εκφωνήσεων μαζί με τις σχετικές εξόδους της *Mathematica*. Μερικές από τις εντολές αυτές (όχι όμως πολλές) είναι σχόλια που έχουν σαν στόχο να κατανοηθούν έννοιες του Πολιτικού Μηχανικού. Έτσι κι αλλιώς σχεδόν όλες οι ασκήσεις (για την ακρίβεια οι 55 από τις 57) είναι εφαρμοσμένες στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Με τον τρόπο που περιγράφηκε, στο μέρος αυτό ο Πολιτικός Μηχανικός έχει στη διάθεσή του τις πλήρεις λύσεις με τη *Mathematica* πάρα πολλών εφαρμοσμένων ασκήσεων της επιστήμης του ακριβώς όπως οι λύσεις αυτές προκύπτουν με τη *Mathematica* στα notebooks, δηλαδή χωρίς καμία απολύτως αλλοίωσή τους από το γράφοντα. Η βασική ιδέα είναι να γίνεται η προσπάθεια επιλύσεως των εφαρμοσμένων ασκήσεων από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό στον υπολογιστή και σε περίπτωση δυσκολίας ή για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων που βρίσκονται να ελέγχονται οι απαντήσεις στα notebooks τα οποία ακολουθούν την κάθε ομάδα ασκήσεων.

Εντούτοις πρέπει να ομολογηθεί πως κι η μελέτη των ίδιων των notebooks χωρίς άμεση χρήση του υπολογιστή (ή/και με χρήση του υπολογιστή) έχει κι αυτή αρκετά να προσφέρει στο φοιτητή/στη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό στις γνώσεις του/της στην επιστήμη του/της σε συνδυασμό με τη *Mathematica*. Μετά από μια τέτοια μελέτη θα μπορέσει σίγουρα να αντιμετωπίσει μόνος του/μόνη της τις ίδιες ασκήσεις ή/και άλλες ασκήσεις, όπως τις υπολογιστικές ασκήσεις (με το σύμβολο [Υ]) του προηγούμενου μέρους αυτού του τεύχους, έχοντας αυξημένες εμπειρία και γνώσεις και ασφαλώς με πολύ μεγαλύτερη επιτυχία. Ας μην είμαστε λοιπόν εντελώς αντίθετοι με τη μελέτη των notebooks που επισυνάπτονται στις εκφωνήσεις των ομάδων των ασκήσεων ακόμη και χωρίς την ταυτόχρονη χρήση του υπολογιστή απλά για εξοικείωση με τις μεθόδους που παρουσιάζονται.

Τέλος είναι προφανές, αλλ' ας σημειωθεί, ότι ο φοιτητής/η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός που θα προσπαθήσει να επιλύσει τις παρούσες ομάδες ασκήσεων με τη βοήθεια και των notebooks που τις ακολουθούν θα πρέπει να είναι από πριν εξοικειωμένος/εξοικειωμένη με τη *Mathematica*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-MA

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MA1 (Περιβαλλοντική Μηχανική: Καθαρισμός Νερού): Καταρχήν να γραφεί (1) λίστα δύο εντολών για τη μη εμφάνιση προειδοποιήσεων για πιθανά ορθογραφικά λάθη τύπων spell και spell1. Θεωρούμε τώρα αντιδραστήρα καθαρισμού νερού πλήρους αναμίξεως και ασυνεχούς τροφοδοτήσεως (αντιδραστήρας CMBR) με αποδόμηση πρώτης τάξεως ρύπου A στο νερό με γνωστή σταθερά k του ρυθμού αποδομήσεως του ρύπου A. Άγνωστη είναι η συγκέντρωση $c(t)$ του ρύπου A με αρχική τιμή $c(0) = c_0$. (2) Ζητείται η σχετική διαφορική εξίσωση de . Τώρα εφαρμόζουμε τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard. Ζητούνται: (3) Η αρχική μηδενική προσέγγιση σαν συνάρτηση $c[0, t]$ (το t με παύλα στον ορισμό της). (4) Οι επόμενες δέκα προσεγγίσεις $c[n, t]$ (το t με παύλα στους ορισμούς τους) με χρήση κατάλληλης εντολής (όχι μία-μία συνάρτηση!) και με παραγοντοποίηση. (5) Απλά αναφορά της συναρτήσεως $c_{10}(t)$ που ήδη ορίστηκε και (6) ονομασία της και σαν $c10a[t]$. (7) Η σειρά Maclaurin $c10b[t]$ της εκθετικής συναρτήσεως $c_0 e^{-kt}$ με όρους μέχρι και t^{10} και (8) η τροποποίησή της $c10c[t]$ χωρίς τον 0-όρο της και με παραγοντοποίηση. (9) Τέλος η επαλήθευση ver ότι $c_{10a}(t) = c_{10c}(t)$ (με απλοποίηση) και (10) σχόλιο γιατί συνέβη αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MA2 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών θεωρούμε το ακόλουθο τροποποιημένο πρόβλημα για μια αμφίπακτη συνήθη δοκό. Η αμφίπακτη αυτή δοκός μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI έχει τις συνηθισμένες συνοριακές συνθήκες στο ένα άκρο της $x = 0$. Στο άλλο άκρο της $x = L$ ισχύει μεν η συνοριακή συνθήκη για τη στροφή της, αλλ' η συνοριακή συνθήκη για το βέλος κάμψεως της έχει τροποποιηθεί στη μορφή $v(L) = d$ με το d γνωστή σταθερά. Υπάρχει δηλαδή βέλος κάμψεως στο άκρο $x = L$ της δοκού παρά την πάκτωση λόγω κάθετης στη δοκό μετατόπισεως αυτού του σημείου πακτώσεως $x = L$. Δεν πρόκειται βέβαια για το κλασικό πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού! Πρόκειται όμως για ένα ενδιαφέρον πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού σε περίπτωση μιας κολώνας σε μια κατασκευή που είναι πακτωμένη στο έδαφος στη θέση $x = 0$ και επίσης κατά κάποιον τρόπο «πακτωμένη» και στην οροφή, δηλαδή στην πλάκα του ορόφου πάνω από την κολώνα. Σημειώνεται επίσης ότι δεν υπάρχει κάποια κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ (ή/και συγκεντρωμένα φορτία ή ροπές) πάνω στη δοκό. Η κάμψη της οφείλεται αποκλειστικά στην κάθετη μετατόπιση $v(L) = d$ του άκρου της $x = L$ που προαναφέρθηκε. Εδώ ζητούνται: (11) Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως **BeamDifferentialEquation** ως προς το άγνωστο βέλος κάμψεως $v(x)$ της παρούσας αμφίπακτης δοκού και (12) οι τέσσερις σχετικές συνοριακές συνθήκες **BeamBoundaryConditions**. (13) Η γενική λύση **BeamGeneralSolution** της διαφορικής εξισώσεως **BeamDifferentialEquation** και (14) η σχετική συνάρτηση $v_g(x)$ για το βέλος κάμψεως. (15) Κατευθείαν το σχετικό θεμελιώδες σύστημα (ή θεμελιώδες σύνολο) λύσεων **flist**. (16) Να υπολογισθεί η λίστα **Dflist** των πρώτων παραγώγων των τεσσάρων συναρτήσεων της λίστας **flist**. (17) Να υπολογισθεί η ορίζουσα **Wronski** W για τις τέσσερις συναρτήσεις της λίστας **flist** και (18) σε σχόλιο **comment** να εξηγηθεί γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (19) Να υπολογισθεί το μητρώο **matrix** που αντιστοιχεί στην ορίζουσα **Wronski** W και (20) από αυτό ξανά η ίδια ορίζουσα W . (21) Ποιες είναι όλες μαζί οι εξισώσεις (διαφορική εξίσωση και συνοριακές συνθήκες) **Equations** στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών σε δοκό; (22) Να βρεθεί η λύση **BeamPartialSolution** των εξισώσεων **Equations** και από αυτήν (23) το αντίστοιχο βέλος κάμψεως $v_p(x)$ της δοκού (με παραγοντοποίηση). (24) Να γίνει και η επαλήθευση **Verification** της λύσεως που βρέθηκε ως προς τη διαφορική εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες. (25) Σε λίστα **BeamQuantities** να υπολογισθούν επίσης η στροφή της δοκού $\theta(x)$, η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$ και η τέμνουσα δύναμη $Q(x)$, όλες τους σε απλοποιημένες μορφές. Μετά οι τιμές των $v_p(x)$, $\theta(x)$, $M(x)$ και $Q(x)$ (26) για $x = 0$ και (27) για $x = L$. (28) Να δηλωθούν οι τιμές των σταθερών $EI = 10$, $L = 10$ και $d = 0.1$ (με ίσον) σε λίστα **values**. Για τις τιμές **values** να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις για τις ποσότητες (29) $v(x)$, (30) $\theta(x)$, (31) $M(x)$ και (32) $Q(x)$ με πάχος γραμμής 0.015, κατάλληλους άξονες και κατάλληλο τίτλο, λόγο ύψους προς πλάτος της γραφικής παραστάσεως 0.5, μέγεθος σχήματος 315, γραμματοσειρά Arial στα 12 pt και διαφορετικά χρώματα σε χωριστά σχήματα και τέλος (33) σ' ένα ενιαίο σχήμα και μάλιστα αυτό το σχήμα μέσα σε πλαίσιο.

■ Notebook EMI-MA

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΜΙ-ΜΑ

(ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΙ-ΜΑ1 ΕΩΣ ΕΜΙ-ΜΑ2)

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙ-ΜΑ1 (ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΚΑΘΑΡΙΣΜΟΣ ΝΕΡΟΥ)

ΕΝΤΟΛΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΗ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΠΙΘΑΝΑ ΟΡΘΟΓΡΑΦΙΚΑ ΛΑΘΗ

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

```
In[2]:= de = m c'[t] == -k c[t]
```

```
Out[2]= m c'(t) == -k c(t)
```

ΑΡΧΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΠΟΥ ΥΠΟΤΙΘΕΤΑΙ ΠΩΣ ΕΙΝΑΙ Η ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

```
In[3]:= c[0, t_] = c0;
```

ΟΙ ΕΠΟΜΕΝΕΣ ΔΕΚΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΤΟΥ RICARD

```
In[4]:= Table[c[n, t_] = c0 - k Integrate[c[n - 1, τ], {τ, 0, t}] // Factor, {n, 1, 10}]
```

```
Out[4]= {-c0 (k t - 1),  $\frac{1}{2} c_0 (k^2 t^2 - 2 k t + 2)$ ,  $-\frac{1}{6} c_0 (k^3 t^3 - 3 k^2 t^2 + 6 k t - 6)$ ,  

 $\frac{1}{24} c_0 (k^4 t^4 - 4 k^3 t^3 + 12 k^2 t^2 - 24 k t + 24)$ ,  $-\frac{1}{120} c_0 (k^5 t^5 - 5 k^4 t^4 + 20 k^3 t^3 - 60 k^2 t^2 + 120 k t - 120)$ ,  

 $\frac{1}{720} c_0 (k^6 t^6 - 6 k^5 t^5 + 30 k^4 t^4 - 120 k^3 t^3 + 360 k^2 t^2 - 720 k t + 720)$ ,  

 $\frac{c_0 (k^7 t^7 - 7 k^6 t^6 + 42 k^5 t^5 - 210 k^4 t^4 + 840 k^3 t^3 - 2520 k^2 t^2 + 5040 k t - 5040)}{5040}$ ,  

 $\frac{c_0 (k^8 t^8 - 8 k^7 t^7 + 56 k^6 t^6 - 336 k^5 t^5 + 1680 k^4 t^4 - 6720 k^3 t^3 + 20160 k^2 t^2 - 40320 k t + 40320)}{40320}$ ,  

 $-\frac{1}{362880} (c_0 (k^9 t^9 - 9 k^8 t^8 + 72 k^7 t^7 - 504 k^6 t^6 + 3024 k^5 t^5 - 15120 k^4 t^4 + 60480 k^3 t^3 - 181440 k^2 t^2 + 362880 k t - 362880))$ ,  

 $\frac{1}{3628800} (c_0 (k^{10} t^{10} - 10 k^9 t^9 + 90 k^8 t^8 - 720 k^7 t^7 + 5040 k^6 t^6 - 30240 k^5 t^5 + 151200 k^4 t^4 - 604800 k^3 t^3 + 1814400 k^2 t^2 - 3628800 k t + 3628800))$ }
```

ΑΝΑΦΟΡΑ ΤΗΣ ΔΕΚΑΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ $c_{10}(t)$

```
In[5]:= c[10, t]
```

```
Out[5]=  $\frac{1}{3628800} (c_0 (k^{10} t^{10} - 10 k^9 t^9 + 90 k^8 t^8 - 720 k^7 t^7 + 5040 k^6 t^6 - 30240 k^5 t^5 + 151200 k^4 t^4 - 604800 k^3 t^3 + 1814400 k^2 t^2 - 3628800 k t + 3628800))$ 
```

ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΑΝ ΝΕΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $c_{10a}(t)$

`In[6]:= c10a[t_] = c[10, t]`

`Out[6]=`
$$\frac{1}{3628800} (c_0 (k^{10} t^{10} - 10 k^9 t^9 + 90 k^8 t^8 - 720 k^7 t^7 + 5040 k^6 t^6 - 30240 k^5 t^5 + 151200 k^4 t^4 - 604800 k^3 t^3 + 1814400 k^2 t^2 - 3628800 k t + 3628800))$$

Η ΣΕΙΡΑ MACLAURIN $c_{10b}(t)$ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $c_0 e^{-kt}$ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ t^{10}

`In[7]:= c10b[t_] = Series[c0 Exp[-k t], {t, 0, 10}]`

`Out[7]=`
$$c_0 - c_0 k t + \frac{1}{2} c_0 k^2 t^2 - \frac{1}{6} (c_0 k^3) t^3 + \frac{1}{24} c_0 k^4 t^4 - \frac{1}{120} (c_0 k^5) t^5 + \frac{1}{720} c_0 k^6 t^6 - \frac{(c_0 k^7) t^7}{5040} + \frac{c_0 k^8 t^8}{40320} - \frac{(c_0 k^9) t^9}{362880} + \frac{c_0 k^{10} t^{10}}{3628800} + O(t^{11})$$

ΚΑΙ ΣΕ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ $c_{10c}(t)$ ΧΩΡΙΣ ΤΟΝ Ο-ΟΡΟ ΤΗΣ ΚΑΙ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

`In[8]:= c10c[t_] = c10b[t] // Normal // Factor`

`Out[8]=`
$$\frac{1}{3628800} (c_0 (k^{10} t^{10} - 10 k^9 t^9 + 90 k^8 t^8 - 720 k^7 t^7 + 5040 k^6 t^6 - 30240 k^5 t^5 + 151200 k^4 t^4 - 604800 k^3 t^3 + 1814400 k^2 t^2 - 3628800 k t + 3628800))$$

Η ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΛΥΣΕΩΝ $c_{10c}(t)$ ΚΑΙ $c_{10a}(t)$

`In[9]:= ver = c10c[t] == c10a[t] // Simplify`

`Out[9]= True`

ΚΑΙ ΤΕΛΟΣ ΣΧΟΛΙΟ ΓΙΑΤΙ ΣΥΝΕΒΗ Η ΣΥΜΠΤΩΣΗ ΑΥΤΗ

`In[10]:= comment =`

"Οι δύο συναρτήσεις $c_{10c}(t)$ και $c_{10a}(t)$ συμπίπτουν, επειδή πραγματικά η διαφορική εξίσωση de μαζί με τη σχετική αρχική συνθήκη έχει λύση την εκθετική συνάρτηση $c_0 e^{-kt}$. Η εκθετική αυτή λύση βρίσκεται λίγο-λίγο με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard. Συγκεκριμένα η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard δίνει εδώ, όχι πάντοτε, έναν-έναν τους όρους της σειράς Maclaurin της λύσεως. Φυσικά η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard είναι αρκετά γενική και εφαρμόζεται επίσης και σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει κλειστή λύση ή υπάρχει μεν, αλλά δε μπορεί εύκολα να προσδιορισθεί."

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-ΜΑ2 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

`In[11]:= BeamDifferentialEquation = EI v''''[x] == 0`

`Out[11]= EI v(4)(x) == 0`

ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟ

`In[12]:= BeamBoundaryConditions = {v[0] == 0, v'[0] == 0, v[L] == d, v'[L] == 0}`

`Out[12]= {v(0) == 0, v'(0) == 0, v(L) == d, v'(L) == 0}`

Η ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

```
In[13]:= BeamGeneralSolution = DSolve[BeamDifferentialEquation, v[x], x]
```

```
Out[13]= {{V(x) → C4 x3 + C3 x2 + C2 x + C1}}
```

ΚΑΙ Η ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $v_g(x)$ ΓΙΑ ΤΟ ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΕΩΣ ΤΗΣ ΙΔΙΑΣ ΔΟΚΟΥ

```
In[14]:= vg[x_] = BeamGeneralSolution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[14]= C4 x3 + C3 x2 + C2 x + C1
```

ΤΟ ΣΧΕΤΙΚΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ (Η ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΣΥΝΟΛΟ) ΛΥΣΕΩΝ

```
In[15]:= flist = {1, x, x2, x3}
```

```
Out[15]= {1, x, x2, x3}
```

Η ΛΙΣΤΑ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΛΥΣΕΩΝ

```
In[16]:= Dflist = D[flist, {x, 2}]
```

```
Out[16]= {0, 0, 2, 6x}
```

Η ΣΧΕΤΙΚΗ ΟΡΙΖΟΥΣΑ WRONSKI ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΣΧΟΛΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

```
In[17]:= W = Det[{flist, D[flist, x], D[flist, {x, 2}], D[flist, {x, 3}]]
```

```
Out[17]= 12
```

In[18]:= comment = "Αφού η πιο πάνω ορίζουσα Wronski W προέκυψε διάφορη του μηδενός, ίση με 12, οι τέσσερις συναρτήσεις της λίστας flist είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό είναι προφανές και από τη θεωρία, αφού ο γραμμικός συνδυασμός των τεσσάρων αυτών συναρτήσεων δημιουργεί ένα τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο.";

ΚΑΙ ΠΙΟ ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΕΝΤΟΛΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑ WRONSKI

```
In[19]:= matrix = Table[D[flist, {x, k}], {k, 0, 3}]
```

```
Out[19]= 
$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

```

```
In[20]:= W = Det[matrix]
```

```
Out[20]= 12
```

ΟΛΕΣ ΜΑΖΙ ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

```
In[21]:= Equations = {BeamDifferentialEquation, BeamBoundaryConditions}
```

```
Out[21]= {EI v(4)(x) == 0, {v(0) == 0, v'(0) == 0, v(L) == d, v'(L) == 0}}
```

ΚΑΙ Η ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΥΤΩΝ

```
In[22]:= BeamPartialSolution = DSolve[Equations, v[x], x]
```

```
Out[22]= {{v(x) →  $\frac{3 d L x^2 - 2 d x^3}{L^3}$ }}
```

ΤΟ ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΕΩΣ $v_p(x)$ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

```
In[23]:= vp[x_] = BeamPartialSolution[[1, 1, 2]] // Factor
```

$$\text{Out}[23]= \frac{d(3L-2x)x^2}{L^3}$$

Η ΠΛΗΡΗΣ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ

```
In[24]:= Verification = Equations /. v → vp
```

```
Out[24]= {True, {True, True, True, True}}
```

ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΜΕΓΕΘΗ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: ΤΟ θ ΜΕ Esc q Esc (Η ΑΠΛΑ ΜΕ ΕΛΛΗΝΙΚΟ θ , ΣΥΝΕΧΩΣ ΟΜΩΣ ΓΙΑ ΤΟ θ)

```
In[25]:= BeamQuantities =
  {θ[x_] = vp'[x], M[x_] = EI θ'[x], Q[x_] = M'[x], p[x_] = Q'[x]} // Simplify
```

$$\text{Out}[25]= \left\{ \frac{6d(L-x)x}{L^3}, \frac{6dEI(L-2x)}{L^3}, -\frac{12dEI}{L^3}, 0 \right\}$$

ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΑ ΔΥΟ ΑΚΡΑ ΤΗΣ: ΠΡΩΤΑ ΣΤΟ ΑΡΙΣΤΕΡΟ ΑΚΡΟ ΤΗΣ

```
In[26]:= LeftBeamEndQuantities = {vp[0], θ[0], M[0], Q[0]}
```

$$\text{Out}[26]= \left\{ 0, 0, \frac{6dEI}{L^2}, -\frac{12dEI}{L^3} \right\}$$

ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΚΑΙ ΣΤΟ ΔΕΞΙΟ ΑΚΡΟ ΤΗΣ

```
In[27]:= RightBeamEndQuantities = {vp[L], θ[L], M[L], Q[L]} // Simplify
```

$$\text{Out}[27]= \left\{ d, 0, -\frac{6dEI}{L^2}, -\frac{12dEI}{L^3} \right\}$$

ΟΙ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ: ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΕΩΣ, ΣΤΡΟΦΗ, ΚΑΜΠΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΚΑΙ ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΔΥΝΑΜΗ ΓΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ EI , L ΚΑΙ d . ΑΥΤΕΣ ΓΙΝΟΝΤΑΙ ΠΡΩΤΑ ΣΕ ΧΩΡΙΣΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ (ΚΑΙ ΜΑΛΙΣΤΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΧΡΩΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΟΘΟΝΗ) ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΣΕ ΜΙΑ ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ.

```
In[28]:= values = {EI = 10, L = 10, d = 0.1}
```

```
Out[28]= {10, 10, 0.1}
```

```
In[29]:= Pv = Plot[vp[x], {x, 0, L}, PlotStyle → {Thickness[0.015], Hue[0.1]},
  AxesLabel → {x, v}, AspectRatio → 0.5, ImageSize → 315,
  PlotLabel → "ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΕΩΣ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ", DefaultFont → {"Arial", 12}];
```



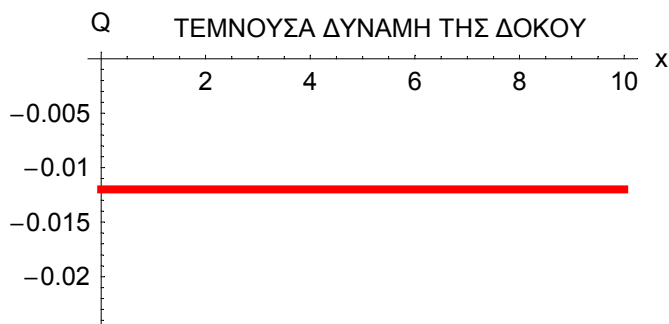
```
In[30]:= Pθ = Plot[θ[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[0.4]},
  AxesLabel -> {x, θ}, AspectRatio -> 0.5, ImageSize -> 315,
  PlotLabel -> "ΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ", DefaultFont -> {"Arial", 12}];
```



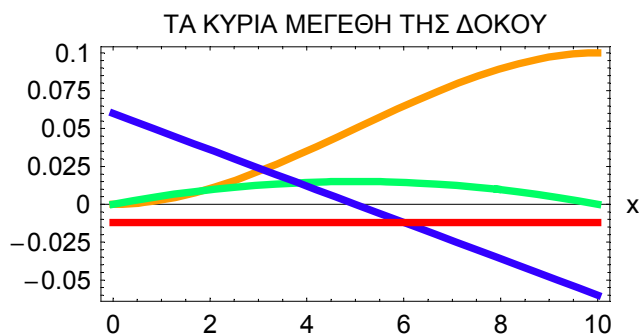
```
In[31]:= PM = Plot[M[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[0.7]},
  AxesLabel -> {x, M}, AspectRatio -> 0.5, ImageSize -> 315,
  PlotLabel -> "ΚΑΜΠΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ", DefaultFont -> {"Arial", 12}];
```



```
In[32]:= PQ = Plot[Q[x], {x, 0, L}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Hue[1]},
  AxesLabel -> {x, Q}, AspectRatio -> 0.5, ImageSize -> 315,
  PlotLabel -> "ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΔΥΝΑΜΗ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ", DefaultFont -> {"Arial", 12}];
```



```
In[33]:= AllQuantitiesTogether = Show[Pv, Pθ, PM, PQ, AxesLabel -> {x, "M, v, θ, Q"},
  ImageSize -> 315, PlotLabel -> "ΤΑ ΚΥΡΙΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ",
  DefaultFont -> {"Arial", 12}, Frame -> True];
```



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-MB

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB1 (Ρευστομηχανική: Ορθογώνιες Τροχιές): Θεωρούμε την απλή εξίσωση eq 1 των περιφερειών με κέντρο την αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$ και ακτίνα a σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) με $y = y(x)$: εξαρτημένη μεταβλητή η $y = y(x)$. Ζητούνται: (α) Η εξίσωση αυτή eq 1. (β) Με παραγωγή ως προς x η διαφορική εξίσωση ode1 των περιφερειών αυτών. (γ) Η λύση sol1 της διαφορικής αυτής εξισώσεως ode1 ως προς την ίδια την παράγωγο dy/dx . (δ) Από τη λύση sol1 η κλίση s1 της περιφέρειας αυτής στο σημείο $(x, y(x))$. (ε) Η εξίσωση eq2 των ευθειών $y/x = k$ (με k τη σχετική κλίση) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O . (στ) Με παραγωγή ως προς x η διαφορική εξίσωση ode2 των ευθειών αυτών. (ζ) Η λύση sol2 της διαφορικής αυτής εξισώσεως ode2 ως προς την ίδια την παράγωγο dy/dx και από τη λύση αυτή sol2 η κλίση s2 της ευθείας αυτής στο σημείο $(x, y(x))$. (η) Η απόδειξη της ορθογωνιότητας των περιφερειών eq 1 και των ευθειών eq2 με την επαλήθευση (εκ ταυτότητας) συγκεκριμένης εξισώσεως. Στη Ρευστομηχανική πρόκειται για το πεδίο μόνιμης (σταθερής), διδιάστατης (επίπεδης) και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού που οφείλεται σε σημειακή πηγή στο σημείο O . Οι περιφέρειες eq 1 δηλώνουν τις ισοδυναμικές γραμμές και οι ευθείες eq2 τις γραμμές ροής του ρευστού.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB2 (Δυναμική): Στη Δυναμική ζητούνται: (α) Να γραφεί ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα NewtonLaw σαν μάζα m επί την παράγωγο dv/dt της ταχύτητας $v(t)$ ίσον δύναμη F . (β) Στην ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου M μάζας m παρουσιάζεται αντίσταση της μορφής $F = -bv(t) - cv^2(t)$ με τα b και c θετικές σταθερές. Να δηλωθεί η αντίσταση αυτή F . (γ) Ποια μορφή de παίρνει τώρα ο νόμος του Νεύτωνα NewtonLaw χωρίς να ξαναγραφεί από την αρχή; (δ) Να δηλωθεί η αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$ σαν ic. (ε) Να βρεθεί η λύση sol του προβλήματος αρχικής τιμής de και ic και (στ) να προσδιορισθεί και η σχετική συνάρτηση $v_p(t)$ με πλήρη απλοποίηση του αποτελέσματος. (ζ) Να γίνει επαλήθευση της λύσεως αυτής $v_p(t)$ ως προς τη διαφορική εξίσωση de: επαλήθευση ver 1 και (η) ως προς την αρχική συνθήκη ic: επαλήθευση ver 2.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB3 (Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού): Εδώ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^4X}{dx^4} - \beta^4 X = 0$$

με $X = X(x)$ και το β θετική σταθερά. Ζητούνται: (α) Να δηλωθεί η εξίσωση αυτή με το σύμβολο BeamDE. Σε σχόλιο comment1 περίπου τριάντα λέξεων πού ακριβώς παρουσιάζεται; (β) Να δοθούν σε λίστα CharBeamDE όλοι οι βασικοί χαρακτηρισμοί της. (γ) Να βρεθεί άμεσα η λύση sol της διαφορικής αυτής εξισώσεως BeamDE. (δ) Να ορισθεί η σχετική συνάρτηση $X_{s1}(x)$. Ανάλογα και η συνάρτηση $X_{s2}(x)$, αλλά τώρα με υπερβολικές συναρτήσεις αντί για την εκθετική συνάρτηση και με απλοποίηση του αποτελέσματος. (ε) Να γίνει η επαλήθευση ver και των δύο λύσεων $X_{s1}(x)$ και $X_{s2}(x)$ με λίστα δύο στοιχείων και με τη χρήση και της εντολής απλοποίησης. (στ) Σε περίπτωση αμφιέριστης δοκού να γραφούν σε λίστα bcs με τέσσερα στοιχεία οι συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. (ζ) Να δοθούν σε απλή λίστα list με τέσσερα στοιχεία οι συναρτήσεις $\cos \beta x$, $\cosh \beta x$, $\sin \beta x$ και $\sinh \beta x$, οι οποίες παρουσιάζονται στη λύση $X_{s2}(x)$. Στη συνέχεια να υπολογισθούν με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος οι λίστες list1, list2 και list3 των τριών πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων αυτών καθώς και η σχετική ορίζουσα Wronski, η Βρονσκιανή ορίζουσα $W(x)$. (η) Σε σχόλιο comment2 περίπου εξήντα λέξεων, πού ακριβώς είναι χρήσιμη η ορίζουσα αυτή $W(x)$; Τί ακριβώς αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB4 (Δυναμική): Υλικό σημείο M μάζας m κινείται μέσα σε ημιάπειρο σωλήνα $[0, \infty)$ ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από το σταθερό άκρο του $u = 0$ υπό την επίδραση της φυγόκεντρης δύναμης $F = m\omega_0^2 u$. Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση de με άγνωστη συνάρτηση τη θέση $u = u(t)$ του υλικού σημείου M με t το χρόνο. (β) Να δοθούν σε λίστα charde όλοι οι βασικοί χαρακτηρισμοί της. (γ) Να βρεθεί άμεσα η γενική λύση sol της διαφορικής εξισώσεως de. (δ) Να δηλωθεί και η σχετική συνάρτηση $u_s(t)$ με τη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων και με απλοποίηση του αποτελέσματος. (ε) Να δοθούν σε μια

απλή λίστα listf οι δύο συναρτήσεις $\cosh \omega_0 t$ και $\sinh \omega_0 t$ που εμφανίζονται στην πιο πάνω γενική λύση $u_s(t)$. (στ) Με τη βοήθεια της λίστας listf να υπολογισθεί κι η σχετική ορίζουσα Wronski W . (ζ) Εάν το παρόν πρόβλημα Δυναμικής συνοδεύεται και από τις αρχικές συνθήκες $u_s(0) = u_0$ και $\dot{u}_s(0) = v_0$, να δηλωθούν αυτές οι δύο συνθήκες σε λίστα eqs με δύο στοιχεία. (η) Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις eqs, να προσδιορισθούν οι δύο σταθερές c_1 και c_2 στην ήδη προσδιορισμένη γενική λύση $u_s(t)$. (θ) Στη συνέχεια από την ίδια λύση $u_s(t)$ να προσδιορισθεί και η αντίστοιχη μερική λύση $u_p(t)$ σε απλοποιημένη μορφή.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB5 (Ταλαντώσεις): Σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με ισχυρή απόσβεση ($\xi > 1$) και με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u = u(t)$ της μάζας από τη θέση ισορροπίας της ζητούνται: (α) Απλά να δηλωθεί (όχι να βρεθεί) η σχετική διαφορική εξίσωση de υποχρεωτικά με τη χρήση της κυκλικής συχνότητας ω_0 του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση μηχανικού συστήματος και του λόγου αποσβέσεως ξ με συνάρτηση στο δεξιό μέλος την ανηγμένη φόρτιση (ανηγμένη εξωτερική δύναμη πάνω στη μάζα m) $p(t)/m$. (β) Υποχρεωτικά από την εξίσωση αυτή de (όχι από την αρχή!) να ορισθεί και η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση deh: χωρίς τη φόρτιση $p(t)$. (γ) Να βρεθεί η λύση solh της εξισώσεως deh (με τη χρήση και της εντολής Expand) καθώς και η αντίστοιχη συνάρτηση $u_s(t)$. (δ) Και πάλι με βάση τη διαφορική εξίσωση de να ορισθεί η διαφορική εξίσωση dec με συνημιτονική φόρτιση της μορφής $p(t) = p_0 \cos \omega t$ με το p_0 σταθερά και γενικά $\omega \neq \omega_0$. (ε) Να βρεθεί η λύση solg της διαφορικής εξισώσεως dec σε απλοποιημένη μορφή καθώς και η αντίστοιχη συνάρτηση $u_g(t)$. (στ) Στο σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών να δηλωθούν οι αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ σε λίστα ics. (ζ) Να βρεθεί κατευθείαν η μερική λύση solp της διαφορικής εξισώσεως dec και των αρχικών συνθηκών ics με πλήρη απλοποίηση του αποτελέσματος καθώς και η αντίστοιχη συνάρτηση $u_p(t)$. (η) Να γίνει η επαλήθευση ver της διαφορικής εξισώσεως dec και των αρχικών συνθηκών ics από τη λύση $u_p(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB6 (Μηχανική των Υλικών: Ελαστική Ευστάθεια: Λυγισμός): Στο πρόβλημα του λυγισμού (buckling) ευθύγραμμου αμφίπακτου στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος ή κολώνας) παρουσιάζεται η ακόλουθη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad \text{με} \quad v = v(x)$$

την εγκάρσια (κάθετη στο στύλο) μετατόπιση του στύλου και k θετική σταθερά. Ζητούνται: (α) Να δηλωθεί η διαφορική εξίσωση σαν BucklingDE. (β) Για τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως να ορισθεί σαν συνάρτηση μια πιθανή λύση $v_0(x)$ σε κατάλληλη εκθετική μορφή. Στη συνέχεια να προσδιορισθεί η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση CharEq (αναγκαστικά πολλαπλασιασμένη επί $v_0(x)$) κατευθείαν από τη διαφορική εξίσωση BucklingDE με τη βοήθεια και της συναρτήσεως $v_0(x)$. (γ) Να βρεθεί η λύση sol της χαρακτηριστικής εξισώσεως CharEq. Σε σχόλιο comment3 να αναφερθεί πόσες είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισώσεως και ποιες ακριβώς. (δ) Να ορισθεί η συνάρτηση-λύση $v_s(x)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων 1 , x , $\cos kx$ και $\sin kx$ με σταθερές c_1 , c_2 , c_3 και c_4 αντίστοιχα. (ε) Να γίνει η επαλήθευση ver ότι η συνάρτηση αυτή $v_s(x)$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση BucklingDE μετά από απλοποίηση του αποτελέσματος. (στ) Να γραφούν οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες eqsb (λίστα με τέσσερα στοιχεία) στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ του παρόντος αμφίπακτου στύλου με τη χρήση της γενικής λύσεως $v_s(x)$. (ζ) Από τις τέσσερις αυτές συνθήκες eqsb να απαλειφθούν οι τρεις σταθερές c_1 , c_2 και c_3 με χρήση της εντολής απαλοιφής Eliminate, συγκεκριμένα

teq = Eliminate[eqsb, {C[1], C[2], C[3]}] // Simplify

Στη συνέχεια να απλοποιηθεί το αποτέλεσμα teq της απαλοιφής αυτής διαιρώντας το αριστερό μέλος του με kc_4 και απλοποιώντας την τελική εξίσωση με τελικό αποτέλεσμα το teqb. (η) Να αναφερθούν σε σχόλιο comment4 (σαράντα περίπου λέξεις) ο χαρακτηρισμός της εξισώσεως teqb και η εκτίμηση για τον αριθμό των λύσεων της. Πόσες από αυτές τις λύσεις είναι πραγματικά χρήσιμες για τον Πολιτικό Μηχανικό και για ποιο σκοπό ακριβώς;

■ Notebook EMI-MB

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMI-MB (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMI-MB1 ΕΩΣ EMI-MB6)

In[1]:= Off[General::spell]

In[2]:= Off[General::spell1]

■ ΑΣΚΗΣΗ EMI-MB1 (ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΔΕΑΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ: ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ)

In[3]:= eq1 = x² + y[x]² == a²

Out[3]= x² + y(x)² == a²

In[4]:= ode1 = D[eq1, x]

Out[4]= 2x + 2y(x)y'(x) == 0

In[5]:= sol1 = Solve[ode1, y'[x]]

Out[5]= $\left\{ \left\{ y'(x) \rightarrow -\frac{x}{y(x)} \right\} \right\}$

In[6]:= s1 = sol1[[1, 1, 2]]

Out[6]= $-\frac{x}{y(x)}$

In[7]:= eq2 = y[x] / x == k

Out[7]= $\frac{y(x)}{x} == k$

In[8]:= ode2 = D[eq2, x]

Out[8]= $\frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} == 0$

In[9]:= sol2 = Solve[ode2, y'[x]]

Out[9]= $\left\{ \left\{ y'(x) \rightarrow \frac{y(x)}{x} \right\} \right\}$

In[10]:= s2 = sol2[[1, 1, 2]]

Out[10]= $\frac{y(x)}{x}$

In[11]:= OrthogonalityVerification = s1 s2 == -1

Out[11]= True

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB2 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ)

```
In[12]:= NewtonLaw = m v' [t] == F [t]
```

```
Out[12]= m v'(t) == F(t)
```

```
In[13]:= F [t_] = -b v [t] - c v [t]^2
```

```
Out[13]= -c v(t)^2 - b v(t)
```

```
In[14]:= de = NewtonLaw
```

```
Out[14]= m v'(t) == -c v(t)^2 - b v(t)
```

```
In[15]:= ic = v [0] == v0;
```

```
In[16]:= sol = DSolve[{de, ic}, v [t], t]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
Out[16]= {{v(t) -> \frac{bv0}{e^{\frac{bt}{m}} b + c e^{\frac{bt}{m}} v0 - cv0}}}
```

```
In[17]:= vp [t_] = sol [[1, 1, 2]] // FullSimplify
```

```
Out[17]= \frac{bv0}{e^{\frac{bt}{m}} (b + cv0) - cv0}
```

```
In[18]:= ver1 = de /. v -> vp // Simplify
```

```
Out[18]= True
```

```
In[19]:= ver2 = ic /. v -> vp
```

```
Out[19]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB3 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ)

```
In[20]:= BeamDE = X'''' [x] - \beta^4 X [x] == 0;
```

```
In[21]:= comment1 = "Παρουσιάζεται στη Δυναμική των Κατασκευών στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και στις ελεύθερες ταλαντώσεις δοκού. Η άγνωστη συνάρτηση X(x) αφορά στο χωρικό μέρος των ταλαντώσεων και εκφράζει το προσημασμένο εύρος τους στο σημείο x της δοκού.";
```

```
In[22]:= CharBeamDE = {"Συνήθης διαφορική εξίσωση", "Τετάρτης τάξεως", "Πρώτου βαθμού", "Γραμμική", "Ομογενής", "Με σταθερούς συντελεστές"};
```

```
In[23]:= sol = DSolve[BeamDE, X [x], x]
```

```
Out[23]= {{X(x) -> e^{-x\beta} c_2 + e^{x\beta} c_4 + c_1 \cos(x\beta) + c_3 \sin(x\beta)}}
```

```
In[24]:= Xs1 [x_] = sol [[1, 1, 2]]
```

```
Out[24]= e^{-x\beta} c_2 + e^{x\beta} c_4 + c_1 \cos(x\beta) + c_3 \sin(x\beta)
```

```

In[25]:= Xs2[x_] = Xs1[x] // ExpToTrig // Simplify
Out[25]= c1 cos(x β) + (c2 + c4) cosh(x β) + c3 sin(x β) + (c4 - c2) sinh(x β)

In[26]:= ver = {BeamDE /. X → Xs1, BeamDE /. X → Xs2} // Simplify
Out[26]= {True, True}

In[27]:= bcs = {X[0] == 0, X'[0] == 0, X[L] == 0, X'[L] == 0};
In[28]:= list = {Cos[β x], Cosh[β x], Sin[β x], Sinh[β x]};
In[29]:= {list1 = D[list, x], list2 = D[list1, x], list3 = D[list2, x]}
Out[29]= 
$$\begin{pmatrix} -\beta \sin(x\beta) & \beta \sinh(x\beta) & \beta \cos(x\beta) & \beta \cosh(x\beta) \\ -\beta^2 \cos(x\beta) & \beta^2 \cosh(x\beta) & -\beta^2 \sin(x\beta) & \beta^2 \sinh(x\beta) \\ \beta^3 \sin(x\beta) & \beta^3 \sinh(x\beta) & -\beta^3 \cos(x\beta) & \beta^3 \cosh(x\beta) \end{pmatrix}$$


In[30]:= W[x_] = Det[{list, list1, list2, list3}] // Simplify
Out[30]= -4 β6

In[31]:= comment2 = " Η ορίζουσα Wronski είναι χρήσιμη στην
απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας συναρτήσεων. Συγκεκριμένα,
εάν η ορίζουσα Wronski n συναρτήσεων είναι διάφορη του μηδενός,
τότε οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα στο προηγούμενο ερώτημα απο –
δειξαμε τη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων cos βx, cosh βx,
sin βx και sinh βx. Εάν μάλιστα πρόκειται για λύσεις ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων,
τότε ισχύει και το αντίστροφο: εάν η ορίζουσα Wronski είναι ίση με το μηδέν,
τότε οι συναρτήσεις – λύσεις αυτές είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως στην ειδική αυτή
περίπτωση πρόκειται για μια αναγκαία και ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας.";

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB4 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ)

```

In[31]:= de = u''[t] - ω02 u[t] == 0;
In[32]:= charde = {"Συνήθης διαφορική εξίσωση", "Δευτέρας τάξεως",
"Πρώτου βαθμού", "Γραμμική", "Ομογενής", "Με σταθερούς συντελεστές"};
In[33]:= sol = DSolve[de, u[t], t]
Out[33]= {{u(t) → etω0 c1 + e-tω0 c2}}
In[34]:= us[t_] = sol[[1, 1, 2]] // ExpToTrig // Simplify
Out[34]= (c1 + c2) cosh(tω0) + (c1 - c2) sinh(tω0)
In[35]:= listf = {Cosh[ω0 t], Sinh[ω0 t]};
In[36]:= W = Det[{listf, D[listf, t]}] // Simplify
Out[36]= ω0
In[37]:= eqs = {us[0] == u0, us'[0] == v0}
Out[37]= {c1 + c2 == u0, ω0(c1 - c2) == v0}

```

In[38]:= solc = Solve[eqs, {C[1], C[2]}]

Out[38]= $\left\{ \left\{ c_1 \rightarrow -\frac{-v_0 - u_0 \omega_0}{2 \omega_0}, c_2 \rightarrow -\frac{v_0 - u_0 \omega_0}{2 \omega_0} \right\} \right\}$

In[39]:= up[t_] = us[t] /. solc[[1]] // Simplify

Out[39]= $u_0 \cosh(t \omega_0) + \frac{v_0 \sinh(t \omega_0)}{\omega_0}$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB5 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

In[40]:= de = u''[t] + 2 ξ ω0 u'[t] + ω0² u[t] == p[t] / m

Out[40]= $u(t) \omega_0^2 + 2 \xi u'(t) \omega_0 + u''(t) == \frac{p(t)}{m}$

In[41]:= deh = de /. p[t] → 0

Out[41]= $u(t) \omega_0^2 + 2 \xi u'(t) \omega_0 + u''(t) == 0$

In[42]:= solh = DSolve[deh, u[t], t] // Expand

Out[42]= $\left\{ \left\{ u(t) \rightarrow e^{t(-\xi \omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0)} c_1 + e^{t(\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0 - \xi \omega_0)} c_2 \right\} \right\}$

In[43]:= us[t_] = solh[[1, 1, 2]]

Out[43]= $e^{t(-\xi \omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0)} c_1 + e^{t(\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0 - \xi \omega_0)} c_2$

In[44]:= dec = de /. p[t] → p0 Cos[ω t]

Out[44]= $u(t) \omega_0^2 + 2 \xi u'(t) \omega_0 + u''(t) == \frac{p_0 \cos(t \omega)}{m}$

In[45]:= solg = DSolve[dec, u[t], t] // Simplify

Out[45]= $\left\{ \left\{ u(t) \rightarrow e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0} c_1 + e^{t(\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi) \omega_0} c_2 + \frac{p_0 ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(t \omega) + 2 \xi \omega \omega_0 \sin(t \omega))}{m(\omega^4 + 2(2 \xi^2 - 1) \omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4)} \right\} \right\}$

In[46]:= ug[t_] = solg[[1, 1, 2]]

Out[46]= $e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0} c_1 + e^{t(\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi) \omega_0} c_2 + \frac{p_0 ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(t \omega) + 2 \xi \omega \omega_0 \sin(t \omega))}{m(\omega^4 + 2(2 \xi^2 - 1) \omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4)}$

In[47]:= ics = {u[0] == u0, u'[0] == v0}

Out[47]= {u(0) == u0, u'(0) == v0}

In[48]:= solp = DSolve[{dec, ics}, u[t], t] // FullSimplify

Out[48]= $\left\{ \left\{ u(t) \rightarrow \left(e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0} \left((-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1}}) (m(v_0 + u_0 \xi \omega_0) (\omega^4 + 2(2 \xi^2 - 1) \omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4) - p_0 \xi \omega_0 (\omega^2 + \omega_0^2)) + \sqrt{\xi^2 - 1} ((1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1}}) \omega_0 (p_0 (\omega - \omega_0) (\omega + \omega_0) + m u_0 (\omega^4 + 2(2 \xi^2 - 1) \omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4)) + 2 e^{t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0} p_0 \omega_0 ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(t \omega) + 2 \xi \omega \omega_0 \sin(t \omega))) \right) \right) / \left(2 m \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0 (\omega^4 + 2(2 \xi^2 - 1) \omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4) \right) \right\} \right\}$

```
In[49]:= up[t_] = solp[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Out}[49]= \frac{\left(e^{-t(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_0} \left((-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2-1}\omega_0}) (m(v_0 + u_0 \xi \omega_0) (\omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4) - p_0 \xi \omega_0 (\omega^2 + \omega_0^2)) + \sqrt{\xi^2 - 1} \left((1 + e^{2t\sqrt{\xi^2-1}\omega_0}) \omega_0 (p_0 (\omega - \omega_0) (\omega + \omega_0) + m u_0 (\omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4)) + 2 e^{t(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_0} p_0 \omega_0 ((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(t\omega) + 2\xi \omega \omega_0 \sin(t\omega)) \right) \right)}{\left(2 m \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0 (\omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4) \right)}$$

```
In[50]:= ver = {dec, ics} /. u -> up // Simplify
```

```
Out[50]= {True, {True, True}}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MB6 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ: ΛΥΓΙΣΜΟΣ)

```
In[51]:= BucklingDE = v''''[x] + k^2 v''[x] == 0;
```

```
In[52]:= v0[x_] = Exp[μ x];
```

```
In[53]:= CharEq = BucklingDE /. v -> v0 // Simplify
```

```
Out[53]= e^{x μ} μ^2 (k^2 + μ^2) == 0
```

```
In[54]:= sol = Solve[CharEq, μ]
```

```
Out[54]= {{μ -> 0}, {μ -> 0}, {μ -> -i k}, {μ -> i k}}
```

```
In[55]:= comment3 =
```

"Οι λύσεις της χαρακτηριστικής αυτής εξίσωσης είναι τρεις (χωρίς όμως τις πολλαπλότητες τους) : το μηδέν, που είναι όμως διπλή ρίζα, το $-ik$ και το ik ;"

```
In[55]:= vs[x_] = C[1] + C[2] x + C[3] Cos[k x] + C[4] Sin[k x];
```

```
In[56]:= ver = BucklingDE /. v -> vs // Simplify
```

```
Out[56]= True
```

```
In[57]:= eqsb = {vs[0] == 0, vs'[0] == 0, vs[L] == 0, vs'[L] == 0}
```

```
Out[57]= {c1 + c3 == 0, c2 + k c4 == 0, c1 + L c2 + c3 Cos(k L) + c4 Sin(k L) == 0, c2 + k c4 Cos(k L) - k c3 Sin(k L) == 0}
```

```
In[58]:= teq = Eliminate[eqsb, {C[1], C[2], C[3]}] // Simplify
```

```
Out[58]= k c4 (2 Cos(k L) + k L Sin(k L) - 2) == 0
```

```
In[59]:= teqb = teq[[1]] / (k C[4]) == 0 // Simplify
```

```
Out[59]= 2 Cos(k L) + k L Sin(k L) == 2
```

```
In[60]:= comment4 =
```

"Πρόκειται για μια τριγωνομετρική εξίσωση η οποία έχει άπειρες ρίζες. Από αυτές χρήσιμη για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι αποκλειστικά η μικρότερη θετική ρίζα. Από αυτήν προκύπτει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} του στύλου, δηλαδή το αξονικό θλιπτικό φορτίο στο στύλο που θα προκαλέσει το λυγισμό του. Πρακτικά, άμα γίνει λυγισμός του στύλου για πρώτη φορά (με το πρώτο φορτίο P_{cr}), τα επόμενα κρίσιμα φορτία λυγισμού είναι εντελώς άχρηστα."

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-MC

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC1 (Δυναμική): Θεωρούμε την κατακόρυφη κίνηση ενός υλικού σημείου M μάζας m με θετική κατεύθυνση προς τα πάνω. Την κίνηση αυτή την επηρεάζει η επιτάχυνση της βαρύτητας g (προς τα κάτω!) καθώς και αντίσταση του αέρα $cv(t)$ ανάλογη της ταχύτητας $v(t)$ του υλικού σημείου με γνωστή τη θετική σταθερά c . Ζητούνται: Δηλώσεις μη εμφανίσεως (γενικά) λαθών τύπου (1) spell και (2) spell1. (3) Η σχετική διαφορική εξίσωση VerticalMovement1 ως προς την ταχύτητα $v(t)$. (4) Χωρίς να ξαναγραφεί αυτή η δήλωσή της και με το συντομότερο σύμβολο vm1. (5) Η δήλωση της αρχικής συνθήκης $v(0) = v_0$ με το σύμβολο ic1. (6) Η εύρεση της λύσεως solnm1 αυτού του προβλήματος αρχικής τιμής και μετά (7) η σχετική συνάρτηση $v_{s1}(t)$ (χωρίς δείκτες!) σε πλήρως απλοποιημένη μορφή. (8) Η επαλήθευση vernm1 της λύσεως που βρέθηκε. (9) Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση VerticalMovement2 για κίνηση του υλικού σημείου προς τα πάνω, τώρα όμως με αντίσταση στην κίνηση $cv^2(t)$. (10) Σε λίστα char2 συμβολοσειρών (strings) οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (11) Δήλωση ξανά της αρχικής συνθήκης $v(0) = v_0$, τώρα όμως με το σύμβολο ic2. (12) Οι δύο εξισώσεις eqs2 αυτού του δεύτερου προβλήματος αρχικής τιμής σε λίστα. (13) Η λύση τους sol2 (με απλοποίηση), (14) η σχετική συνάρτηση $v_{s2}(t)$ (χωρίς δείκτες!) και (15) η επαλήθευση vers2 των εξισώσεων eqs2 (με απλοποίηση). (16) Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση VerticalMovement3, τώρα για κίνηση του υλικού σημείου προς τα κάτω, πάλι με αντίσταση στην κίνηση $cv^2(t)$. (17) Δήλωση της νέας αρχικής συνθήκης $v(0) = 0$ με το σύμβολο ic3. (18) Οι δύο εξισώσεις eqs3 αυτού του τρίτου προβλήματος αρχικής τιμής σε λίστα. (19) Η λύση τους sol3, (20) η σχετική συνάρτηση $v_{s3}(t)$ (χωρίς δείκτες!) και (21) η επαλήθευση vers3 των εξισώσεων eqs3 (με απλοποίηση). (22) Δήλωση των τιμών values: $m \rightarrow 1, g \rightarrow 9.81, c \rightarrow 1$ και $v_0 \rightarrow 0$ (με βέλη στη Mathematica) σε λίστα. (23) Απλή σχεδίαση σε ενιαίο σχήμα P1 των δύο συναρτήσεων $v_{s1}(t)$ και $v_{s3}(t)$ (με τις αντικαταστάσεις values και στις δύο συναρτήσεις: δύο φορές!) στο χρονικό διάστημα $[0, 1]$, με πάχος γραμμής 0.009, με άξονες t και v , με τίτλο ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΠΤΩΣΕΩΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ και με γραμματοσειρά Arial-Bold.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC2 (Ταλαντώσεις): Σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m), ελατηρίου (σταθεράς k) και αποσβεστήρα (σταθεράς c) με φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$ να ασκείται πάνω στη μάζα m ζητούνται: (24) Με βάση αυτές τις τρεις παραμέτρους: m, k και c , η σχετική διαφορική εξίσωση vde1a για τις ταλαντώσεις (vibrations) του υλικού σημείου με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου. (25) Από αυτήν (όχι από την αρχή!) η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση vde2a χωρίς τον αποσβεστήρα. (26) Από την πρώτη διαφορική εξίσωση vde1a η διαφορική εξίσωση vde3a με τον αποσβεστήρα, αλλά τώρα σε ελεύθερες ταλαντώσεις. (27) Από την προηγούμενη διαφορική εξίσωση vde3a η αντίστοιχη εξίσωση vde4a χωρίς τον αποσβεστήρα. Με τον ίδιο τρόπο εργασίας οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις (28) vde1b, (29) vde2b, (30) vde3b και (31) vde4b, τώρα όμως με τη χρήση των σταθερών ω_0 και ξ αντί για τις σταθερές k και c αντίστοιχα. (32) Η δήλωση της συχνότητας ω_D των ταλαντώσεων με ασθενή (υποκρίσιμη) απόσβεση με τις σταθερές ω_0 και ξ γνωστές. (33) Κατευθείαν η γενική συνάρτηση $u_D(t)$ για τη μετατόπιση $u(t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες, με ασθενή απόσβεση και με φόρτιση $p(t)$ (με απλοποίηση). (34) Με κατάλληλη αντικατάσταση στη συνάρτηση αυτή $u_D(t)$ (όχι από την αρχή!) η εύρεση της λύσεως $u_{p0}(t)$ που αντιστοιχεί σε σταθερή φόρτιση p_0 (και με πλήρη απλοποίηση). (35) Σε μια λίστα values οι αντικαταστάσεις $p_0 \rightarrow 1, m \rightarrow 1, \xi \rightarrow 0.05$ και $\omega_0 \rightarrow 1$. (36) Σε πίνακα tb οι τιμές της συναρτήσεως $u_{p0}(t)$ (με τις τιμές values) για $t = 0, 1, \dots, 50$ και (37) η μέγιστη από αυτές. (38) Τέλος η γραφική παράσταση της ίδιας συναρτήσεως πάλι με τις τιμές values, με $0 \leq t \leq 50$, με άξονες t και u , με πάχος γραμμής 0.01 και με γραμματοσειρά Arial.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC3 (Ταλαντώσεις): Σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου φυσικής κυκλικής συχνότητας ω_0 ασκείται φόρτιση $p^*(t) = p_0 \sin \omega_0 t$ (ήδη ανηγμένη στη μάζα m). Ζητούνται: (39) Σε σχόλιο comment1 ποιο φαινόμενο παρουσιάζεται και γιατί ακριβώς είναι τόσο επιβλαβές για τις κατασκευές; (40) Η σχετική διαφορική εξίσωση rde με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου. (41) Η δήλωση μηδενικών αρχικών συνθηκών ics.

(42) Η λύση `solrde` του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών (με απλοποίηση), (43) η σχετική συνάρτηση $u_r(t)$ και (44) η επαλήθευση (με μία μόνο εντολή) όλων των εξισώσεων του προβλήματος (με απλοποίηση). (45) Η σχεδίαση σε σχήμα `Pr` της συναρτήσεως αυτής $u_r(t)$ με $\rho_0 \rightarrow 1$ και $\omega_0 \rightarrow 1$ για $0 \leq t \leq 50$. Στη γραφική αυτή παράσταση να δηλωθούν άξονες t και u , τίτλος **RESONANCE** με γραμματοσειρά **Arial-BoldItalic** στις 14 στιγμές (points) και να χρησιμοποιηθεί πάχος γραμμής 0.01. (46) Με βάση το αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης `rde` να σχηματισθεί νέα διαφορική εξίσωση `rde`, τώρα με κυκλική συχνότητα ω της πιο πάνω ανηγμένης εξωτερικής φορτίσεως $p^*(t)$. (47) Με μία μόνο εντολή να προσδιορισθεί η λύση $u_n(t)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών, αλλά εδώ με τη νέα φόρτιση $p^*(t)$, σε μορφή συναρτήσεως (με απλοποίηση). (48) Να γίνει και η αντίστοιχη γραφική παράσταση `Pn`, τώρα όμως με $\omega \rightarrow 2$ και με τον τίτλο **NO RESONANCE**. (49) Στη συνέχεια σε ενιαίο σχήμα να δοθούν και οι δύο γραφικές παραστάσεις `Pr` και `Pn` με τον τίτλο **RESONANCE vs. NO RESONANCE**. (50) Τέλος να αναφερθούν τα σχόλια και συμπεράσματα `comment2` που προκύπτουν από τις γραφικές αυτές παραστάσεις.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC4 (Ταλαντώσεις): Θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις συστήματος μάζας-ελατηρίου ιδιοσυχνότητας ω_0 με ανηγμένη στη μάζα εξωτερική φόρτιση $p(t)$ χωρίς απόσβεση. Ζητούνται: (51) Η σχετική διαφορική εξίσωση `VibrationsODE` ως προς τη μετατόπιση $u(t)$. (52) Η τροποποίηση του συμβόλου της σε `vde` (χωρίς όμως να ξαναγραφεί!). (53) Η γενική λύση της `sol`. (54) Για ανηγμένη φόρτιση της μορφής $p_1(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ η υπόθεση $u_1(t)$ για μια αντίστοιχη μερική λύση και η γενική λύση $u_{1g}(t)$ της ίδιας διαφορικής εξίσωσης (φυσικά με $p \rightarrow p_1$) με τη χρήση της εντολής `DSolve` και απλοποίηση. (Οι τρεις συναρτήσεις $p_1(t)$, $u_1(t)$ και $u_{1g}(t)$ σε μια γραμμή με τη χρήση λίστας!) (55) Ανάλογα για $p_2(t) = a \cos(\omega t - \alpha)$, (56) $p_3(t) = a \cos(\omega_0 t - \alpha)$ και (57) $p_4(t) = a + b e^{-2t} + c \sin \omega_0 t$ (με πλήρη απλοποίηση). (58) Σε σχόλιο `comment3` συμφωνούν οι μερικές λύσεις $u_k(t)$ με τις γενικές λύσεις $u_{kg}(t)$;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC5 ([Y] Μηχανική των Υλικών, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση p_0 . Ζητούνται: (59) Η σχετική συνήθης διαφορική εξίσωση `BeamODE1`. (60) Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση `BeamODE2` με στήριξη της δοκού αυτής επί ελαστικής βάσεως (εδώ του εδάφους) και με συνολική σταθερά εδάφους-δοκού k . (61) Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση `BeamODE3a`, τώρα χωρίς στήριξη και με άγνωστη συνάρτηση τη $X(x)$, σε *καμπτικές ιδιοταλαντώσεις* (εννοείται με $\rho_0 = 0$) με κυκλική συχνότητα ω . (62) Η ίδια διαφορική εξίσωση `BeamODE3b` γραμμένη από την αρχή, τώρα όμως με την κατευθείαν χρήση της βοηθητικής σταθεράς β . (63) Η λύση `sol3b` της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης `BeamODE3b` και (64) η σχετική συνάρτηση $X_1(x)$. (65) Η ίδια συνάρτηση, τώρα στη μορφή $X_2(x)$ με τη χρήση μόνο υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων (και με απλοποίηση). (66) Η επαλήθευση `ver` της τελευταίας λύσεως $X_2(x)$ (ξανά με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC6 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση (ως προς τη θέση x) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) με γνωστή τη σχετική συνολική σταθερά β και άγνωστο το προσημασμένο εύρος των ταλαντώσεων $X(x)$. Ζητούνται: (67) Η απαλοιφή τυχόν προηγούμενης δηλώσεως του συμβόλου X . (68) Η σχετική διαφορική εξίσωση `beamde`. (69) Σε λίστα `bcs` οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού για μια αμφιέριστη δοκό. (70) Η λύση `sol` αυτού του προβλήματος συνοριακών τιμών. (71) Σε ένα σχόλιο `comment4` γιατί είναι απογοητευτική η λύση αυτή; (72) Λίστα `list` (με τη χρήση εντολής για το σχηματισμό πίνακα) των πέντε πρώτων ιδιομορφών $X_n(x)$ της πιο πάνω δοκού, οι οποίες θεωρούνται εκ των προτέρων γνωστές. (73) Το μητρώο `WM` που αντιστοιχεί στη σχετική ορίζουσα `Wronski` και στη συνέχεια (74) η ίδια η ορίζουσα `Wronski W` (με απλοποίηση). (75) Σε σχόλιο `comment5` εκτίμηση του χρόνου υπολογισμού της ορίζουσας W με το χέρι και (76) σε άλλο σχόλιο `comment6` τι ακριβώς συνάγεται από τον υπολογισμό της ορίζουσας W ; (77) Τελικά για $L = 1$ η σχεδίαση και των πέντε πρώτων ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$ της δοκού (σ' ένα ενιαίο σχήμα) με άξονες x και X , πάχος γραμμής 0.008 και τίτλο **SIMPLY-SUPPORTED BEAM: VIBRATION MODES**.

■ Notebook EMII-MC

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMII-MC (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMII-MC1 ΕΩΣ EMII-MC6)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC1 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ)

In[1]:= Off[General::spell]

In[2]:= Off[General::spell1]

In[3]:= VerticalMovement1 = m v'[t] == -m g - c v[t]

Out[3]= $m v'(t) == -g m - c v(t)$

In[4]:= vm1 = VerticalMovement1

Out[4]= $m v'(t) == -g m - c v(t)$

In[5]:= ic1 = v[0] == v0

Out[5]= $v(0) == v0$

In[6]:= solvm1 = DSolve[{vm1, ic1}, v[t], t]

Out[6]= $\left\{ \left\{ v(t) \rightarrow -\frac{e^{-\frac{ct}{m}} (e^{\frac{ct}{m}} g m - g m - c v0)}{c} \right\} \right\}$

In[7]:= vs1[t_] = solvm1[[1, 1, 2]] // FullSimplify

Out[7]= $\frac{e^{-\frac{ct}{m}} (g m + c v0) - g m}{c}$

In[8]:= vervm1 = vm1 /. v → vs1

Out[8]= True

In[9]:= VerticalMovement2 = m v'[t] == -m g - c v[t]^2

Out[9]= $m v'(t) == -c v(t)^2 - g m$

In[10]:= char2 = {"Συνήθης διαφορική εξίσωση", "μη γραμμική", "πρώτης τάξεως",
"πρώτου βαθμού", "χωριζόμενων μεταβλητών", "με άγνωστη συνάρτηση
την ταχύτητα v(t) και ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t"};

In[11]:= ic2 = v[0] == v0

Out[11]= $v(0) == v0$

In[12]:= eqs2 = {VerticalMovement2, ic2}

Out[12]= $\{m v'(t) == -c v(t)^2 - g m, v(0) == v0\}$

```
In[13]:= sol2 = DSolve[eqs2, v[t], t] // Simplify
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
Out[13]= {{v(t) -> -\frac{\sqrt{g} \sqrt{m} \tan\left(\frac{\sqrt{c} \sqrt{g} t}{\sqrt{m}} - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{c} v_0}{\sqrt{g} \sqrt{m}}\right)\right)}{\sqrt{c}}}}
```

```
In[14]:= vs2[t_] = sol2[[1, 1, 2]]
```

```
Out[14]= -\frac{\sqrt{g} \sqrt{m} \tan\left(\frac{\sqrt{c} \sqrt{g} t}{\sqrt{m}} - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{c} v_0}{\sqrt{g} \sqrt{m}}\right)\right)}{\sqrt{c}}
```

```
In[15]:= vers2 = eqs2 /. v -> vs2 // Simplify
```

```
Out[15]= {True, True}
```

```
In[16]:= VerticalMovement3 = m v'[t] == -m g + c v[t]^2
```

```
Out[16]= m v'(t) == c v(t)^2 - g m
```

```
In[17]:= ic3 = v[0] == 0;
```

```
In[18]:= eqs3 = {VerticalMovement3, ic3}
```

```
Out[18]= {m v'(t) == c v(t)^2 - g m, v(0) == 0}
```

```
In[19]:= sol3 = DSolve[eqs3, v[t], t]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
Out[19]= {{v(t) -> -\frac{\sqrt{g} \sqrt{m} \tanh\left(\frac{\sqrt{c} \sqrt{g} t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{c}}}}
```

```
In[20]:= vs3[t_] = sol3[[1, 1, 2]]
```

```
Out[20]= -\frac{\sqrt{g} \sqrt{m} \tanh\left(\frac{\sqrt{c} \sqrt{g} t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{c}}
```

```
In[21]:= vers3 = eqs3 /. v -> vs3 // Simplify
```

```
Out[21]= {True, True}
```

```
In[22]:= values = {m -> 1, g -> 9.81, c -> 1, v0 -> 0};
```

```
In[23]:= P1 = Plot[{vs1[t] /. values, vs3[t] /. values},
  {t, 0, 1}, PlotStyle -> Thickness[0.009], AxesLabel -> {"t", "v"},
  PlotLabel -> "ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΠΤΩΣΕΩΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ", DefaultFont -> "Arial-Bold";
```



■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC2 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

In[24]:= $\text{vde1a} = m u''[t] + c u'[t] + k u[t] == p[t]$

Out[24]= $k u(t) + c u'(t) + m u''(t) == p(t)$

In[25]:= $\text{vde2a} = \text{vde1a} /. c \rightarrow 0$

Out[25]= $k u(t) + m u''(t) == p(t)$

In[26]:= $\text{vde3a} = \text{vde1a} /. p[t] \rightarrow 0$

Out[26]= $k u(t) + c u'(t) + m u''(t) == 0$

In[27]:= $\text{vde4a} = \text{vde3a} /. c \rightarrow 0$

Out[27]= $k u(t) + m u''(t) == 0$

In[28]:= $\text{vde1b} = u''[t] + 2 \xi \omega_0 u'[t] + \omega_0^2 u[t] == p[t] / m$

Out[28]= $u(t) \omega_0^2 + 2 \xi u'(t) \omega_0 + u''(t) == \frac{p(t)}{m}$

In[29]:= $\text{vde2b} = \text{vde1b} /. \xi \rightarrow 0$

Out[29]= $u(t) \omega_0^2 + u''(t) == \frac{p(t)}{m}$

In[30]:= $\text{vde3b} = \text{vde1b} /. p[t] \rightarrow 0$

Out[30]= $u(t) \omega_0^2 + 2 \xi u'(t) \omega_0 + u''(t) == 0$

In[31]:= $\text{vde4b} = \text{vde3b} /. \xi \rightarrow 0$

Out[31]= $u(t) \omega_0^2 + u''(t) == 0$

In[32]:= $\omega_D = \omega_0 \text{Sqrt}[1 - \xi^2]$

Out[32]= $\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0$

In[33]:= $\text{uD}[t_] =$

$(1 / (m \omega_D)) \text{Integrate}[p[\tau] \text{Exp}[-\xi \omega_0 (t - \tau)] \text{Sin}[\omega_D (t - \tau)], \{\tau, 0, t\}] // \text{Simplify}$

Out[33]= $\frac{\int_0^t e^{\xi(\tau-t)\omega_0} p(\tau) \sin(\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\omega_0) d\tau}{m \sqrt{1-\xi^2} \omega_0}$

In[34]:= $\text{up0}[t_] = \text{uD}[t] /. p[\tau] \rightarrow p_0 // \text{FullSimplify}$

Out[34]= $\frac{p_0 \left(e^{-t\xi\omega_0} \left(-\cos(t\sqrt{1-\xi^2}\omega_0) - \frac{\xi \sin(t\sqrt{1-\xi^2}\omega_0)}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) + 1 \right)}{m \omega_0^2}$

In[35]:= $\text{values} = \{p_0 \rightarrow 1, m \rightarrow 1, \xi \rightarrow 0.05, \omega_0 \rightarrow 1\}$

Out[35]= $\{p_0 \rightarrow 1, m \rightarrow 1, \xi \rightarrow 0.05, \omega_0 \rightarrow 1\}$

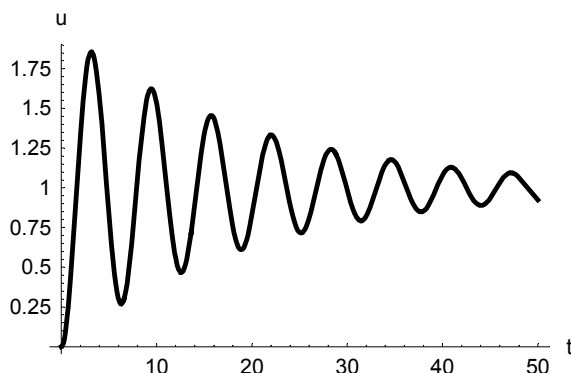
```
In[36]:= tb = Table[up0[t] /. values, {t, 0, 50}]
```

```
Out[36]= {0, 0.445008, 1.33325, 1.84539, 1.56914, 0.821214, 0.300892, 0.441757, 1.05764, 1.56449, 1.52921,
  1.03427, 0.556444, 0.512173, 0.898932, 1.33731, 1.43885, 1.14676, 0.754061, 0.613912, 0.824901,
  1.16901, 1.3325, 1.18952, 0.894324, 0.719682, 0.806918, 1.05479, 1.23113, 1.18847, 0.98497,
  0.813985, 0.822022, 0.985013, 1.14561, 1.16352, 1.03666, 0.889798, 0.853329, 0.948659, 1.07984,
  1.12868, 1.06029, 0.945658, 0.889481, 0.935347, 1.03342, 1.09291, 1.06546, 0.983343, 0.923616}
```

```
In[37]:= Max[tb]
```

```
Out[37]= 1.84539
```

```
In[38]:= Plot[up0[t] /. values, {t, 0, 50}, AxesLabel -> {t, u},
  PlotStyle -> Thickness[0.01], DefaultFont -> "Arial"];
```



■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC3 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```
In[39]:= comment1 =
```

"Παρουσιάζεται το ανεπιθύμητο φαινόμενο του συντονισμού. Αυτό συμβαίνει, επειδή η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής φορτίσεως ω_0 συμπίπτει με τη φυσική κυκλική συχνότητα (την ιδιοσυχνότητα) ω_0 του μηχανικού συστήματος. Η συνέπεια είναι ότι το εύρος ταλαντώσεων της μετατοπίσεως του υλικού σημείου αυξάνει συνεχώς με το χρόνο t . Τούτο έχει σαν πιθανή συνέπεια την καταστροφή του μηχανικού συστήματος (εδώ του ελατηρίου) και γενικότερα της κατασκευής. Η πιο πάνω συνθήκη συντονισμού πρέπει επομένως να αποφεύγεται από τον Πολιτικό Μηχανικό στις μελέτες του για κατασκευές.";

```
In[40]:= rde = u''[t] + \omega_0^2 u[t] == p_0 Sin[\omega_0 t];
```

```
In[41]:= ics = {u[0] == 0, u'[0] == 0};
```

```
In[42]:= solrde = DSolve[{rde, ics}, u[t], t] // Simplify
```

```
Out[42]= {{u(t) -> \frac{p_0 (\sin(t\omega_0) - t\omega_0 \cos(t\omega_0))}{2\omega_0^2}}}
```

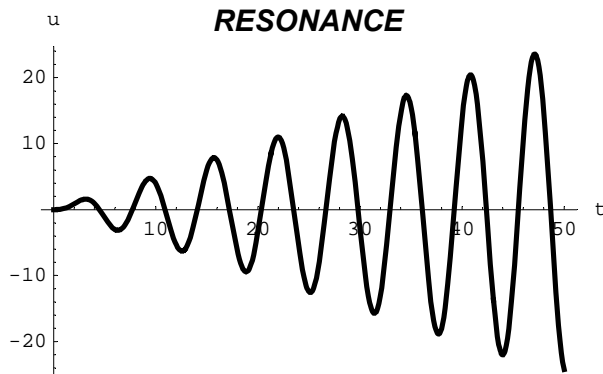
```
In[43]:= ur[t_] = solrde[[1, 1, 2]]
```

```
Out[43]= \frac{p_0 (\sin(t\omega_0) - t\omega_0 \cos(t\omega_0))}{2\omega_0^2}
```

```
In[44]:= ver = {rde, ics} /. u -> ur // Simplify
```

```
Out[44]= {True, {True, True}}
```

```
In[45]:= Pr = Plot[ur[t] /. {p0 -> 1, ω0 -> 1}, {t, 0, 50}, AxesLabel -> {t, u},
    PlotLabel -> FontForm["RESONANCE", {"Arial-BoldItalic", 14}],
    PlotStyle -> Thickness[0.01]];
```



```
In[46]:= nde = rde[[1]] == p0 Sin[ω t]
```

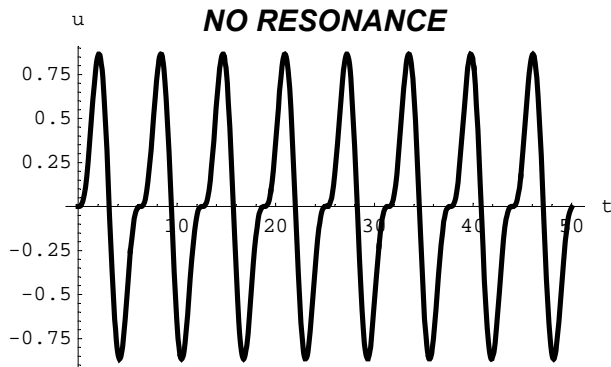
```
Out[46]= u(t) ω0^2 + u''(t) == p0 sin(t ω)
```

```
In[47]:= un[t_] = DSolve[{nde, ics}, u[t], t][[1, 1, 2]] // Simplify
```

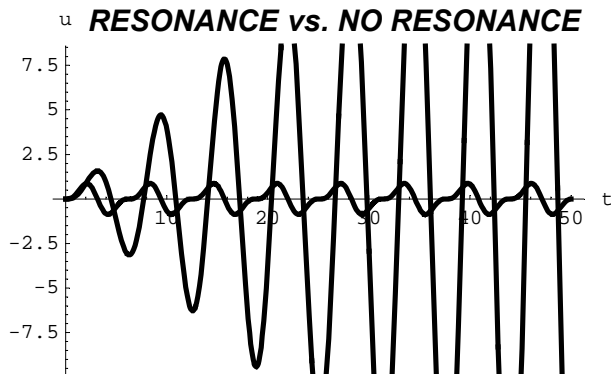
```
Out[47]= 
$$\frac{p_0(\omega_0 \sin(t\omega) - \omega \sin(t\omega_0))}{\omega_0^3 - \omega^2 \omega_0}$$

```

```
In[48]:= Pn = Plot[un[t] /. {p0 -> 1, ω0 -> 1, ω -> 2}, {t, 0, 50}, AxesLabel -> {t, u},
    PlotLabel -> FontForm["NO RESONANCE", {"Arial-BoldItalic", 14}],
    PlotStyle -> Thickness[0.01]];
```



```
In[49]:= Show[Pr, Pn, PlotLabel ->
    FontForm[" RESONANCE vs. NO RESONANCE", {"Arial-BoldItalic", 14}]];
```



In[50]:= comment2 =

"Είναι σαφές ότι το εύρος των ταλαντώσεων στην περίπτωση δύο διαφορετικών κυκλικών συχνοτήτων ω και ω_0 παραμένει σταθερό με το χρόνο t . Αντίθετα στην περίπτωση δύο ίσων κυκλικών συχνοτήτων ω_0 (δηλαδή όταν παρουσιάζεται το ανεπιθύμητο φαινόμενο του συντονισμού) το εύρος των ταλαντώσεων αυξάνεται συνεχώς με το χρόνο t (συγκεκριμένα έχει γραμμική αύξηση). Το συμπέρασμα είναι και πάλι ότι θα πρέπει με κάθε δυνατό τρόπο να αποφεύγεται το φαινόμενο του συντονισμού σε κάθε κατασκευή του Πολιτικού Μηχανικού.";

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC4 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

In[51]:= VibrationsODE = u''[t] + ω_0^2 u[t] == p[t]

Out[51]= $u(t)\omega_0^2 + u''(t) == p(t)$

In[52]:= vde = VibrationsODE

Out[52]= $u(t)\omega_0^2 + u''(t) == p(t)$

In[53]:= sol = DSolve[vde, u[t], t]

Out[53]= $\left\{ \left\{ u(t) \rightarrow c_1 \cos(t\omega_0) + c_2 \sin(t\omega_0) + \frac{1}{\omega_0} \left(\int_{K\$1437}^t \cos(K\$1436 \omega_0) p(K\$1436) dK\$1436 \right) \sin(t\omega_0) - \cos(t\omega_0) \int_{K\$1423}^t p(K\$1422) \sin(K\$1422 \omega_0) dK\$1422 \right\} \right\}$

In[54]:= {p1[t_] = a2 t² + a1 t + a0, u1[t_] = A t² + B t + C,
u1g[t_] = DSolve[vde /. p -> p1, u[t], t][[1, 1, 2]]}

Out[54]= $\left\{ a_2 t^2 + a_1 t + a_0, A t^2 + B t + C, \frac{a_2 t^2 \omega_0^2 + a_0 \omega_0^2 + a_1 t \omega_0^2 - 2 a_2}{\omega_0^4} + c_1 \cos(t\omega_0) + c_2 \sin(t\omega_0) \right\}$

In[55]:= {p2[t_] = a Cos[$\omega t - \alpha$], u2[t_] = A Cos[$\omega t - \alpha$],
u2g[t_] = DSolve[vde /. p -> p2, u[t], t][[1, 1, 2]] // Simplify}

Out[55]= $\left\{ a \cos(\alpha - t\omega), A \cos(\alpha - t\omega), \frac{a \cos(\alpha - t\omega) - (\omega^2 - \omega_0^2)(c_1 \cos(t\omega_0) + c_2 \sin(t\omega_0))}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} \right\}$

In[56]:= {p3[t_] = a Cos[$\omega_0 t - \alpha$], u3[t_] = t (A Cos[$\omega_0 t - \alpha$] + B Sin[$\omega_0 t - \alpha$]),
u3g[t_] = DSolve[vde /. p -> p3, u[t], t][[1, 1, 2]] // Simplify}

Out[56]= $\left\{ a \cos(\alpha - t\omega_0), t(A \cos(\alpha - t\omega_0) - B \sin(\alpha - t\omega_0)), c_1 \cos(t\omega_0) + \frac{a \cos(\alpha - t\omega_0)}{4 \omega_0^2} + c_2 \sin(t\omega_0) - \frac{a t \sin(\alpha - t\omega_0)}{2 \omega_0} \right\}$

In[57]:= {p4[t_] = a + b Exp[-2 t] + c Sin[$\omega_0 t$],
u4[t_] = A + B Exp[-2 t] + t (C Cos[$\omega_0 t$] + D Sin[$\omega_0 t$]),
u4g[t_] = DSolve[vde /. p -> p4, u[t], t][[1, 1, 2]] // FullSimplify}

Out[57]= $\left\{ a + b e^{-2t} + c \sin(t\omega_0), A + B e^{-2t} + C t \cos(t\omega_0) + D t \sin(t\omega_0), \frac{a}{\omega_0^2} + \left(c_1 - \frac{c t}{2 \omega_0} \right) \cos(t\omega_0) + \left(\frac{c}{4 \omega_0^2} + c_2 \right) \sin(t\omega_0) + \frac{b e^{-2t}}{\omega_0^2 + 4} \right\}$

```
In[58]:= comment3 =
      "Ναι συμφωνούν σ' όλες τις περιπτώσεις. Εννοείται ότι η Mathematica έδωσε τη
      γενική λύση, της οποίας όμως ένα μέρος είναι η μερική λύση που έχει
      υποτεθεί. Το υπόλοιπο μέρος αποτελεί τη γενική λύση της αντίστοιχης
      ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, όπως μπορεί πολύ εύκολα να διαπιστωθεί.";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC5 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ, ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```
In[59]:= BeamODE1 = EI v''''[x] == p[x]
Out[59]= EI v^(4)(x) == ρ(x)

In[60]:= BeamODE2 = EI v''''[x] + k v[x] == p[x]
Out[60]= k v(x) + EI v^(4)(x) == ρ(x)

In[61]:= BeamODE3a = EI X''''[x] - ρA ω^2 X[x] == 0
Out[61]= EI X^(4)(x) - ρA ω^2 X(x) == 0

In[62]:= BeamODE3b = X''''[x] - β^4 X[x] == 0
Out[62]= X^(4)(x) - β^4 X(x) == 0

In[63]:= sol3b = DSolve[BeamODE3b, X[x], x]
Out[63]= {{X(x) → e^{-xβ} c2 + e^{xβ} c4 + c1 cos(xβ) + c3 sin(xβ)}}

In[64]:= X1[x_] = sol3b[[1, 1, 2]]
Out[64]= e^{-xβ} c2 + e^{xβ} c4 + c1 cos(xβ) + c3 sin(xβ)

In[65]:= X2[x_] = X1[x] // ExpToTrig // Simplify
Out[65]= c1 cos(xβ) + (c2 + c4) cosh(xβ) + c3 sin(xβ) + (c4 - c2) sinh(xβ)

In[66]:= ver = BeamODE3b /. X → X2 // Simplify
Out[66]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MC6 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```
In[67]:= Clear[X]

In[68]:= beamde = X''''[x] - β^4 X[x] == 0
Out[68]= X^(4)(x) - β^4 X(x) == 0

In[69]:= bcs = {X[0] == 0, X''[0] == 0, X[L] == 0, X''[L] == 0}
Out[69]= {X(0) == 0, X''(0) == 0, X(L) == 0, X''(L) == 0}

In[70]:= sol = DSolve[{beamde, bcs}, X[x], x]
Out[70]= {{X(x) → 0}}
```

In[71]:= **comment4** = "Η πιο πάνω λύση είναι απογοητευτική, γιατί είναι η τετριμμένη, η μηδενική λύση, δηλαδή η λύση που δηλώνει την πλήρη έλλειψη καμπτικών ταλαντώσεων της δοκού μας. Αντίθετα για ορισμένες τιμές, τις ιδιοτιμές β_n της σταθεράς β , παίρνουμε αληθινές ταλαντώσεις, τις ιδιοταλαντώσεις. Σ' αυτές αντιστοιχούν οι ιδιομορφές ταλαντώσεων $X_n(x)$, που δίνονται στην επόμενη εντολή.";

In[72]:= **list** = **Table**[**v**[**n**, **x**] = **Sin**[**n** π **x** / **L**], {**n**, 5}]

Out[72]= $\left\{ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) \right\}$

In[73]:= **WM** = {**list**, **D**[**list**, **x**], **D**[**list**, {**x**, 2}], **D**[**list**, {**x**, 3}], **D**[**list**, {**x**, 4}]}

Out[73]=
$$\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) & \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) & \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) \\ \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} & \frac{2\pi \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L} & \frac{3\pi \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)}{L} & \frac{4\pi \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)}{L} & \frac{5\pi \cos\left(\frac{5\pi x}{L}\right)}{L} \\ -\frac{\pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} & -\frac{4\pi^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L^2} & -\frac{9\pi^2 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)}{L^2} & -\frac{16\pi^2 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)}{L^2} & -\frac{25\pi^2 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)}{L^2} \\ -\frac{\pi^3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^3} & -\frac{8\pi^3 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L^3} & -\frac{27\pi^3 \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)}{L^3} & -\frac{64\pi^3 \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)}{L^3} & -\frac{125\pi^3 \cos\left(\frac{5\pi x}{L}\right)}{L^3} \\ \frac{\pi^4 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} & \frac{16\pi^4 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L^4} & \frac{81\pi^4 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)}{L^4} & \frac{256\pi^4 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)}{L^4} & \frac{625\pi^4 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)}{L^4} \end{pmatrix}$$

In[74]:= **W** = **Det**[**WM**] // **Simplify**

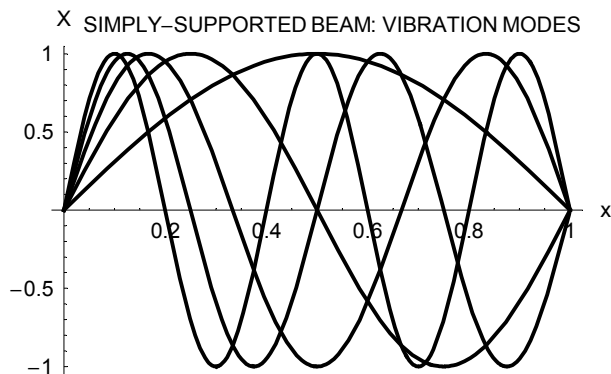
Out[74]=
$$\frac{294912\pi^{10} \sin^{15}\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^{10}}$$

In[75]:= **comment5** = "Πάρα πολύ μεγάλος χρόνος, πολλές ώρες ίσως και πολύ μεγαλύτερος. Και πάντοτε με τον κίνδυνο κάποιου λάθους με το χέρι, κάτι που δεν ισχύει στους υπολογισμούς με τη *Mathematica* τουλάχιστον σ' αυτήν την περίπτωση.";

In[76]:= **comment6** =

"Από τον πιο πάνω υπολογισμό της ορίζουσας Wronski W , η οποία προέκυψε μη μηδενική, συνάγεται ότι οι παραπάνω ιδιομορφές ταλαντώσεων είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις. Τούτο είναι πολύ σημαντικό για τον Πολιτικό Μηχανικό σε προβλήματα καμπτικών ταλαντώσεων δοκών (είτε ελεύθερων είτε εξαναγκασμένων), τα οποία αναλύονται κατάλληλα σε ιδιομορφές ταλαντώσεων με πλήρωση μάλιστα και όλων των συνοριακών συνθηκών. Αυτό το θέμα θα εξετασθεί λεπτομερώς στο επόμενο μάθημα: στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III.";

In[77]:= **Plot**[**Evaluate**[**list** /. **L** → 1], {**x**, 0, 1},
PlotStyle → **Thickness**[0.008], **AxesLabel** → {**x**, **X**}, **DefaultFont** → "Arial",
PlotLabel → "SIMPLY-SUPPORTED BEAM: VIBRATION MODES";



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-MD

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD1 (Ορθογώνιες Τροχιές, Ρευστομηχανική): Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε εδώ τη μόνιμη, διδιάστατη, αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού η οποία οφείλεται σε σημειακή πηγή (ή καταβόθρα) στην αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . Ζητούνται: (1) Λίστα δύο εντολών για τη μη εμφάνιση πιθανών ορθογραφικών λαθών. Οι εξισώσεις (2) eq 1 των γραμμών ροής και (3) eq2 των ισοδυναμικών γραμμών. Στη συνέχεια με τη χρήση ειδικής εντολής απαλοιφής οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις (4) ODE1 και (5) ODE2. Μετά οι αντίστοιχες κλίσεις (6) Dy1 και (7) Dy2. Έπειτα (8) η επαλήθευση verification της ορθογωνιότητας των γραμμών αυτών. (9) Λίστα OList4 τεσσάρων επιστημονικών περιοχών του Πολιτικού Μηχανικού όπου παρουσιάζονται οι ορθογώνιες τροχιές.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD2 (Μηχανική των Υλικών: Λυγισμός): Στο φαινόμενο το λυγισμού στύλου προκύπτει η τετραπαραμετρική οικογένεια των συναρτήσεων $y_s(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx$ με παραμέτρους τα $C_{1,2,3,4}$ και το k «γνωστή» σταθερά. Ζητούνται: (10) Η δήλωσή της σαν συνάρτηση. (11) Η αντίστοιχη εξίσωση eq 1: $y(x) = y_s(x)$. (12) Λίστα Solutions των σχετικών συναρτήσεων και (13) απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας τους με τη χρήση ορίζουσας $W(x)$ (και με απλοποίηση). (14) Η λίστα SAF των συναρτήσεων Solutions με προσθήκη στο τέλος και της συναρτήσεως $y(x)$. (15) Η διαφορική εξίσωση ode 1 που επαληθεύουν οι συναρτήσεις $y_s(x)$ με χρήση ορίζουσας και απλοποίηση. (16) Λίστα πέντε εξισώσεων ListOfEquations με πρώτο στοιχείο την εξίσωση eq 1, δεύτερο στοιχείο eq2 την πρώτη παράγωγο της εξισώσεως eq 1 και ανάλογα μέχρι και το πέμπτο στοιχείο αυτής της λίστας. (17) Η λίστα ListOfConstants των προς απαλοιφή παραμέτρων $C_{1,2,3,4}$. (18) Με τη χρήση ειδικής εντολής απαλοιφής ο σχηματισμός ode2 (με δεύτερο τρόπο) της ίδιας παραπάνω διαφορικής εξισώσεως. (19) Η κατευθείαν αναφορά αυτής της διαφορικής εξισώσεως ode. (20) Σε ποιο συγκεκριμένο πρόβλημα της Μηχανικής των Υλικών παρουσιάζεται; (21) Για ποιο λόγο μπήκαν τα εισαγωγικά στη λέξη «γνωστή» στη δεύτερη γραμμή;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD3 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) με δυσκαμψία EI σε κάμψη. Ζητούνται: Για το βέλος κάμψεως της $v(x)$ οι σχετικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (22) bde 1 με τη ροπή κάμψεως (καμπτική ροπή) $M(x)$ και (23) bde2 με την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$. (24) Από την εξίσωση bde2 η αντίστοιχη εξίσωση bde2a με $p(x) = p_0$. Οι συνοριακές συνθήκες για τη διαφορική εξίσωση bde2 στις περιπτώσεις: (25) αμφίπακτης δοκού: bc 1, (26) μονόπακτης υπερστατικής δοκού με την πάκτωση αριστερά: bc2, (27) προβόλου με την πάκτωση αριστερά: bc3a και (28) δεξιά: bc3b, (29) αμφιέριστης δοκού: bc4 και (30) απόλυτα ελεύθερης δοκού: bc5 με (31) αρνητικό σχόλιο comment 1 για την τελευταία και γιατί. (32) Επίσης σχόλιο comment2 για το σε ποια διαφορετική δοκό θα ίσχυε θετικό σχόλιο και γιατί. Στη συνέχεια (33) η λύση solution4 του προβλήματος συνοριακών τιμών για την αμφιέριστη δοκό με σταθερή φόρτιση $p(x) = p_0$ (με απλοποίησή της) και (34) το αντίστοιχο βέλος κάμψεως $v_{s4}(x)$ με (35) πλήρη επαλήθευσή του BeamDeflectionFullVerification.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD4 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε δοκό δυσκαμψίας EI σε κάμψη με ροπή κάμψεως $M(x)$ γνωστή. Ζητούνται: (36) Η σχετική μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως BeamNonlinearODE ως προς το βέλος κάμψεως $v(x)$. (37) Από αυτήν η αντίστοιχη γραμμική εξίσωση BeamLinearODE (με γραμμικοποίηση). Τέλος (38) η λύση sol της τελευταίας εξισώσεως (με απλοποίηση) και (39) το αντίστοιχο βέλος κάμψεως $v_s(x)$ με (40) επαλήθευσή του.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD5 (Ταλαντώσεις): Θεωρούμε τις χωρίς απόσβεση ελεύθερες ταλαντώσεις σε απλό εκκρεμές με την (κυκλική) συχνότητά τους ω_0 γνωστή. Ζητούνται: (41) Η σχετική μη γραμμική διαφορική εξίσωση PendulumNonlinearODE ως προς τη γωνία $\theta(t)$, (42) η λύση της solh (με απλοποίηση), που περιλαμβάνει την ειδική συνάρτηση JacobiAmplitude (am) και (43) απλή πληροφόρηση από τη Mathematica για τη συνάρτηση αυτή. (44) Από την εξίσωση PendulumNonlinearODE η αντίστοιχη γραμμική εξίσωση PendulumLinearODE (με τη σωστή γραμμικοποίηση) και (45) η λύση της soll (με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD6 (Παραδείγματα και Εφαρμογές Διαφορικών Εξισώσεων): Ζητούνται: (46) Η διαφορική εξίσωση SeparatedVariablesODE για τις ταλαντώσεις συστήματος υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) με βάση την ενεργειακή τους θεώρηση και (47) οι χαρακτηρισμοί της characterizations1. (48) Η διαφορική εξίσωση LinearODE1 για τη μεταφορά ρύπου με διάχυση (με συντελεστή D) και μεταγωγή (με ταχύτητα V) μαζί με αποδόμηση του ρύπου (με συντελεστή k) και από αυτήν οι αντίστοιχες εξισώσεις είτε (49) χωρίς διάχυση του ρύπου LinearODE1a είτε (50) χωρίς αποδόμηση του ρύπου LinearODE1b. (51) Η διαφορική εξίσωση LinearODE2 για την αξονική μετατόπιση $w(z)$ των σημείων πασσάλου σε θεμελίωση στο έδαφος με τη συνολική σταθερά η γνωστή, (52) οι χαρακτηρισμοί της characterizations2, (53) η λύση της sol2, (54) η σχετική συνάρτηση $w_{s1}(z)$ και (55) η κατευθείαν γραφή $w_{s2}(z)$ της ίδιας λύσεως. (56) Παράδειγμα EulerODE μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης Euler σε επιφανειακό φορέα και (57) η γενική λύση της sol. Σχόλια (58) comment3 για το φορέα, (59) comment4 τη φόρτισή του και (60) comment5 για τη λύση sol.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD7 (Ταλαντώσεις): Θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με (μη ανηγμένη) φόρτιση $p(t)$ σε μηχανικό σύστημα μάζας m και ελατηρίου χωρίς απόσβεση (με $\xi = 0$) και με γνωστή κυκλική συχνότητα ω_0 . Ζητούνται: (61) Η σχετική διαφορική εξίσωση vde και στη συνέχεια οι συναρτήσεις που πρέπει να υποτεθούν στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (A, B, C , κλπ.) για φορτίσεις: (62) p_0 , (63) e^{at} , (64) $\cosh at$, (65) $\cos \omega t$ με $\omega \neq \omega_0$ (η πιο απλή δυνατότητα), (66) $\cos \omega_0 t$, (67) at^2 .

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD8 (Ταλαντώσεις): Εξετάζουμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με φόρτιση $p(t)$ σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m), ελατηρίου (σταθεράς k) και αποσβεστήρα (σταθεράς c). Ζητούνται: (68) Η σχετική διαφορική εξίσωση vde1a (με σταθερές m, c, k) και από αυτήν (69) η αντίστοιχη εξίσωση σε ελεύθερες ταλαντώσεις vde2a και (70) χωρίς τον αποσβεστήρα vde3a, αλλά σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, και από αυτήν (71) σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση vde4a. Οι τέσσερις αντίστοιχες εξισώσεις (72) vde1b (κατευθείαν γραφή), (73) vde2b (εύρεση) (74) vde3b (εύρεση) και (75) vde4b (εύρεση) με κατάλληλη χρήση των σταθερών m, ω_0 και ξ σε συτές. (76) Απλές πληροφορίες από τη Mathematica για την εντολή DSolve, (77) λίστα lst για τις ιδιότητές της και (78) ο αριθμός τους. (79) Η λύση sol4b της διαφορικής εξίσωσης vde4b, (80) η σχετική συνάρτηση $u_{4b}(t)$ και (81) η επαλήθευσή της ver. (82) Άμεσα η λίστα solutions4b των μερικών λύσεων στη γενική λύση $u_{4b}(t)$ και (83) απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας τους (με απλοποίηση). Κατευθείαν οι τύποι της αποκρίσεως $u(t)$ σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (84) χωρίς απόσβεση $u_{D1}(t)$, (85) με ασθενή $u_{D2}(t)$ και (86) με ισχυρή απόσβεση $u_{D3}(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD9 (Δυναμική των Κατασκευών): Θεωρούμε τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα ελεύθερες ταλαντώσεις αμφιέριστης δοκού μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI . Ζητούνται: (87) Η σχετική διαφορική εξίσωση vbde ως προς το προσημασμένο εύρος τους $X(x)$, (88) η γενική λύση της solnbde και (89) η αντίστοιχη συνάρτηση $X_{s1}(x)$ (90) τελικά σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή $X_{s2}(x)$ (με απλοποίηση). (91) Η κατευθείαν γραφή της ίδιας λύσεως $X_{s3}(x)$ στη συνήθη μορφή της. (92) Η λίστα SolutionsList των σχετικών μερικών λύσεων και (93) η απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας τους (και με απλοποίηση). (94) Θετικό ή αρνητικό (εξαρτάται ...) υπολογιστικό σχόλιο comment6 για την προηγούμενη εντολή. (95) Λίστα BeamFrequenciesList των έξι πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ω_n και (96) η αντίστοιχη λίστα BeamVibrationModesList των γνωστών σχετικών ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$ χωρίς όμως τις πολλαπλασιαστικές σταθερές D_n σ' αυτές.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD10 (Μηχανική των Υλικών: Λυγισμός): Θεωρούμε εδώ το λυγισμό κυκλικού στύλου (ή υποστυλώματος) μήκους L και δυσκαμψίας EI υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο P . Ζητούνται: (97) Άμεσα η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως BucklingDE1. (98) Κατευθείαν η ισοδύναμη εξίσωση BucklingDE2 με τη βοηθητική σταθερά k και (99) η λύση της SolutionBucklingDE2. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού (αριθμητικά όσο είναι δυνατόν) για (100) στύλο με πάκτωση στο ένα άκρο του κι ελεύθερο το άλλο P_{cr1} , (101) για αμφιαρθρωτό στύλο P_{cr2} και (102) για αμφίπακτο στύλο P_{cr3} .

■ Notebook EMII-MD

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMII-MD (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMII-MD1 ΕΩΣ EMII-MD10)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD1 (ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ, ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

```
In[2]:= eq1 = y[x] == k x;
```

```
In[3]:= eq2 = x^2 + y[x]^2 == a^2;
```

```
In[4]:= ODE1 = Eliminate[{eq1, D[eq1, x]}, k]
```

```
Out[4]= x y'(x) == y(x)
```

```
In[5]:= ODE2 = Eliminate[{eq2, D[eq2, x]}, a]
```

```
Out[5]= y(x) y'(x) == -x
```

```
In[6]:= Dy1 = Solve[ODE1, y'[x]] [[1, 1, 2]]
```

```
Out[6]=  $\frac{y(x)}{x}$ 
```

```
In[7]:= Dy2 = Solve[ODE2, y'[x]] [[1, 1, 2]]
```

```
Out[7]=  $-\frac{x}{y(x)}$ 
```

```
In[8]:= verification = Dy1 Dy2 == -1
```

```
Out[8]= True
```

```
In[9]:= OT1List4 = {"1. Βαρύτητα με τις γραμμές εντάσεως  
του πεδίου βαρύτητας και τις ισοδυναμικές γραμμές",  
"2. Μετάδοση θερμότητας με τις γραμμές ροής της θερμότητας  
και τις ισόθερμες (ή ισοθερμοκρασιακές) γραμμές",  
"3. Ρευστομηχανική με τις γραμμές ροής και τις ισοδυναμικές γραμμές",  
"4. Γεωδαισία με τις ισοϋψείς καμπύλες και τις καμπύλες της κλίσεως"};
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD2 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΛΥΓΙΣΜΟΣ)

```
In[10]:= ys[x_] = C1 + C2 x + C3 Cos[k x] + C4 Sin[k x];
```

```
In[11]:= eq1 = y[x] == ys[x]
```

```
Out[11]= y(x) == C1 + C2 x + C3 cos(k x) + C4 sin(k x)
```

```
In[12]:= Solutions = {1, x, Cos[k x], Sin[k x]}
```

```
Out[12]= {1, x, cos(k x), sin(k x)}
```

```

In[13]:= W[x] =
      Det[{Solutions, D[Solutions, x], D[Solutions, {x, 2}], D[Solutions, {x, 3}]}] //
      Simplify

Out[13]= k5

In[14]:= SAF = Append[Solutions, y[x]]

Out[14]= {1, x, cos(k x), sin(k x), y(x)}

In[15]:= ode1 = Det[{SAF, D[SAF, x], D[SAF, {x, 2}], D[SAF, {x, 3}], D[SAF, {x, 4}]}] == 0 //
      Simplify

Out[15]= y''(x) k7 + y(4)(x) k5 == 0

In[16]:= ListOfEquations =
      {eq1, eq2 = D[eq1, x], eq3 = D[eq2, x], eq4 = D[eq3, x], eq5 = D[eq4, x]}

Out[16]= {y(x) == C1 + C2 x + C3 cos(k x) + C4 sin(k x),
      y'(x) == C2 + C4 k cos(k x) - C3 k sin(k x), y''(x) == -C3 cos(k x) k2 - C4 sin(k x) k2,
      y(3)(x) == C3 k3 sin(k x) - C4 k3 cos(k x), y(4)(x) == C3 cos(k x) k4 + C4 sin(k x) k4}

In[17]:= ListOfConstants = {C1, C2, C3, C4};

In[18]:= ode2 = Eliminate[ListOfEquations, ListOfConstants]

Out[18]= -y(4)(x) == k2 y''(x)

In[19]:= ode = y''''[x] + k2 y''[x] == 0

Out[19]= y''(x) k2 + y(4)(x) == 0

In[20]:= "Η διαφορική αυτή εξίσωση παρουσιάζεται στο πρόβλημα του λυγισμού ελαστικού
      στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος) σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία
      του Euler, που πρώτος έλυσε ένα τέτοιο πρόβλημα. Η θεωρία του
      λυγισμού μελετάται στη Μηχανική των Υλικών και πολύ εκτενέστερα
      στην Ελαστική Ευστάθεια, όπου βέβαια ο Πολιτικός Μηχανικός δεν
      περιορίζεται σε στύλους. Φυσικά πολύ ακριβέστερη και πλησιέστερη
      στην πραγματικότητα είναι η αντίστοιχη μη γραμμική θεωρία.";

In[21]:= "Τα εισαγωγικά μπήκαν εδώ στη λέξη γνωστή, απλά επειδή μερικές φορές,
      όχι πάντοτε, στο πρόβλημα του λυγισμού ελαστικού στύλου (ή ράβδου
      ή υποστυλώματος), όπου αναφερόμαστε εδώ, η βοηθητική σταθερά k δεν
      είναι γνωστή εκ των προτέρων. Αντίθετα χρησιμοποιείται συχνά για τον
      προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού Pcr για το στύλο που εξετάζεται
      μετά βέβαια από τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών της (ή χαρακτηριστικών
      τιμών της) με βάση τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του στύλου.";

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD3 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```

In[22]:= bde1 = EI v''[x] == M[x]

Out[22]= EI v''(x) == M(x)

In[23]:= bde2 = EI v''''[x] == p[x]

Out[23]= EI v(4)(x) == p(x)

```

```

In[24]:= bde2a = bde2 /. p[x] -> p0
Out[24]= EI v^(4)(x) == p0

In[25]:= bc1 = {v[0] == 0, v'[0] == 0, v[L] == 0, v'[L] == 0};
In[26]:= bc2 = {v[0] == 0, v'[0] == 0, v[L] == 0, v''[L] == 0};
In[27]:= bc3a = {v[0] == 0, v'[0] == 0, v''[L] == 0, v'''[L] == 0};
In[28]:= bc3b = {v''[0] == 0, v'''[0] == 0, v[L] == 0, v'[L] == 0};
In[29]:= bc4 = {v[0] == 0, v''[0] == 0, v[L] == 0, v'''[L] == 0};
In[30]:= bc5 = {v''[0] == 0, v'''[0] == 0, v''[L] == 0, v'''[L] == 0};

In[31]:= comment1 =
  "Αρνητικό σχόλιο: Η δοκός αυτή δεν είναι στατικά αποδεκτή. Δε μπορούν να
  ισχύσουν οι εξισώσεις ισορροπίας, επειδή δεν υπάρχουν καθόλου στηρίξεις
  της δοκού ικανές να αναπτύξουν αντιδράσεις ή/και ροπές πακτώσεως.
  Αντίθετα μια ελεύθερη δοκός είναι απόλυτα αποδεκτή στη
  Δυναμική των Κατασκευών. Εκεί όμως δεν ισορροπεί: κινείται!";

In[32]:= comment2 = "Θετικό σχόλιο: Η αντίστοιχη αποδεκτή δοκός είναι η δοκός
  επί ελαστικής βάσεως, π.χ. μια πεδιλοδοκός (ή θεμελιοδοκός) στις
  Επιφανειακές Θεμελιώσεις ή μια σιδηροτροχιά στη Σιδηροδρομική. Σε
  μια δοκό επί ελαστικής βάσεως η στήριξη της πάνω στην ελαστική βάση,
  συνήθως στο έδαφος, επιτρέπει την πλήρωση των εξισώσεων ισορροπίας.";

In[33]:= solution4 = DSolve[{bde2a, bc4}, v[x], x] // Simplify
Out[33]= {{v(x) -> \frac{p0 x(L^3 - 2 x^2 L + x^3)}{24 EI}}}

In[34]:= vs4[x_] = solution4[[1, 1, 2]]
Out[34]= \frac{p0 x(L^3 - 2 x^2 L + x^3)}{24 EI}

In[35]:= BeamDeflectionFullVerification = {bde2a, bc4} /. v -> vs4
Out[35]= {True, {True, True, True, True}}

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD4 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```

In[36]:= BeamNonlinearODE = EI v''[x] / (1 + v'[x]^2)^(3/2) == M[x]
Out[36]= \frac{EI v''(x)}{(v'(x)^2 + 1)^{3/2}} == M(x)

In[37]:= BeamLinearODE = BeamNonlinearODE /. v'[x] -> 0
Out[37]= EI v''(x) == M(x)

In[38]:= sol = DSolve[BeamLinearODE, v[x], x] // Simplify
Out[38]= {{v(x) -> C1 + x C2 + \frac{\int_0^x \int_0^{K\$55} M(K\$28) dK\$28 dK\$55}{EI}}}

```

```
In[39]:= vs[x_] = sol[[1, 1, 2]]
```

```
Out[39]= c1 + x c2 +  $\frac{\int_{K\$56}^x (K\$55 M(K\$28) dK\$28) dK\$55}{EI}$ 
```

```
In[40]:= ver = BeamLinearODE /. v -> vs
```

```
Out[40]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD5 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```
In[41]:= PendulumNonlinearODE = θ''[t] + ω0^2 Sin[θ[t]] == 0
```

```
Out[41]= Sin(θ(t)) ω0^2 + θ''(t) == 0
```

```
In[42]:= soln = DSolve[PendulumNonlinearODE, θ[t], t] // Simplify
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
Out[42]= {{θ(t) -> 2 am $\left(-\frac{1}{2} \sqrt{(2 \omega_0^2 + c_1)(t + c_2)^2} \mid \frac{4 \omega_0^2}{2 \omega_0^2 + c_1}\right)$ },
          {θ(t) -> 2 am $\left(\frac{1}{2} \sqrt{(2 \omega_0^2 + c_1)(t + c_2)^2} \mid \frac{4 \omega_0^2}{2 \omega_0^2 + c_1}\right)$ }}
```

```
In[43]:= ? JacobiAmplitude
```

JacobiAmplitude[u, m] gives the amplitude am(u | m) for Jacobi elliptic functions. More...

```
In[44]:= PendulumLinearODE = PendulumNonlinearODE /. Sin[θ[t]] -> θ[t]
```

```
Out[44]= θ(t) ω0^2 + θ''(t) == 0
```

```
In[45]:= sol1 = DSolve[PendulumLinearODE, θ[t], t] // Simplify
```

```
Out[45]= {{θ(t) -> c1 Cos(t ω0) + c2 Sin(t ω0)}}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD6 (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ)

```
In[46]:= SeparatedVariablesODE = (1/2) m u'[t]^2 + (1/2) k u[t]^2 == E;
```

```
In[47]:= characterizations1 = {"συνήθης διαφορική εξίσωση", "μη γραμμική",
                              "πρώτης τάξεως", "δευτέρου βαθμού", "χωριζόμενων μεταβλητών"};
```

```
In[48]:= LinearODE1 = D c'[x] - V c'[x] - k c[x] == 0;
```

```
In[49]:= LinearODE1a = LinearODE1 /. D -> 0
```

```
Out[49]= -k c(x) - V c'(x) == 0
```

```
In[50]:= LinearODE1b = LinearODE1 /. k -> 0
```

```
Out[50]= D c''(x) - V c'(x) == 0
```

```

In[51]:= LinearODE2 = w''[z] == η² w[z]

Out[51]= w''(z) == η² w(z)

In[52]:= characterizations2 = {"σνήθης διαφορική εξίσωση", "γραμμική",
    "δευτέρασ τάξεωσ", "πρώτου βαθμού", "ομογενήσ", "με σταθερούσ συντελεστέσ"};

In[53]:= sol2 = DSolve[LinearODE2, w[z], z]

Out[53]= {{W(z) → e^{zη} C1 + e^{-zη} C2}}

In[54]:= ws1[z_] = sol2[[1, 1, 2]]

Out[54]= e^{zη} C1 + e^{-zη} C2

In[55]:= ws2[z_] = C[1] e^{η z} + C[2] e^{-η z}

Out[55]= e^{zη} C1 + e^{-zη} C2

In[56]:= EulerODE = r⁴ w''''[r] + 2 r³ w''''[r] - r² w''[r] + r w'[r] == (p0 / D) r⁴;

In[57]:= sol = DSolve[EulerODE, w[r], r]

Out[57]= {{w(r) → \frac{p0 r⁴}{64 D} + \frac{1}{4} (2 c2 - c3) r² + \frac{1}{2} c3 \log(r) r² + c4 + c1 \log(r)}}

In[58]:= comment3 =
    "Ο φορέασ αυτόσ είναι επιφανειακόσ φορέασ, συγκεκριμένα μια σνήθης κυκλική
    πλάκα με τισ σχετικέσ απλοποιητικέσ παραδοχέσ στη θεωρία, συγκεκριμένα
    με τισ υποθέσεισ του Kirchhoff στη θεωρία των σνήθων πλακών. Μπορεί
    επίσησ να είναι και ένασ κυκλικόσ δακτύλιοσ: μια δακτυλιοειδήσ
    πλάκα ή και μια προσεγγιστικά άπειρη πλάκα με κυκλική οπή";

In[59]:= comment4 =
    "Η φόρτιση της κυκλικήσ πλάκασ είναι εδώ σμμετρική ωσ προς το κέντρο της.
    Επομένωσ υπάρχει αξονική (ή κυκλική) σμμετρία ωσ προς κέντρο της
    πλάκασ τόσο γεωμετρική (εξαλτίασ του κυκλικού σχήματόσ της) όσο
    και φορτίσειωσ. Μόνο σ' αυτήν εδώ την περίπτωση είναι δυνατόν
    η διαφορική εξίσωση της πλάκασ να είναι μια σνήθης διαφορική
    εξίσωση (δηλαδή με μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή: την πολική
    ακτίνα r) και όχι μια διαφορική εξίσωση με μερικέσ παραγώγουσ,
    δηλαδή χωρίσ την εξάρτησή της από την πολική γωνία θ.";

In[60]:= comment5 =
    "Στην πιο πάνω λύση οι δύο όροι που περιέχουν τη λογαριθμική σνάρτηση
    προκαλούν απειρισμό του βέλουσ κάμψειωσ στο κέντρο της πλάκασ (ο πρώτοσ
    λογαριθμικόσ όροσ) και των ροπών κάμψειωσ (ο δεύτεροσ λογαριθμικόσ
    όροσ, αν και αυτόσ δεν προκαλεί απειρισμό του βέλουσ κάμψειωσ).
    Επομένωσ και οι δύο αυτοί όροι πρέπει να απουσιάζουν εντελώσ και
    αυτό επιτυγχάνεται απλά με μηδενισμό και των δύο σχετικών σταθερών.
    Αντίθετα οι δύο αυτοί λογαριθμικοί όροι είναι και αποδεκτοί και
    αναγκαίοι στη δακτυλιοειδή πλάκα. Εκεί έχουμε σννοριακέσ σννήθεκσ και
    στην εξωτερική αλλά και στην εσωτερική περιφέρεια του δακτυλίου.";

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD7 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```

In[61]:= vde = u''[t] + ω0² u[t] == p[t] / m;

```

```
In[62]:= u1[t_] = A;
```

```
In[63]:= u2[t_] = A ea t;
```

```
In[64]:= {u3a[t_] = A Cosh[a t] + B Sinh[a t], "ή απλούστερα", u3b[t_] = A Cosh[a t]};
```

```
In[65]:= u4[t_] = A Cos[ω t];
```

```
In[66]:= u5[t_] = t (A Cos[ω0 t] + B Sin[ω0 t]);
```

```
In[67]:= u6[t_] = A + B t + C t2;
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD8 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```
In[68]:= vde1a = m u''[t] + c u'[t] + k u[t] == p[t];
```

```
In[69]:= vde2a = vde1a /. p[t] → 0
```

```
Out[69]= k u(t) + c u'(t) + m u''(t) == 0
```

```
In[70]:= vde3a = vde1a /. c → 0
```

```
Out[70]= k u(t) + m u''(t) == p(t)
```

```
In[71]:= vde4a = vde3a /. p[t] → 0
```

```
Out[71]= k u(t) + m u''(t) == 0
```

```
In[72]:= vde1b = u''[t] + 2 ξ ω0 u'[t] + ω02 u[t] == p[t] / m;
```

```
In[73]:= vde2b = vde1b /. p[t] → 0
```

```
Out[73]= u(t) ω02 + 2 ξ u'(t) ω0 + u''(t) == 0
```

```
In[74]:= vde3b = vde1b /. ξ → 0
```

```
Out[74]= u(t) ω02 + u''(t) ==  $\frac{p(t)}{m}$ 
```

```
In[75]:= vde4b = vde3b /. p[t] → 0
```

```
Out[75]= u(t) ω02 + u''(t) == 0
```

```
In[76]:= ?DSolve
```

```
DSolve[eqn, y, x] solves a differential equation for the
function y, with independent variable x. DSolve[{eqn1, eqn2, ... },
{y1, y2, ... }, x] solves a list of differential equations. DSolve[
eqn, y, {x1, x2, ... }] solves a partial differential equation. More...
```

```
In[77]:= lst = Attributes[DSolve]
```

```
Out[77]= {Protected}
```

```
In[78]:= Length[lst]
```

```
Out[78]= 1
```

```
In[79]:= sol4b = DSolve[vde4b, u[t], t]
```

```
Out[79]= {{u(t) → c1 cos(t ω0) + c2 sin(t ω0)}}
```

```

In[80]:= u4b[t_] = sol4b[[1, 1, 2]]
Out[80]= c1 cos(tω0) + c2 sin(tω0)

In[81]:= ver = vde4b /. u → u4b // Simplify
Out[81]= True

In[82]:= solutions4b = {Cos[ω0 t], Sin[ω0 t]}
Out[82]= {cos(tω0), sin(tω0)}

In[83]:= W4b[t_] = Det[{solutions4b, D[solutions4b, t]}] // Simplify
Out[83]= ω0

In[84]:= uD1[t_] =
    D1 Cos[ω0 t] + D2 Sin[ω0 t] + (1 / (m ω0)) Integrate[p[τ] Sin[ω0 (t - τ)], {τ, 0, t}]
Out[84]= D1 cos(tω0) +  $\frac{\int_0^t p(\tau) \sin((t-\tau)\omega_0) d\tau}{m\omega_0}$  + D2 sin(tω0)

In[85]:= uD2[t_] = e-ξ ω0 t (D1 Cos[ωD t] + D2 Sin[ωD t]) +
    (1 / (m ωD)) Integrate[p[τ] e-ξ ω0 (t-τ) Sin[ωD (t - τ)], {τ, 0, t}]
Out[85]=  $\frac{\int_0^t e^{-\xi(t-\tau)\omega_0} p(\tau) \sin((t-\tau)\omega D) d\tau}{m\omega D} + e^{-t\xi\omega_0} (D1 \cos(t\omega D) + D2 \sin(t\omega D))$ 

In[86]:= uD3[t_] = e-ξ ω0 t (D1 Cosh[aD t] + D2 Sinh[aD t]) +
    (1 / (m aD)) Integrate[p[τ] e-ξ ω0 (t-τ) Sinh[aD (t - τ)], {τ, 0, t}]
Out[86]=  $\frac{\int_0^t e^{-\xi(t-\tau)\omega_0} p(\tau) \sinh(aD(t-\tau)) d\tau}{aD m} + e^{-t\xi\omega_0} (D1 \cosh(aD t) + D2 \sinh(aD t))$ 

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD9 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ)

```

In[87]:= vbde = X''''[x] - β4 X[x] == 0;
In[88]:= solvbde = DSolve[vbde, X[x], x]
Out[88]= {{X(x) → e-xβ c2 + exβ c4 + c1 cos(xβ) + c3 sin(xβ)}}

In[89]:= Xs1[x_] = solvbde[[1, 1, 2]]
Out[89]= e-xβ c2 + exβ c4 + c1 cos(xβ) + c3 sin(xβ)

In[90]:= Xs2[x_] = Xs1[x] // ExpToTrig // Simplify
Out[90]= c1 cos(xβ) + (c2 + c4) cosh(xβ) + c3 sin(xβ) + (c4 - c2) sinh(xβ)

In[91]:= Xs3[x_] = D1 Cosh[β x] + D2 Sinh[β x] + D3 Cos[β x] + D4 Sin[β x]
Out[91]= D3 cos(xβ) + D1 cosh(xβ) + D4 sin(xβ) + D2 sinh(xβ)

In[92]:= SolutionsList = {Cosh[β x], Sinh[β x], Cos[β x], Sin[β x]}
Out[92]= {cosh(xβ), sinh(xβ), cos(xβ), sin(xβ)}

```

```
In[93]:= W[x_] = Det[{SolutionsList, D[SolutionsList, x],
  D[SolutionsList, {x, 2}], D[SolutionsList, {x, 3}]}] // Simplify
```

```
Out[93]= 4 β6
```

```
In[94]:= comment6 = "Δυστυχώς αρνητικό σχόλιο: στην προηγούμενη εντολή υπάρχει
  μεγάλο υπολογιστικό κόστος στις παραγωγίσεις κι αυτό δεν είναι
  καθόλου σωστό. Συγκεκριμένα αυτό συμβαίνει, επειδή για την εύρεση
  των δευτέρων και τρίτων παραγώγων έγιναν από την αρχή όλες οι
  παραγωγίσεις των συναρτήσεων και δε χρησιμοποιήθηκαν οι παράγωγοι
  που είχαν ήδη βρεθεί, όπως θα ήταν σωστότερο να είχε γίνει. Δεν έγινε
  απλά για λόγους μικρής εξοικονομήσεως προγραμματισμού: μικρότερη
  στην εμφάνιση εντολή, αλλά δυστυχώς με πολύ μεγαλύτερο υπολογιστικό
  κόστος εσωτερικά στη Mathematica την κατά ώρα της εκτελέσεώς της.";
```

```
In[95]:= BeamFrequenciesList = Table[ω[n_] = (n2 π2 / L2) Sqrt[EI / ρA], {n, 1, 6}]
```

```
Out[95]= {  $\frac{\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}$ ,  $\frac{4 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}$ ,  $\frac{9 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}$ ,  $\frac{16 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}$ ,  $\frac{25 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}$ ,  $\frac{36 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}$  }
```

```
In[96]:= BeamVibrationModesList = Table[X[n_, x_] = Sin[n π x / L], {n, 1, 6}]
```

```
Out[96]= {  $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{2 \pi x}{L}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{3 \pi x}{L}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{4 \pi x}{L}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{5 \pi x}{L}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{6 \pi x}{L}\right)$  }
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MD10 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΛΥΓΙΣΜΟΣ)

```
In[97]:= BucklingDE1 = EI v''''[x] + P v''[x] == 0;
```

```
In[98]:= BucklingDE2 = v''''[x] + k2 v''[x] == 0;
```

```
In[99]:= SolutionBucklingDE2 = DSolve[BucklingDE2, v[x], x]
```

```
Out[99]= { {  $v(x) \rightarrow c_3 + x c_4 - \frac{c_1 \cos(k x)}{k^2} - \frac{c_2 \sin(k x)}{k^2}$  } }
```

ΣΤΥΛΟΣ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΗ ΣΤΟ ΕΝΑ ΑΚΡΟ ΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΤΟ ΑΛΛΟ

```
In[100]:= Pcr1 = π2 EI / (4 L2) // N
```

```
Out[100]=  $\frac{2.4674 EI}{L^2}$ 
```

ΑΜΦΙΑΡΘΡΩΤΟΣ ΣΤΥΛΟΣ

```
In[101]:= Pcr2 = π2 EI / L2 // N
```

```
Out[101]=  $\frac{9.8696 EI}{L^2}$ 
```

ΑΜΦΙΠΑΚΤΟΣ ΣΤΥΛΟΣ

```
In[102]:= Pcr3 = 4 π2 EI / L2 // N
```

```
Out[102]=  $\frac{39.4784 EI}{L^2}$ 
```


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-ME

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME1 (Δυναμική): Θεωρούμε την κίνηση υλικού σημείου μάζας m με αντίσταση $R = -bv - cv^3$ με $v = v(t)$ την ταχύτητά του και b και c δύο θετικές σταθερές. Ζητούνται: (1) Λίστα δύο εντολών για τη μη εμφάνιση πιθανών ορθογραφικών λαθών. (2) Η σχετική διαφορική εξίσωση MovementODE. (3) Οι χαρακτηρισμοί της characterizations (σε λίστα). (4) Η λύση της sol με αρχική συνθήκη τη συνθήκη $v(0) = v_0$.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME2 (Ορθογώνιες Τροχιές, Ρευστομηχανική): Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε εδώ τη μόνιμη, διδιάστατη, αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στην ορθή γωνία $x \geq 0$ και $y \geq 0$. Ζητούνται: (5) Οι εξισώσεις των γραμμών ροής eq1. Η σχετική διαφορική εξίσωση (6) με απλή παραγωγή ODE1a και (7) με χρήση εντολής απαλοιφής ODE1b. (8) Η διαπίστωση της συμπτώσεώς τους (με απλοποίηση). (9) Από την ODE1a η διαφορική εξίσωση των ισοδυναμικών γραμμών ODE2 και (10) η λύση της sol. (11) Τώρα και η κατευθείαν γραφή των εξισώσεων των ισοδυναμικών γραμμών eq2. (12) Λίστα OrthogonalTrajectoriesList επιστημονικών περιοχών του Πολιτικού Μηχανικού όπου εμφανίζονται ορθογώνιες τροχιές.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME3 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε ένα άκρο x δοκού. Ζητούνται: (13) Η συνάρτηση $c_1(x)$ των συνοριακών συνθηκών (σε λίστα) για πακτωμένο άκρο x . Ανάλογα (14) $c_2(x)$ για αρθρωμένο άκρο και (15) $c_3(x)$ για ελεύθερο άκρο. Με τη χρήση των συναρτήσεων αυτών $c_{1,2,3}(x)$ όλες μαζί οι συνοριακές συνθήκες για δοκό $[a, b]$ (με $a \leq x \leq b$) σε απλή λίστα (χωρίς εσωτερικά άγκιστρα): (16) για αμφίπακτη δοκό bc1, (17) για αμφιέριστη δοκό bc2, (18) για πρόβολο με την πάκτωση δεξιά bc3, (19) για μονόπακτη υπερστατική δοκό με την πάκτωση δεξιά bc4, (20) για ελεύθερη δοκό bc5 και (21) σχετικό σχόλιο comment1. Οι διαφορικές εξισώσεις (με τα συνήθη συμβόλα) (22) συνήθους δοκού BeamODE1 με φόρτιση $p(x)$, (23) δοκού επί ελαστικής βάσεως BeamODE2 πάλι με φόρτιση $p(x)$ και (24) καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού BeamODE3 (για το προσημασμένο εύρος $X(x)$). (25) Με βάση τα παραπάνω όλες μαζί οι εξισώσεις eqs για αμφιέριστη δοκό $[a, b]$ υπό σταθερή φόρτιση p_0 , (26) η λύση της sol2, (27) η σχετική συνάρτηση $v_s(x)$ (με παραγοντοποίηση) και (28) ο βαθμός Degreeen του σχετικού πολυωνύμου (εύρεση). (29) Κατευθείαν γραφή λίστας δύο παραγόντων της factors. (30) Η πλήρης επαλήθευση ver της λύσεως $v_s(x)$ (με απλοποίηση). Στη συνέχεια οι σχετικές (31) γωνία κλίσεως (ή στροφή) $\theta(x)$ (με παραγοντοποίηση) και (32) ο βαθμός Degree θ του σχετικού πολυωνύμου (εύρεση). (33) Η καμπτική ροπή $M(x)$ (με παραγοντοποίηση) και (34) ο βαθμός DegreeM του σχετικού πολυωνύμου (εύρεση). (35) Η τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ (με παραγοντοποίηση) και (36) ο βαθμός DegreeQ του σχετικού πολυωνύμου (εύρεση). (37) Από την $Q(x)$ η φόρτιση $p(x)$ και (38) ο βαθμός Degreep του σχετικού πολυωνύμου (εύρεση).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME4 (Ορίζουσα Wronski): Για δύο συναρτήσεις y_1 και y_2 του x ζητούνται: (39) Συνάρτηση $W[y1_, y2_, x_]$ (έτσι ακριβώς!) για την ορίζουσα Wronski τους W με καθυστερημένο υπολογισμό της (ό...ταν κληθεί, χρήση του D για τις παραγωγίσεις και απλοποίηση. (40) Η ορίζουσα Wronski W_1 των συναρτήσεων 1 και x . (41) Ανάλογα W_2 των συναρτήσεων $\cosh x$ και $\sinh x$. (42) Επίσης W_3 των λύσεων στις ελεύθερες ταλαντώσεις απλού αρμονικού ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα ω_0 (χωρίς απόσβεση). (43) Ανάλογα W_4 για ασθενή απόσβεση (πραγματικές λύσεις) με χρήση και των συμβόλων ξ και ω_D και (44) W_5 για ισχυρή απόσβεση (εκθετικές-υπερβολικές λύσεις) με χρήση και των συμβόλων ξ και a_D . (45) Σε σχόλιο comment2 πώς αλλιώς καλούνται (α) η ασθενής απόσβεση και (β) η ισχυρή απόσβεση;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME5 (Μηχανική των Υλικών: Λυγισμός): Θεωρούμε εδώ το λυγισμό ενός στύλου. Ζητούνται: (46) Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως BucklingODE4. (47) Οι χαρακτηρισμοί της characterizations4 σε λίστα. (48) Η συνάρτηση που δοκιμάζουμε στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για λύση της. (49) Η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση CharEq (δυστυχώς εδώ επί τον εκθετικό όρο!) με απλοποίηση. (50) Οι ρίζες της CharEqRoots. (51) Ο αριθμός τους NumberOfRoots. (52) Η λίστα CharEqDistinctRoots των διακριτών (χωριστών) ριζών.

(53) Κατευθείαν όλες μαζί οι ρίζες ListOfRoots. (54) Κατευθείαν η γενική λύση $v_s(x)$ της διαφορικής εξίσωσης BucklingODE4. (55) Η επαλήθευσή της BODE4Verification (με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME6 (Ταλαντώσεις): Εδώ θεωρούμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με ισχυρή απόσβεση. Ζητούνται: (56) Η σχετική διαφορική εξίσωση VDE με σταθερές ξ και ω_0 . (57) Σχόλιο comment3 για το πού αλλού θα μπορούσε ίσως να παρουσιασθεί. (58) Η λύση της vsol, (59) η σχετική συνάρτηση $u_s(t)$ και (60) η μετατροπή της σε υπερβολική μορφή $u_{s1}(t)$ (με απλοποίηση). (61) Άμεσα η λύση αυτή στη μορφή $u_{s2}(t)$ που χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός (με τη σταθερά a_D) και (62) η επαλήθευσή της (με αντικατάσταση του a_D και απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME7 (Ταλαντώσεις): Εξετάζουμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα υπό κρίσιμη απόσβεση. Εδώ ζητούνται: (63) Η διαγραφή (το «καθάρισμα») του συμβόλου ρ . (64) Η σχετική διαφορική εξίσωση ode με τους καθιερωμένους συμβολισμούς. Από αυτήν (65) η αντίστοιχη εξίσωση odeh για τις ελεύθερες ταλαντώσεις, (66) η λύση solution της τελευταίας, (67) η σχετική συνάρτηση $u_h(t)$ (με παραγοντοποίηση) και (68) η κατευθείαν γραφή της σαν $u_{h1}(t)$. Επιστρέφουμε τώρα στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με φόρτιση $p(t)$. Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών ζητούνται οι λύσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, κλπ. που δοκιμάζουμε (με προσδιοριστέους συντελεστές A , B , C , κλπ.) για τις εξής φορτίσεις $p(t)$: (69) $p_0 t^4$, (70) $p_0 t^2 e^{at}$, (71) $p_0 \cos \omega t$, (72) $p_0 \sin \omega t$, (73) $p_0 \cosh \omega t$ (με $\omega \neq \omega_0$), (74) $p_0 \sinh \omega t$, (75) $p_0 e^{-\omega t}$, (76) $p_0 e^{\omega_0 t}$, (77) $p_0 e^{-\omega_0 t}$, (78) $p_0 t e^{-\omega_0 t}$, (79) $p_0 t^2 e^{-\omega_0 t}$, (80) $p_0 \cosh \omega_0 t$, (81) $p_0 \sinh \omega_0 t$ και τέλος (82) $p_1 \cosh \omega_0 t + p_2 \sinh \omega_0 t$.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME8 (Ταλαντώσεις): Θεωρούμε εδώ τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με γνωστές σταθερές m , ω_0 και ξ . Ζητούνται: (83) Η κατευθείαν γραφή της μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως $G(\omega)$ στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας ω . (84) Η κλήση του πακέτου Algebra`ReIm`. (85) Η απόκριση $u_i(t)$ στη μιγαδική φόρτιση $p_0 e^{i\omega t}$. (86) Η απόκριση $u_c(t)$ στη συνημιτονική φόρτιση $p_0 \cos \omega t$ (με χρήση των εντολών ComplexExpand και Simplify). (87) Ανάλογα $u_s(t)$ στην αντίστοιχη ημιτονική φόρτιση. (88) Η κατευθείαν γραφή της αποκρίσεως $u_c(t)$ σαν $u_{c1}(t)$. (89) Η επαλήθευση της σχέσεως μεταξύ των τριών αποκρίσεων $u_c(t)$, $u_s(t)$ και $u_i(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME9 (Ταλαντώσεις): Θεωρούμε τώρα τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου (χωρίς απόσβεση) με γνωστές σταθερές m και ω_0 και με αυθαίρετη φόρτιση $p(t)$. Ζητούνται: (90) Η σχετική διαφορική εξίσωση VibrationsODE. (91) Κατευθείαν η λύση της $u_s(t)$ υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες. Από τη λύση αυτή $u_s(t)$ (92) η λύση $u_{s1}(t)$ για φόρτιση $p(t) = p_0$ με απλοποίηση και παραγοντοποίηση. (Προσοχή στο σύμβολο της μεταβλητής την ώρα της αντικαταστάσεως!) (93) Ανάλογα η λύση $u_{s2}(t)$ για $p(t) = p_0 \cos \omega t$ (με απλοποίηση). (94) Ομοίως η λύση $u_{s3}(t)$ για $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ και (95) το αντίστοιχο εύρος των ταλαντώσεων $a(t)$ (εύρεση). Προσδιορισμός της ίδιας λύσεως $u_{s3}(t)$ με (96) λύση sol3 του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών και (97) καθορισμό της συναρτήσεως αυτής, τώρα σαν $u_{s3a}(t)$. (98) Σχεδίαση σε ένα σχήμα και των τριών συναρτήσεων $u_{s3}(t)$, $a(t)$ και $-a(t)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq 100$ με καθορισμό κατάλληλων αξόνων, κατάλληλου τίτλου, με πάχος γραμμών 0.008 και μέσα σε πλαίσιο, περίγραμμα. (99) Τέλος σχόλιο comment4 (λεπτομερώς: σε τρεις περίπου γραμμές) για τούτο το σχήμα.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME10 (Πλάκες): Θεωρούμε συνήθη κυκλική πλάκα ακτίνας a και πάχους h από ισότροπο ελαστικό υλικό με σταθερές E και ν υπό σταθερή φόρτιση p_0 . Ζητούνται: (100) Σε σχόλιο comment5 πώς καλούνται οι σταθερές αυτές; (101) Σχόλιο comment6 για το συμβολισμό του E στη Mathematica. (102) Η δυσκαμψία της D_p . (103) Το «καθάρισμα» του ορισμού D_p . (104) Η σχετική διαφορική εξίσωση PlateODE χωρίς κλάσματα. (105) Οι χαρακτηρισμοί της PlateODEChar σε λίστα. (106) Η λύση της sol και (107) η σχετική συνάρτηση $w_s(r)$ με (108) επαλήθευσή της ver. (109) Κατευθείαν η λίστα ListOfRoots των ριζών της σχετικής χαρακτηριστικής εξίσωσης, (110) ο αριθμός τους NumberOfRoots (εύρεση) και (111) η σχετική λίστα των διακριτών ριζών ListOfDistinctRoots (εύρεση). (112) Κατευθείαν το μέγιστο βέλος κάμψεως w_{\max} στην κυκλική πλάκα (στο κέντρο της).

■ Notebook EMII-ME

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMII-ME (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMII-ME1 ΕΩΣ EMII-ME10)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME1 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

```
In[2]:= MovementODE = m v'[t] == -b v[t] - c v[t]^3
```

```
Out[2]= m v'(t) == -c v(t)^3 - b v(t)
```

```
In[3]:= characterizations =
```

```
  {"συνήθης διαφορική εξίσωση", "πρώτης τάξεως", "πρώτου βαθμού",  
  "μη γραμμική", "χωρίζομενων μεταβλητών", "επίσης τύπου Bernoulli"};
```

```
In[4]:= sol = DSolve[{MovementODE, v[0] == v0}, v[t], t]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
Out[4]= {{v(t) -> -\frac{i \sqrt{b} v0}{\sqrt{c v0^2 + b} \sqrt{\frac{c v0^2}{c v0^2 + b} - e^{\frac{2 b t}{m}}}}, {v(t) -> \frac{i \sqrt{b} v0}{\sqrt{c v0^2 + b} \sqrt{\frac{c v0^2}{c v0^2 + b} - e^{\frac{2 b t}{m}}}}}}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME2 (ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ, ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ)

```
In[5]:= eq1 = x y[x] == C1
```

```
Out[5]= x y(x) == C1
```

```
In[6]:= ODE1a = D[eq1, x]
```

```
Out[6]= y(x) + x y'(x) == 0
```

```
In[7]:= ODE1b = Eliminate[{eq1, D[eq1, x]}, C1]
```

```
Out[7]= x y'(x) == -y(x)
```

```
In[8]:= ODE1a == ODE1b // Simplify
```

```
Out[8]= True
```

```
In[9]:= ODE2 = ODE1a /. y'[x] -> -1/y'[x]
```

```
Out[9]= y(x) - \frac{x}{y'(x)} == 0
```

```
In[10]:= sol = DSolve[ODE2, y[x], x]
```

```
Out[10]= {{y(x) -> -sqrt(2) sqrt(x^2/2 + c1)}, {y(x) -> sqrt(2) sqrt(x^2/2 + c1)}}
```

```
In[11]:= eq2 = y[x]^2 - x^2 == C
```

```
Out[11]= y(x)^2 - x^2 == C
```

```
In[12]:= OrthogonalTrajectoriesList =
```

```
{ "1. Βαρύτητα με τις γραμμές εντάσεως του πεδίου βαρύτητας και τις  
ισοδυναμικές γραμμές", "2. Μετάδοση θερμότητας με τις γραμμές ροής  
της θερμότητας και τις ισόθερμες (ή ισοθερμοκρασιακές) γραμμές",  
"3. Ρευστομηχανική με τις γραμμές ροής και τις ισοδυναμικές γραμμές",  
"4. Γεωδαισία με τις ισοϋψείς καμπύλες και τις καμπύλες της κλίσεως"};
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME3 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```
In[13]:= c1[x_] = {v[x] == 0, v'[x] == 0};
```

```
In[14]:= c2[x_] = {v[x] == 0, v''[x] == 0};
```

```
In[15]:= c3[x_] = {v''[x] == 0, v''''[x] == 0};
```

```
In[16]:= bc1 = {c1[a], c1[b]} // Flatten
```

```
Out[16]= {v(a) == 0, v'(a) == 0, v(b) == 0, v'(b) == 0}
```

```
In[17]:= bc2 = {c2[a], c2[b]} // Flatten
```

```
Out[17]= {v(a) == 0, v''(a) == 0, v(b) == 0, v''(b) == 0}
```

```
In[18]:= bc3 = {c3[a], c1[b]} // Flatten
```

```
Out[18]= {v''(a) == 0, v'''(a) == 0, v(b) == 0, v'(b) == 0}
```

```
In[19]:= bc4 = {c2[a], c1[b]} // Flatten
```

```
Out[19]= {v(a) == 0, v''(a) == 0, v(b) == 0, v'(b) == 0}
```

```
In[20]:= bc5 = {c3[a], c3[b]} // Flatten
```

```
Out[20]= {v''(a) == 0, v'''(a) == 0, v''(b) == 0, v'''(b) == 0}
```

```
In[21]:= comment1 = "Η ελεύθερη δοκός δεν είναι στατικά αποδεκτή. Δηλαδή  
δε μπορούν να λσχύνουν σ' αυτήν οι εξισώσεις ισορροπίας. Είναι  
όμως αποδεκτή στη Δυναμική, συγκεκριμένα στη Δυναμική των  
Κατασκευών. Εκεί όμως δε βρίσκεται σε ισορροπία: κινείται.";
```

```
In[22]:= BeamODE1 = EI v''''[x] == p[x]
```

```
Out[22]= EI v^(4)(x) == p(x)
```

```
In[23]:= BeamODE2 = EI v''''[x] + k v[x] == p[x]
```

```
Out[23]= k v(x) + EI v^(4)(x) == p(x)
```

In[24]:= **BeamODE3 = X''''[x] - β^4 X[x] == 0**

Out[24]= $X^{(4)}(x) - \beta^4 X(x) == 0$

In[25]:= **eqs = {BeamODE1 /. p[x] → p0, bc2}**

Out[25]= $\{EI v^{(4)}(x) == p0, \{v(a) == 0, v'(a) == 0, v(b) == 0, v'(b) == 0\}\}$

In[26]:= **sol2 = DSolve[eqs, v[x], x]**

Out[26]= $\left\{ \left\{ v(x) \rightarrow \frac{1}{24 EI} (p0 x^4 - 2 a p0 x^3 - 2 b p0 x^3 + 6 a b p0 x^2 + a^3 p0 x + b^3 p0 x - 3 a b^2 p0 x - 3 a^2 b p0 x - a b^3 p0 + 3 a^2 b^2 p0 - a^3 b p0) \right\} \right\}$

In[27]:= **vs[x_] = sol2[[1, 1, 2]] // Factor**

Out[27]= $-\frac{p0(a-x)(b-x)(a^2 - 3ba + xa + b^2 - x^2 + bx)}{24 EI}$

In[28]:= **Degreev = Exponent[vs[x], x]**

Out[28]= 4

In[29]:= **factors = {x - a, x - b}**

Out[29]= $\{x - a, x - b\}$

In[30]:= **ver = eqs /. v → vs // Simplify**

Out[30]= $\{\text{True}, \{\text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}\}\}$

In[31]:= **$\theta[x_] = vs'[x]$ // Factor**

Out[31]= $\frac{p0(a+b-2x)(a^2 - 4ba + 2xa + b^2 - 2x^2 + 2bx)}{24 EI}$

In[32]:= **Degree θ = Exponent[$\theta[x]$, x]**

Out[32]= 3

In[33]:= **M[x_] = EI $\theta'[x]$ // Factor**

Out[33]= $\frac{1}{2} p0(a-x)(b-x)$

In[34]:= **DegreeM = Exponent[M[x], x]**

Out[34]= 2

In[35]:= **Q[x_] = M'[x] // Factor**

Out[35]= $-\frac{1}{2} p0(a+b-2x)$

In[36]:= **DegreeQ = Exponent[Q[x], x]**

Out[36]= 1

In[37]:= **p[x_] = Q'[x]**

Out[37]= p0

```
In[38]:= Degreeep = Exponent[p[x], x]
```

```
Out[38]= 0
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME4 (ΟΡΙΖΟΥΣΑ WRONSKI)

```
In[39]:= W[y1_, y2_, x_] := Det[{{y1, y2}, {D[y1, x], D[y2, x]}}] // Simplify
```

```
In[40]:= W1 = W[1, x, x]
```

```
Out[40]= 1
```

```
In[41]:= W2 = W[Cosh[x], Sinh[x], x]
```

```
Out[41]= 1
```

```
In[42]:= W3 = W[Cos[ω0 t], Sin[ω0 t], t]
```

```
Out[42]= ω0
```

```
In[43]:= W4 = W[e-ξ ω0 t Cos[ωD t], e-ξ ω0 t Sin[ωD t], t]
```

```
Out[43]= e-2tξ ω0 ωD
```

```
In[44]:= W4 = W[e-ξ ω0 t Cosh[aD t], e-ξ ω0 t Sinh[aD t], t]
```

```
Out[44]= aD e-2tξ ω0
```

```
In[45]:= comment2 =
```

"(α) Η ασθενής απόσβεση καλείται και υποκρίσιμη απόσβεση, γιατί $\xi < 1$. (β) Η ισχυρή απόσβεση καλείται και υπερκρίσιμη απόσβεση, επειδή $\xi > 1$. Η ίδια η κρίσιμη απόσβεση έχει $\xi = 1$ ακριβώς. Υπενθυμίζεται ότι ξ είναι ο λόγος αποσβέσεως. Στις συνηθισμένες κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού ο λόγος αποσβέσεως ξ είναι συνήθως στο διάστημα 0.03 έως 0.06.";

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME5 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΛΥΓΙΣΜΟΣ)

```
In[46]:= BucklingODE4 = v''''[x] + k2 v''[x] == 0
```

```
Out[46]= V''(x) k2 + V''(x) == 0
```

```
In[47]:= characterizations4 = {"συνήθης διαφορική εξίσωση", "τετάρτης τάξεως",  
"πρώτου βαθμού", "γραμμική", "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές"};
```

```
In[48]:= v0[x_] = eμ x
```

```
Out[48]= eμ x
```

```
In[49]:= CharEq = BucklingODE4 /. v → v0 // Simplify
```

```
Out[49]= eμ x μ2 (k2 + μ2) == 0
```

```
In[50]:= CharEqRoots = Solve[CharEq, μ]
```

```
Out[50]= {{μ → 0}, {μ → 0}, {μ → -i k}, {μ → i k}}
```

```

In[51]:= NumberOfRoots = Length[CharEqRoots]

Out[51]= 4

In[52]:= CharEqDistinctRoots = Union[CharEqRoots]

Out[52]= {{μ → 0}, {μ → -i k}, {μ → i k}}

In[53]:= ListOfRoots = {0, 0, -i k, i k}

Out[53]= {0, 0, -i k, i k}

In[54]:= vs[x_] = C1 + C2 x + C3 Cos[k x] + C4 Sin[k x]

Out[54]= C1 + C2 x + C3 cos(k x) + C4 sin(k x)

In[55]:= BODE4Verification = BucklingODE4 /. v → vs // Simplify

Out[55]= True

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME6 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```
In[56]:= VDE = u''[t] + 2 ξ ω0 u'[t] + ω02 u[t] == 0
```

```
Out[56]= U(t) ω02 + 2 ξ U'(t) ω0 + U''(t) == 0
```

```
In[57]:= comment3 =
```

"Η ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση παρουσιάζεται σε προσεγγιστικά αβαρή πρόβολο με μάζα στο ελεύθερο άκρο του, π.χ. σε έναν υδατόπυργο με το ρόλο του προβόλου να τον παίζει το υποστυλωμα και το ρόλο της μάζας η μάζα της δεξαμενής του νερού μαζί με το νερό που περιέχει. (Όσο περισσότερο νερό περιέχει, τόσο μεγαλύτερη είναι η μάζα και επομένως τόσο καλύτερη η προσέγγιση του υδατόπυργου σαν μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος.) Όμως ακόμη πιο σημαντική περίπτωση όπου παρουσιάζεται η ίδια διαφορική εξίσωση είναι σε ένα μονώροφο ιδεατό κτίριο διατομής που προσεγγίζεται από αντίστοιχο πλαίσιο. Η μάζα του μονώροφου ιδεατού κτιρίου θεωρείται συγκεντρωμένη στην πλάκα του ορόφου (σχεδόν ισοδύναμα τα υποστυλώματα θεωρούνται αβαρή). Επίσης η πλάκα υποτίθεται ότι είναι απαραμόρφωτη (με άπειρη δυσκαμψία). Παραμόρφωση είναι δυνατή μόνο στα υποστυλώματα. Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι αν και η διαφορική εξίσωση είναι η ίδια, εντούτοις και στις δύο πιο πάνω εφαρμογές και γενικά στα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού η απόσβεση των ταλαντώσεων είναι ασθενής και όχι ισχυρή: $0 < \xi < 1$, συνήθως πολύ μικρότερη του 1.";

```
In[58]:= vsol = DSolve[VDE, u[t], t]
```

```
Out[58]= {{U(t) → et(-ξ ω0 - √ξ2-1) ω0 C1 + et(√ξ2-1) ω0 - ξ ω0 C2}}
```

```
In[59]:= us[t_] = vsol[[1, 1, 2]]
```

```
Out[59]= et(-ξ ω0 - √ξ2-1) ω0 C1 + et(√ξ2-1) ω0 - ξ ω0 C2
```

```
In[60]:= us1[t_] = us[t] // ExpToTrig // Simplify
```

```
Out[60]= C2 cosh(t(√ξ2-1 - ξ) ω0) + C1 cosh(t(ξ + √ξ2-1) ω0) +
C2 sinh(t(√ξ2-1 - ξ) ω0) - C1 sinh(t(ξ + √ξ2-1) ω0)
```

In[61]:= $us2[t_] = e^{-\xi \omega_0 t} (C1 \text{Cosh}[aD t] + C2 \text{Sinh}[aD t])$

Out[61]= $e^{-t\xi\omega_0} (C1 \cosh(aD t) + C2 \sinh(aD t))$

In[62]:= $ver = VDE /. u \rightarrow us2 /. aD \rightarrow \omega_0 \text{Sqrt}[\xi^2 - 1] // \text{Simplify}$

Out[62]= True

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME7 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

In[63]:= $\text{Clear}[p]$

■ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ-ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ ΣΕ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

In[64]:= $ode = u''[t] + 2 \omega_0 u'[t] + \omega_0^2 u[t] == p[t] / m$

Out[64]= $u(t) \omega_0^2 + 2 u'(t) \omega_0 + u''(t) == \frac{p(t)}{m}$

■ ΚΑΙ ΓΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

In[65]:= $\{odeh = ode /. p[t] \rightarrow 0, "ή", odeh1 = ode[[1]] == 0\}$

Out[65]= $\{u(t) \omega_0^2 + 2 u'(t) \omega_0 + u''(t) == 0, ή, u(t) \omega_0^2 + 2 u'(t) \omega_0 + u''(t) == 0\}$

■ ΜΕ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ

In[66]:= $solution = \text{DSolve}[odeh, u[t], t]$

Out[66]= $\{\{u(t) \rightarrow e^{-t\omega_0} C_1 + e^{-t\omega_0} t C_2\}\}$

In[67]:= $uh[t_] = solution[[1, 1, 2]] // \text{Factor}$

Out[67]= $e^{-t\omega_0} (C_1 + t C_2)$

In[68]:= $uh1[t_] = (C1 + C2 t) e^{-\omega_0 t};$

■ ΜΕΡΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (Η ΕΙΔΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ) ΠΟΥ ΔΟΚΙΜΑΖΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

In[69]:= $u1[t_] = A + B t + C t^2 + D t^3 + E t^4;$

In[70]:= $u2[t_] = (A + B t + C t^2) e^{a t};$

In[71]:= $u3[t_] = A \text{Cos}[\omega t] + B \text{Sin}[\omega t];$

In[72]:= $u4[t_] = A \text{Cos}[\omega t] + B \text{Sin}[\omega t];$

In[73]:= $\{u5[t_] = A \text{Cosh}[\omega t] + B \text{Sinh}[\omega t], "ή", u5[t_] = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}\};$

In[74]:= $\{u6[t_] = A \text{Cosh}[\omega t] + B \text{Sinh}[\omega t], "ή", u5[t_] = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}\};$

In[75]:= $u7[t_] = A e^{-\omega t};$


```

In[76]:= u8[t_] = A eω0 t;
In[77]:= u9[t_] = A t2 e-ω0 t;
In[78]:= u10[t_] = (A t + B) t2 e-ω0 t;
In[79]:= u11[t_] = (A t2 + B t + C) t2 e-ω0 t;
In[80]:= u12[t_] = A eω0 t + B t2 e-ω0 t;
In[81]:= u13[t_] = A eω0 t + B t2 e-ω0 t;
In[82]:= u14[t_] = A eω0 t + B t2 e-ω0 t;

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME8 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

■ Η ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

```

In[83]:= G[ω_] = (1/m) (1 / (ω02 - ω2 + 2 i ξ ω ω0))
Out[83]=  $\frac{1}{m(-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2)}$ 

```

■ ΚΛΗΣΗ ΤΟΥ ΠΑΚΕΤΟΥ Algebra`ReIm`

```

In[84]:= << Algebra`ReIm`

```

■ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ: ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΗΜΙΤΟΝΙΚΗ

```

In[85]:= ut[t_] = p0 G[ω] ei ω t
Out[85]=  $\frac{e^{i t \omega} p_0}{m(-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2)}$ 
In[86]:= uc[t_] = Re[ut[t]] // ComplexExpand // Simplify
Out[86]=  $\frac{p_0((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(t\omega) + 2\xi\omega\omega_0 \sin(t\omega))}{m(\omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4)}$ 
In[87]:= us[t_] = Im[ut[t]] // ComplexExpand // Simplify
Out[87]=  $\frac{p_0((\omega_0^2 - \omega^2) \sin(t\omega) - 2\xi\omega\omega_0 \cos(t\omega))}{m(\omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4)}$ 
In[88]:= uc1[t_] = (p0/m) ((ω02 - ω2) Cos[ω t] + 2 ξ ω ω0 Sin[ω t]) / ((ω02 - ω2)2 + (2 ξ ω ω0)2)
Out[88]=  $\frac{p_0((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(t\omega) + 2\xi\omega\omega_0 \sin(t\omega))}{m(4\xi^2\omega^2\omega_0^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}$ 
In[89]:= ver = uc[t] + i us[t] == ut[t] // Simplify
Out[89]= True

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME9 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

■ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΣΕ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

In[90]:= VibrationsODE = u''[t] + ω0² u[t] == p[t] / m

$$\text{Out[90]} = u(t) \omega_0^2 + u''(t) == \frac{p(t)}{m}$$

■ Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΥΠΟ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΙ ΓΙΑ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗ ΦΟΡΤΙΣΗ (ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ DUHAMEL)

In[91]:= us[t_] = (1 / (m ω0)) Integrate[p[τ] Sin[ω0 (t - τ)], {τ, 0, t}]

$$\text{Out[91]} = \frac{\int_0^t p(\tau) \sin((t - \tau) \omega_0) d\tau}{m \omega_0}$$

■ Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΓΙΑ ΣΤΑΘΕΡΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

In[92]:= us1[t_] = us[t] /. p[τ] → p0 // Simplify // Factor

$$\text{Out[92]} = -\frac{p_0 (\cos(t \omega_0) - 1)}{m \omega_0^2}$$

■ Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΓΙΑ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

In[93]:= us2[t_] = us[t] /. p[τ] → p0 Cos[ω τ] // Simplify

$$\text{Out[93]} = \frac{p_0 (\cos(t \omega_0) - \cos(t \omega))}{m (\omega^2 - \omega_0^2)}$$

■ Η ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

In[94]:= us3[t_] = us[t] /. p[τ] → p0 Cos[ω0 τ] // Simplify

$$\text{Out[94]} = \frac{p_0 t \sin(t \omega_0)}{2 m \omega_0}$$

In[95]:= a[t_] = Coefficient[us3[t], Sin[ω0 t]]

$$\text{Out[95]} = \frac{p_0 t}{2 m \omega_0}$$

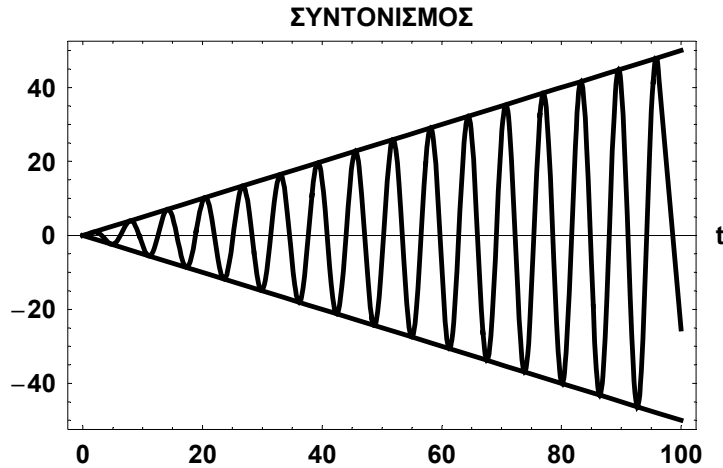
In[96]:= sol3 = DSolve[
 {VibrationsODE /. p[t] → p0 Cos[ω0 t], u[0] == 0, u'[0] == 0}, u[t], t] // Simplify

$$\text{Out[96]} = \left\{ \left\{ u(t) \rightarrow \frac{p_0 t \sin(t \omega_0)}{2 m \omega_0} \right\} \right\}$$

In[97]:= us3a[t_] = sol3[[1, 1, 2]]

$$\text{Out[97]} = \frac{p_0 t \sin(t \omega_0)}{2 m \omega_0}$$

```
In[98]:= subs = {p0 -> 1, m -> 1, ω0 -> 1};
us3 = Plot[{us3[t] /. subs, a[t] /. subs, -a[t] /. subs}, {t, 0, 100},
PlotStyle -> Thickness[0.008],
AxesLabel -> {"t", "u"}, PlotLabel -> "ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ",
ImageSize -> 360, DefaultFont -> {"Arial-Bold", 12}, Frame -> True];
```



```
In[99]:= comment4 =
```

"Το σχήμα αυτό δείχνει το φαινόμενο του συντονισμού στο παρόν μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα χωρίς απόσβεση. Ο συντονισμός είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η εξωτερική φόρτιση $p(t)$ έχει εδώ συνημιτονική μορφή με συχνότητα ω ακριβώς την ιδιοσυχνότητα ω_0 του μηχανικού συστήματος. Στο σχήμα αυτό φαίνεται καθαρά η αύξηση του εύρους των ταλαντώσεων γραμμικά με το χρόνο t . Ο συντονισμός είναι ανεπιθύμητο φαινόμενο για τον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος προσπαθεί στις μελέτες των κατασκευών του να τον αποφεύγει όσο είναι δυνατόν. Για παράδειγμα, προσπαθεί να αποφεύγει σε μια κατασκευή ιδιοσυχνότητες που είναι κοντά στις συχνότητες των σεισμών που έχουν γίνει στην περιοχή της κατασκευής. Αυτές είναι γνωστές από τις αναλύσεις των σχετικών επιταχυνσιογραφημάτων, που λαμβάνονται με επιταχυνσιόμετρα κατά τη διάρκεια των σεισμικών φαινομένων."

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-ME10 (ΠΛΑΚΕΣ)

```
In[100]:= comment5 =
```

"Η σταθερά E καλείται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young. Η σταθερά ν καλείται λόγος του Poisson και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,0.5]$. Και οι δύο αυτές σταθερές αναφέρονται σε ισότροπο (όχι ανισότροπο) γραμμικά ελαστικό υλικό. Και οι δύο μαζί είναι επαρκείς για να χαρακτηρίσουν την ελαστική συμπεριφορά του ισότροπου υλικού, δηλαδή από αυτές προκύπτουν πολλές άλλες σταθερές του ίδιου υλικού. Για παράδειγμα, το μέτρο διατμήσεως G δίνεται από τον τύπο: $G = E/(2(1+\nu))$."

```
In[101]:= comment6 =
```

"Το Αγγλικό σύμβολο E χρησιμοποιείται στη *Mathematica* σαν βάση των φυσικών λογαρίθμων (περίπου 2.71828). Επομένως δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δηλώσει το μέτρο ελαστικότητας E ενός υλικού. Για να αποφύγουμε τη δυσκολία αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα της δηλώσεως του μέτρου ελαστικότητας E με Ελληνικό E αντί με Αγγλικό. Αυτό γίνεται απλά με πατώντας Esc Αγγλικό E Esc ή με αλλαγή του πληκτρολογίου στα Ελληνικά. Έτσι παρακάμπτεται η δυσκολία που προαναφέρθηκε."

■ Η ΔΥΣΚΑΜΨΙΑ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

In[102]:= $Dp = E h^3 / (12 (1 - \nu^2))$

Out[102]= $\frac{h^3 E}{12(1 - \nu^2)}$

In[103]:= `Clear[Dp]`

■ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

In[104]:= $PlateODE = r^4 w''''[r] + 2 r^3 w'''[r] - r^2 w''[r] + r w'[r] == (p0 / Dp) r^4$

Out[104]= $w^{(4)}(r) r^4 + 2 w^{(3)}(r) r^3 - w''(r) r^2 + w'(r) r == \frac{p0 r^4}{Dp}$

■ ΚΑΙ ΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ

In[105]:= `PlateODEChar = {"Συνήθης διαφορική εξίσωση",
"τετάρτης τάξεως", "πρώτου βαθμού", "γραμμική", "μη ομογενής",
"με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές", "τύπου Euler"};`

■ Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

In[106]:= `sol = DSolve[PlateODE, w[r], r]`

Out[106]= $\left\{ \left\{ w(r) \rightarrow \frac{p0 r^4}{64 Dp} + \frac{1}{4} (2 c_2 - c_3) r^2 + \frac{1}{2} c_3 \log(r) r^2 + c_4 + c_1 \log(r) \right\} \right\}$

In[107]:= `ws[r_] = sol[[1, 1, 2]]`

Out[107]= $\frac{p0 r^4}{64 Dp} + \frac{1}{4} (2 c_2 - c_3) r^2 + \frac{1}{2} c_3 \log(r) r^2 + c_4 + c_1 \log(r)$

In[108]:= `ver = PlateODE /. w -> ws // Simplify`

Out[108]= `True`

In[109]:= `ListOfRoots = {0, 0, 2, 2}`

Out[109]= `{0, 0, 2, 2}`

In[110]:= `NumberOfRoots = Length[ListOfRoots]`

Out[110]= `4`

In[111]:= `ListOfDistinctRoots = Union[ListOfRoots]`

Out[111]= `{0, 2}`

■ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΕΩΣ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ (ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΗΣ)

In[112]:= $wmax = p0 a^4 / (64 Dp)$

Out[112]= $\frac{a^4 p0}{64 Dp}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-MF

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF-1 (Δυναμική του Υλικού Σημείου): Ένα υλικό σημείο μάζας m ξεκινάει με μηδενική ταχύτητα $v(0) = 0$ υπό την επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας με επιτάχυνση g : του βάρους του. Θετική φορά θεωρείται η φορά προς τα κάτω: προς τη γη. Στην κίνηση αυτή υπάρχει αντίσταση του αέρα

$$R = -cv^2(t)$$

με το c γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (1) Οι δύο εντολές (σε μια γραμμή) για τη μη εμφάνιση προειδοποιήσεων για πιθανά ορθογραφικά λαθη. (2) Σε λίστα eqs οι δύο εξισώσεις (διαφορική εξίσωση και αρχική συνθήκη) με άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου. (3) Σε σχόλιο comment1 (χωρίς έξοδο: με Αγγλική άνω τελεία ; στο τέλος του) ο τύπος (το είδος) της διαφορικής αυτής εξισώσεως πρώτης τάξεως. (4) Η λύση sol του προβλήματος αρχικής τιμής eqs και (5) η αντίστοιχη συνάρτηση $v_s(t)$. (6) Τέλος το όριο

$$v_s(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} v_s(t)$$

(η οριακή ταχύτητα του υλικού σημείου) για τιμές των σταθερών

$$m = 0.03, \quad c = 0.01 \quad \text{και} \quad g = 9.81.$$

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF-2 (Μηχανική των Υλικών, Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Θεωρούμε δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) επί ελαστικής βάσεως (π.χ. μια πεδιλοδοκό ή σιδηροτροχιά) σύμφωνα με την υπόθεση του Winkler (1867). Η δυσκαμψία της δοκού είναι EI και η συνολική σταθερά εδάφους-δοκού k . Η κατανεμημένη φόρτιση πάνω στη δοκό είναι $p(x)$. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού. Ζητούνται: (7) Η σχετική διαφορική εξίσωση BeamDE. Στη συνέχεια όλες οι εξισώσεις (διαφορική εξίσωση BeamDE και συνοριακές συνθήκες) σε λίστες με τις ονομασίες: (8) BeamEqs1 για αμφίπακτη δοκό, (9) BeamEqs2 για μονόπακτη δοκό με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά, (10) BeamEqs3 για αμφιέριστη δοκό, (11) BeamEqs4 για πρόβολο με πάκτωση δεξιά, (12) BeamEqs5 για δοκό με άρθρωση αριστερά και ελεύθερο άκρο δεξιά και (13) BeamEqs6 για δοκό ελεύθερη και στα δύο άκρα της. (14) Σε σχόλιο comment2 να εξηγηθεί εάν οι δύο τελευταίοι τύποι δοκών είναι αποδεκτοί από φυσικής απόψεως ή όχι και γιατί. (15) Τέλος ζητείται η λύση sol6 του τελευταίου προβλήματος δοκού BeamEqs6 για σταθερή φόρτιση $p(x) = p_0$.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF3 (Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού: Ιδιοσυχνότητες, Ιδιομορφές): Θεωρούμε το γνωστό πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνηθούς δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI (με ενιαίο σύμβολο) και γραμμικής πυκνότητας ρA (καλύτερα επίσης με ενιαίο σύμβολο) με άγνωστη συνάρτηση το προσημασμένο εύρος των ιδιοταλαντώσεων της δοκού $X(x)$. Η σχετική συνολική σταθερά β θεωρείται γνωστή ($\beta > 0$). Ζητούνται: (16) σε σχόλιο comment3 γιατί είναι σκόπιμο η δυσκαμψία EI να γράφεται σαν ένα ενιαίο σύμβολο; (17) Η σχετική διαφορική εξίσωση de, (18) η λύση της sol και (19) η σχετική συνάρτηση $X_s(x)$ σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή (με απλοποίηση στο τέλος). (20) Η επαλήθευση της συναρτήσεως αυτής $X_s(x)$ (με απλοποίηση). Στη συνέχεια ο έλεγχος ισχύος ή μη ισχύος των τύπων

$$(21) \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 \quad \text{και} \quad (22) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

(με απλοποιήσεις). (23) Τώρα με κατευθείαν γραφή η γενική λύση $X_g(x)$ της παρούσας διαφορικής εξισώσεως. (24) Για αμφίπακτη δοκό η εξίσωση $D_1 = 0$ για τις ιδιοτιμές β_n μέσω του υπολογισμού ορίζουσας τετάρτης τάξεως σε απλοποιημένη μορφή. Από 'δώ και πέρα για αμφιέριστη δοκό: (25) η αντίστοιχη εξίσωση $D_2 = 0$, (26) η κατευθείαν γραφή των ιδιοτιμών β_n σαν συνάρτηση $\beta(n)$, (27) ο πίνακας tb1 των δέκα πρώτων ιδιοτιμών β_n , (28) οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n σαν

συνάρτηση $\omega(n)$, (29) ο πίνακας tb2 των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ω_n , (30) με κατευθείαν γραφή οι αντίστοιχες ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$ σαν συναρτήσεις $X(n, x)$ και (31) ο πίνακας tb3 των δέκα πρώτων ιδιομορφών ταλαντώσεως $X_n(x)$. (Όλοι οι πίνακες με τη χρήση της σχετικής εντολής της *Mathematica* παρακαλώ!)

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF4 (Ταλαντώσεις: Συνάρτηση Μεταφοράς, Ωστική Απόκριση): Θεωρούμε το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου-αποσβεστήρα σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με φόρτιση $p(t)$ υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες και υπό ισχυρή απόσβεση. Άγνωστη συνάρτηση θεωρείται η μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου. Με τη χρήση των τριών σχετικών σταθερών m , ξ και ω_0 ζητούνται: (32) Η σχετική διαφορική εξίσωση vde και (33) οι δύο αρχικές συνθήκες ics (αυτές σε μορφή κανόνων αντικαταστάσεως: με βέλη). (34) Η πολύ ειδική φόρτιση $p_1(t)$ η οποία οφείλεται σε μοναδιαία ώθηση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 0$: ωστική (ή κρουστική) φόρτιση. (35) Ο μετασχηματισμός Laplace lt1 της διαφορικής εξίσωσης vde υπό τη φόρτιση $p_1(t)$ και υπό τις αρχικές συνθήκες ics και στη συνέχεια (36) η αρκετά συντομότερη γραφή του lt2 με τη χρήση του ειδικού συμβόλου $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$. Από το μετασχηματισμό Laplace lt2 (37) ο υπολογισμός της συναρτήσεως μεταφοράς $G(s)$, στη συνέχεια (38) της ωστικής (ή κρουστικής) αποκρίσεως $g(t)$ και τέλος (39) της αντίστοιχης αποκρίσεως $g_1(t)$, τώρα όμως για μηδενική απόσβεση (με $\xi = 0$) και σε απλοποιημένη τριγωνομετρική μορφή. (40) Σε σύντομο σχόλιο ποια είναι η έξοδος της εντολής αυτής;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF5 (Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις): Θεωρούμε και πάλι μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου υπό φόρτιση $p(t)$ και με ιδιοσυχνότητα ω_0 . Ζητούνται: (41) Με κατευθείαν γραφή της η απόκρισή του (η μετατόπιση του υλικού σημείου) $u_p(t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες και χωρίς απόσβεση, με $\xi = 0$, και από αυτήν (42) η αντίστοιχη συνάρτηση $u_{p1}(t)$ για σταθερή φόρτιση $p_1(t) = p_0$ σε απλοποιημένη μορφή και με παραγοντοποίηση. (43) Για τη βηματική συνάρτηση του Heaviside η δήλωση subs της αντικαταστάσεως $H(-T) \rightarrow 0$. (44) Ξανά από την απόκριση $u_p(t)$ η απόκριση $u_{p2}(t)$ για φόρτιση p_0 μόνο κατά το χρονικό διάστημα $[0, T]$ (με την αντικατάσταση subs και με απλοποίηση) καθώς και (45) η αντίστοιχη απόκριση $u_{p3}(t)$ για συνεχή φόρτιση της μορφής $p(t) = p_0 t e^{-\alpha t}$ (με πλήρη απλοποίηση). (46) Και πάλι με κατευθείαν γραφή της η απόκριση $u_{p\xi}(t)$ με την ύπαρξη και ασθενούς αποσβέσεως με λόγο αποσβέσεως ξ και με τη σταθερά ω_D γνωστή (ξανά με μηδενικές αρχικές συνθήκες) και (47) από αυτήν η αντίστοιχη απόκριση $u_{p\xi1}(t)$ για συνεχή σταθερή φόρτιση $p_1(t) = p_0$ (με απλοποίηση). Ανάλογα και για τις δύο επόμενες πιο πάνω φορτίσεις $p(t)$: (48) τη δεύτερη: με απόκριση $u_{p\xi2}(t)$ και (49) την τρίτη: με απόκριση $u_{p\xi3}(t)$, τώρα όμως με ασθενή απόσβεση. (50) Τέλος ο έλεγχος ότι $u_{p3}(t) = u_{p\xi3}(t)$ για $\xi = 0$ και $\omega_D = \omega_0$ με απλοποίηση. Σε δύο σχόλια comment4 και comment5 : (51) ποιες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοσθούν για την εύρεση των δύο παραπάνω αποκρίσεων $u_p(t)$ και $u_{p\xi}(t)$; (52) Ποια πλεονεκτεί και γιατί ακριβώς;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF6 (Δυναμική των Κατασκευών: Ιδεατά Κτίρια Διατμήσεως): Θεωρούμε δώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως. Μάζες των ορόφων (στα ύψη των πλακών):

$$m_1 = 4m_0 \quad \text{και} \quad m_2 = 3m_0$$

με το m_0 γνωστή σταθερά μάζας. Ύψη των υποστυλωμάτων των ορόφων:

$$h_1 = 5h_0 \quad \text{και} \quad h_2 = 4h_0$$

με το h_0 γνωστή σταθερά ύψους. Δυσκαμψίες των υποστυλωμάτων των ορόφων:

$$EI_1 = 3EI_0 \quad \text{και} \quad EI_2 = 2EI_0$$

με το EI_0 γνωστή σταθερά δυσκαμψίας. Εδώ ζητούνται: (53) Η δήλωση σε λίστα όλων των παραπάνω σταθερών. (54) Το σχετικό μητρώο μάζας \mathbf{M} και στην ίδια γραμμή το ίδιο μητρώο \mathbf{M} που

υπολογίσθηκε, αλλά τώρα σε μητρική μορφή. Σε σχόλια comment6 και comment7: (55) πώς αλλιώς καλείται το μητρώο μάζας \mathbf{M} και (56) γιατί; (57) Σε λίστα οι δύο σταθερές δυσκαμψίας k_{10} και k_{20} των δύο ορόφων που υπεισέρχονται στο μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} με την παραδοχή δύο υποστυλωμάτων σε κάθε όροφο. (58) Λίστα με (i) πρώτο στοιχείο sb την αντικατάσταση

$$EI_0 \rightarrow \frac{500h_0^3 k_0}{3},$$

(ii) δεύτερο και (iii) τρίτο στοιχείο τις δύο σταθερές δυσκαμψίας k_1 και k_2 αντικαθιστώμενες απλά από τις k_{10} και k_{20} αντίστοιχα με την αντικατάσταση sb. (59) Τώρα το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} . (60) Σε λίστα το αντίστροφο μητρώο \mathbf{M}^{-1} (σύμβολο MI), το ανάστροφο \mathbf{M}^T (σύμβολο MT) και τα αντίστοιχα μητρώα \mathbf{K}^{-1} και \mathbf{K}^T . (61) Το μητρώο \mathbf{K}^{-1} σε μητρική μορφή. (62) Σε λίστα έλεγχος εάν τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι συμμετρικά. (63) Το μοναδιαίο μητρώο \mathbf{I}_2 . (64) Σε λίστα έλεγχος εάν $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}_2$ και $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{I}_2$. Με δεκαδικούς αριθμούς (65) οι ιδιοτιμές λ και (66) τα ιδιοδιανύσματα δ του μητρώου δυσκαμψίας \mathbf{K} με δύο χωριστές εντολές και (67) με μία μόνο εντολή (συνέχεια με δεκαδικούς). (68) Το μητρώο των ιδιοτιμών $\mathbf{\Lambda}$ με τη χρήση ειδικής εντολής. (69) Το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων \mathbf{T} από τα ιδιοδιανύσματα δ . (70) Το μητρώο $\mathbf{D}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}$ και (71) ο έλεγχος εάν συμπίπτει με κάποιο άλλο από τα προηγούμενα μητρώα (με στρογγύλευση: εντολή Chop). (72) Το μητρώο $\mathbf{D}_2 = \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T}$ (με στρογγύλευση: εντολή Chop). Σε σχόλια comment8, comment9, comment10 και comment11: (73) η εξήγηση εάν ή όχι είναι χρήσιμες οι ιδιοτιμές λ και τα ιδιοδιανύσματα δ . (74) Γιατί; (75) Ποιο μητρώο είναι χρήσιμο γι' αυτό το σκοπό; (76) Γιατί; (77) Το διάνυσμα στήλης $\mathbf{u}(t)$ των μετατοπίσεων. (78) Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων bdsde σε ελεύθερες ταλαντώσεις (σε μητρική μορφή). (79) Η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων FrequencyEquation και (80) η λύση της FrequencyEquationSolution με δεκαδικούς αριθμούς. (81) Σχόλιο comment12 για τις αποδεκτές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF7 (Δυναμική των Κατασκευών: Ιδεατά Κτίρια Διατήρησης): Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση, ζητούνται επίσης: (82) Το αντίστροφο μητρώο \mathbf{M}^{-1} του μητρώου μάζας \mathbf{M} με το σύμβολο MI. (83) Η επαλήθευση ver ότι ισχύει η προφανής σχέση: $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}_2$. (84) Το μητρώο $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. (85) Το σύστημα bdsde των διαφορικών εξισώσεων

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

(86) Οι ιδιοτιμές $\lambda\mathbf{A}$ του μητρώου \mathbf{A} με τις δεκαδικές προσεγγίσεις τους (εντολή N) και (87) οι αντίστοιχες δύο ιδιοσυχνότητες $\omega\mathbf{A}$. (88) Οι ίδιες ιδιοσυχνότητες σε λίστα με τα ειδικά σύμβολα ω_1 και ω_2 . (89) Οι δύο ιδιοσυχνότητες $\omega\mathbf{t}\mathbf{b}$, όπως προκύπτουν από το αποτέλεσμα FrequencyEquationSolution της προηγούμενης ασκήσεως (με τη χρήση της εντολής Table για πίνακα) και (90) η σύγκρισή τους με τις ιδιοσυχνότητες $\omega\mathbf{A}$. Τα μητρώα (91) $\mathbf{M}^{1/2}$ και (92) $\mathbf{M}^{-1/2}$ με τα σύμβολα M1 και M2 αντίστοιχα. (93) Υπενθύμιση του μητρώου δυσκαμψίας \mathbf{K} της προηγούμενης ασκήσεως. (94) Το μητρώο

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}.$$

(95) Να γίνει επαλήθευση SymmetryVerification της πολύ ενδιαφέρουσας ιδιότητάς του ότι είναι συμμετρικό μητρώο. (96) Στη συνέχεια να υπολογισθούν οι ιδιοσυχνότητες $\omega\mathbf{B}$ του διώροφου κτιρίου μας μέσω των ιδιοτιμών του μητρώου \mathbf{B} με δεκαδικές προσεγγίσεις. (97) Να γίνει σύγκριση και των τριών υπολογισμών των ίδιων ιδιοσυχνοτήτων $\omega\mathbf{A}$, $\omega\mathbf{B}$ και $\omega\mathbf{t}\mathbf{b}$ (με μία μόνο εντολή). (98) Τέλος να υπολογισθούν οι ίδιες ιδιοσυχνότητες $\omega\mathbf{B}\mathbf{a}$ (από τις $\omega\mathbf{B}$) με τη χρήση τώρα του βοηθητικού συμβόλου

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}.$$

(Καλύτερα στις μορφές τους αυτές!) (99) Τέλος σε σχόλιο comment13 έχουν φυσική σημασία οι τρεις σταθερές m_0 , k_0 και ω_0 ή όχι;

■ Notebook EMII-MF

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMII-MF (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMII-MF1 ΕΩΣ EMII-MF7)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF1 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ)

In[1]:= Off[General::spell]; Off[General::spell1];

In[2]:= eqs = {m v'[t] == m g - c v[t]^2, v[0] == 0}

Out[2]= {m v'(t) == g m - c v(t)^2, v(0) == 0}

In[3]:= comment1 = "Πρόκειται για διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών";

In[4]:= sol = DSolve[eqs, v[t], t]

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

Out[4]= $\left\{ \left\{ v(t) \rightarrow \frac{\sqrt{g} \sqrt{m} \tanh\left(\frac{\sqrt{c} \sqrt{g} t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{c}} \right\} \right\}$

In[5]:= vs[t_] = sol[[1, 1, 2]]

Out[5]= $\frac{\sqrt{g} \sqrt{m} \tanh\left(\frac{\sqrt{c} \sqrt{g} t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{c}}$

In[6]:= Limit[vs[t] /. {m -> 0.03, c -> 0.01, g -> 9.81}, t -> ∞]

Out[6]= 5.42494

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF2 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ, ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ: ΔΟΚΟΙ ΕΠΙ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΒΑΣΕΩΣ)

In[7]:= BeamDE = EI v''''[x] + k v[x] == p[x]

Out[7]= $k v(x) + EI v^{(4)}(x) == p(x)$

In[8]:= BeamEqs1 = {BeamDE, v[0] == 0, v'[0] == 0, v[L] == 0, v'[L] == 0};

In[9]:= BeamEqs2 = {BeamDE, v[0] == 0, v'[0] == 0, v[L] == 0, v''[L] == 0};

In[10]:= BeamEqs3 = {BeamDE, v[0] == 0, v''[0] == 0, v[L] == 0, v''[L] == 0};

In[11]:= BeamEqs4 = {BeamDE, v''[0] == 0, v''''[0] == 0, v[L] == 0, v'[L] == 0};

In[12]:= BeamEqs5 = {BeamDE, v[0] == 0, v''[0] == 0, v''[L] == 0, v''''[L] == 0};

In[13]:= BeamEqs6 = {BeamDE, v''[0] == 0, v''''[0] == 0, v''[L] == 0, v''''[L] == 0};


```
In[14]:= comment2 = "Οι δύο τελευταίοι τύποι δοκών είναι και αυτοί αποδεκτοί
από φυσικής απόψεως απλά γιατί η δοκός στηρίζεται πάνω στην
ελαστική βάση (συνήθως στο έδαφος). Έτσι συνεχίζει να υπάρχει
στατική ισορροπία, αρκεί βέβαια η συνολική φόρτιση να είναι
προς τα κάτω. Εάν δεν υπήρχε η ελαστική βάση, η οποία στηρίζει
τη δοκό, οι δύο αυτοί τύποι δοκών θα ήσαν στατικά απαράδεκτοι.";
```

```
In[15]:= sol6 = DSolve[BeamEqs6 /. p[x] -> p0, v[x], x]
```

```
Out[15]= {{v(x) -> \frac{p0}{k}}}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-MF3 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ: ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ, ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ)

```
In[16]:= comment3 =
```

"Είναι σκόπιμο, μάλλον αναγκαίο, η δυσκαμψία EI να γράφεται στη Mathematica με ενιαίο σύμβολο (όχι σαν γινόμενο). Αυτό συμβαίνει, επειδή το σύμβολο E δηλώνει στη Mathematica τη βάση των φυσικών λογαρίθμων e. Επίσης το σύμβολο I δηλώνει τη φανταστική μονάδα i. Από την άλλη πλευρά στη Μηχανική των Υλικών, στη Στατική και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα η δυσκαμψία EI μιας δοκού συνήθως εννοείται σαν μια ενιαία φυσική ποσότητα, παρόλο που είναι γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας E του υλικού της δοκού επί τη ροπή αδρανείας της I ως προς τον ουδέτερο άξονά της κατά την κάμψη. Ας σημειωθεί τέλος ότι εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί η χρήση των Ελληνικών συμβόλων E και I (με Esc E Esc και Esc I Esc ή με το πληκτρολόγιο στα Ελληνικά). Με τον τρόπο αυτό παρακάμπτονται οι ορισμοί των συμβόλων αυτών (E και I) στην ίδια τη Mathematica (στις Λατινικές τους μορφές), όπως εξηγήθηκε παραπάνω.";

```
In[17]:= de = X''''[x] - \beta^4 X[x] == 0
```

```
Out[17]= X^{(4)}(x) - \beta^4 X(x) == 0
```

```
In[18]:= sol = DSolve[de, X[x], x]
```

```
Out[18]= {{X(x) -> e^{-x\beta} c_2 + e^{x\beta} c_4 + c_1 \cos(x\beta) + c_3 \sin(x\beta)}}
```

```
In[19]:= Xs[x_] = sol[[1, 1, 2]] // ExpToTrig // Simplify
```

```
Out[19]= c_1 \cos(x\beta) + (c_2 + c_4) \cosh(x\beta) + c_3 \sin(x\beta) + (c_4 - c_2) \sinh(x\beta)
```

```
In[20]:= ver = de /. X -> Xs // Simplify
```

```
Out[20]= True
```

```
In[21]:= Cosh[x]^2 + Sinh[x]^2 == 1 // Simplify
```

```
Out[21]= \cosh(2x) == 1
```

```
In[22]:= Cosh[x]^2 - Sinh[x]^2 == 1 // Simplify
```

```
Out[22]= True
```

```
In[23]:= Xg[x_] = A Cosh[\beta x] + B Sinh[\beta x] + C Cos[\beta x] + D Sin[\beta x]
```

```
Out[23]= C \cos(x\beta) + A \cosh(x\beta) + D \sin(x\beta) + B \sinh(x\beta)
```

■ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟΣ

In[24]:= D1 = Det[{{1, 0, 1, 0}, {0, β, 0, β}, {Cosh[β L], Sinh[β L], Cos[β L], Sin[β L]},
{β Sinh[β L], β Cosh[β L], -β Sin[β L], β Cos[β L]}}] == 0 // Simplify

Out[24]= $2\beta^2(\cos(L\beta)\cosh(L\beta) - 1) == 0$

■ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ

In[25]:= D2 = Det[{{1, 0, 1, 0}, {β², 0, -β², 0}, {Cosh[β L], Sinh[β L], Cos[β L], Sin[β L]},
{β² Cosh[β L], β² Sinh[β L], -β² Cos[β L], -β² Sin[β L]}}] == 0 // Simplify

Out[25]= $4\beta^4\sin(L\beta)\sinh(L\beta) == 0$

In[26]:= β[n_] = n π / L

Out[26]= $\frac{n\pi}{L}$

In[27]:= tb1 = Table[β[n], {n, 10}]

Out[27]= $\left\{\frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \frac{5\pi}{L}, \frac{6\pi}{L}, \frac{7\pi}{L}, \frac{8\pi}{L}, \frac{9\pi}{L}, \frac{10\pi}{L}\right\}$

■ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

In[28]:= ω[n_] = β[n]² Sqrt[EI / ρA]

Out[28]= $\frac{n^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}$

In[29]:= tb2 = Table[ω[n], {n, 10}]

Out[29]= $\left\{\frac{\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{4\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{9\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{16\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{25\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{36\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{49\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{64\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{81\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}, \frac{100\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2}\right\}$

■ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

In[30]:= X[n_, x_] = Sin[β[n] x]

Out[30]= $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

In[31]:= tb3 = Table[X[n, x], {n, 10}]

Out[31]= $\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{6\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{8\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{9\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{10\pi x}{L}\right)\right\}$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF4 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ, ΩΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ)

In[32]:= vde = u''[t] + 2 ξ ω0 u'[t] + ω0² u[t] == p[t] / m

Out[32]= $u(t) \omega_0^2 + 2 \xi u'(t) \omega_0 + u''(t) == \frac{p(t)}{m}$

In[33]:= ics = {u[0] → 0, u'[0] → 0};

In[34]:= p1[t_] = DiracDelta[t]

Out[34]= $\delta(t)$

In[35]:= lt1 = LaplaceTransform[vde /. p → p1, t, s] /. ics

Out[35]= $\text{LaplaceTransform}[u(t), t, s] s^2 + 2 \xi \omega_0 \text{LaplaceTransform}[u(t), t, s] s + \omega_0^2 \text{LaplaceTransform}[u(t), t, s] == \frac{1}{m}$

In[36]:= lt2 = lt1 /. LaplaceTransform[u[t], t, s] → U[s]

Out[36]= $U(s) s^2 + 2 \xi \omega_0 U(s) s + \omega_0^2 U(s) == \frac{1}{m}$

In[37]:= G[s_] = Solve[lt2, U[s]] [[1, 1, 2]]

Out[37]= $\frac{1}{m(s^2 + 2 \xi \omega_0 s + \omega_0^2)}$

In[38]:= g[t_] = InverseLaplaceTransform[G[s], s, t]

Out[38]= $\frac{e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0} (-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0})}{2 m \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}$

In[39]:= g1[t_] = g[t] /. ξ → 0 // ExpToTrig // Simplify

Out[39]= $\frac{\sin(t \omega_0)}{m \omega_0}$

In[40]:= "Η έξοδος της εντολής είναι $\sin(\omega_0 t) / (m \omega_0)$, μια γνωστή κρουστική απόκριση.";

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF5 (ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

In[41]:= up[t_] = (1 / (m ω0)) Integrate[p[τ] Sin[ω0 (t - τ)], {τ, 0, t}]

Out[41]= $\frac{\int_0^t p(\tau) \sin((t - \tau) \omega_0) d\tau}{m \omega_0}$

In[42]:= up1[t_] = up[t] /. p[τ] → p0 // Simplify // Factor

Out[42]= $-\frac{p_0 (\cos(t \omega_0) - 1)}{m \omega_0^2}$

In[43]:= subs = UnitStep[-T] → 0;

In[44]:= `up2[t_] = up[t] /. p[τ] → p0 (1 - UnitStep[τ - T]) /. subs // Simplify`

$$\text{Out[44]} = -\frac{p_0(\cos(t\omega_0) - (\cos((T-t)\omega_0) - 1)\theta(t-T) - 1)}{m\omega_0^2}$$

In[45]:= `up3[t_] = up[t] /. p[τ] → p0 τ e^{-cτ} // FullSimplify`

$$\text{Out[45]} = \frac{e^{-ct} p_0 (t\omega_0^3 + c(c t + 2)\omega_0 + e^{ct}(\sin(t\omega_0)(c^2 - \omega_0^2) - 2c\cos(t\omega_0)\omega_0))}{m\omega_0(c^2 + \omega_0^2)^2}$$

In[46]:= `upξ[t_] = (1 / (m ω_D)) Integrate[p[τ] e^{-ξ ω_0 (t-τ)} Sin[ω_D (t - τ)], {τ, 0, t}]`

$$\text{Out[46]} = \frac{\int_0^t e^{-\xi(t-\tau)\omega_0} p(\tau) \sin((t-\tau)\omega_D) d\tau}{m\omega_D}$$

In[47]:= `upξ1[t_] = upξ[t] /. p[τ] → p0 // Simplify`

$$\text{Out[47]} = -\frac{e^{-t\xi\omega_0} p_0 (\xi \sin(t\omega_D) \omega_0 + (\cos(t\omega_D) - e^{t\xi\omega_0}) \omega_D)}{m\omega_D (\xi^2 \omega_0^2 + \omega_D^2)}$$

In[48]:= `upξ2[t_] = upξ[t] /. p[τ] → p0 (1 - UnitStep[τ - T]) /. subs // Simplify`

$$\text{Out[48]} = -\frac{1}{m\omega_D (\xi^2 \omega_0^2 + \omega_D^2)} (e^{-t\xi\omega_0} p_0 (\omega_D (\cos(t\omega_D) - e^{t\xi\omega_0} + (e^{t\xi\omega_0} - e^{T\xi\omega_0} \cos((t-T)\omega_D)) \theta(t-T)) + \xi \omega_0 (\sin(t\omega_D) - e^{T\xi\omega_0} \sin((t-T)\omega_D) \theta(t-T)))$$

In[49]:= `upξ3[t_] = upξ[t] /. p[τ] → p0 τ e^{-cτ} // FullSimplify`

$$\text{Out[49]} = \frac{1}{m\omega_D ((c - \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2)^2} (e^{-ct} p_0 (t\omega_D^3 - 2e^{t(c-\xi\omega_0)} \cos(t\omega_D) (c - \xi\omega_0) \omega_D + (c - \xi\omega_0) (c t - \xi\omega_0 t + 2) \omega_D + e^{t(c-\xi\omega_0)} \sin(t\omega_D) ((c - \xi\omega_0)^2 - \omega_D^2)))$$

In[50]:= `up3[t] == upξ3[t] /. {ξ → 0, ω_D → ω_0} // Simplify`

Out[50]= True

In[51]:= `comment4 = "Για την εύρεση των δύο παραπάνω αποκρίσεων $u_{p3}(t)$ και $u_{pξ3}(t)$ μπορούν να εφαρμοσθούν οι μέθοδοι (α) της μεταβολής των παραμέτρων σε συνδυασμό με την εκθετική αντικατάσταση για την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση και (β) του μετασχηματισμού Laplace.";`

In[52]:= `comment5 =`

"Από τις δύο αυτές μεθόδους πλεονεκτεί η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace, γιατί είναι απλούστερη, με λιγότερους υπολογισμούς. Επίσης ενσωματώνει τις αρχικές συνθήκες. Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων παρουσιάζει δυσκολία στην τελική ενσωμάτωση της αρχικής τιμής $v(0) = v_0$ της ταχύτητας $v(t)$ εξαιτίας της απαιτούμενης παραγωγίσεως του σχετικού ολοκληρωτικού τύπου για τη μετατόπιση $u(t)$ φυσικά με $v(t) = u'(t)$. Δυστυχώς η παραγωγή αυτή δεν είναι απλή.";

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF6 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΙΔΕΑΤΑ ΚΤΙΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ)

In[53]:= `{m1 = 4 m0, m2 = 3 m0, h1 = 5 h0, h2 = 4 h0, EI1 = 3 EI0, EI2 = 2 EI0}`

Out[53]= {4 m0, 3 m0, 5 h0, 4 h0, 3 EI0, 2 EI0}

```
In[54]:= M = {{m1, 0}, {0, m2}}; M // MatrixForm
```

```
Out[54]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4 m_0 & 0 \\ 0 & 3 m_0 \end{pmatrix}$$

```
In[55]:= comment6 = "Το μητρώο μάζας M καλείται επίσης και μητρώο αδρανεΐας.";
```

```
In[56]:= comment7 = "Ο λόγος που το μητρώο μάζας M καλείται και μητρώο αδρανεΐας είναι απλά ότι το μητρώο αυτό M υπεισέρχεται στον αδρανεΐακό όρο M u''(t) στις αδρανεΐακές δύναμεις Fik = -mk uk''(t) κατά τη χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί γενικά τον όρο μητρώο μάζας και πολύ σπάνια τον όρο μητρώο αδρανεΐας στη Δυναμική των Κατασκευών. Ο δεύτερος αυτός όρος, ο όρος μητρώο αδρανεΐας, χρησιμοποιείται κάπως περισσότερο σε βιβλία Ταλαντώσεων.";
```

```
In[57]:= {k10 = 24 EI1 / h13, k20 = 24 EI2 / h23}
```

$$\text{Out[57]} = \left\{ \frac{72 EI_0}{125 h_0^3}, \frac{3 EI_0}{4 h_0^3} \right\}$$

```
In[58]:= {sb = EI0 → 500 h03 k0 / 3, k1 = k10 /. sb, k2 = k20 /. sb}
```

$$\text{Out[58]} = \left\{ EI_0 \rightarrow \frac{500 h_0^3 k_0}{3}, 96 k_0, 125 k_0 \right\}$$

```
In[59]:= K = {{k1 + k2, -k2}, {-k2, k2}}
```

$$\text{Out[59]} = \begin{pmatrix} 221 k_0 & -125 k_0 \\ -125 k_0 & 125 k_0 \end{pmatrix}$$

```
In[60]:= {MI = Inverse[M], MT = Transpose[M], KI = Inverse[K], KT = Transpose[K]};
```

```
In[61]:= KI // MatrixForm
```

```
Out[61]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{96 k_0} & \frac{1}{96 k_0} \\ \frac{1}{96 k_0} & \frac{221}{12000 k_0} \end{pmatrix}$$

```
In[62]:= {MT == M, KT == K}
```

```
Out[62]= {True, True}
```

```
In[63]:= I2 = IdentityMatrix[2]
```

$$\text{Out[63]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[64]:= {MI.M == I2, KI.K == I2}
```

```
Out[64]= {True, True}
```

```
In[65]:= λ = Eigenvalues[K] // N
```

```
Out[65]= {39.1008 k0, 306.899 k0}
```

```
In[66]:= δ = Eigenvectors[K] // N
```

$$\text{Out[66]} = \begin{pmatrix} 0.687194 & 1. \\ -1.45519 & 1. \end{pmatrix}$$

```
In[67]:= Eigensystem[K] // N
```

```
Out[67]=  $\left( \begin{array}{cc} 39.1008 \text{ k0} & 306.899 \text{ k0} \\ \{0.687194, 1.\} & \{-1.45519, 1.\} \end{array} \right)$ 
```

```
In[68]:=  $\Lambda = \text{DiagonalMatrix}[\lambda]$ 
```

```
Out[68]=  $\left( \begin{array}{cc} 39.1008 \text{ k0} & 0 \\ 0 & 306.899 \text{ k0} \end{array} \right)$ 
```

```
In[69]:=  $T = \text{Transpose}[\delta]$ 
```

```
Out[69]=  $\left( \begin{array}{cc} 0.687194 & -1.45519 \\ 1. & 1. \end{array} \right)$ 
```

```
In[70]:=  $D1 = \text{Inverse}[T].K.T // \text{Simplify}$ 
```

```
Out[70]=  $\left( \begin{array}{cc} 39.1008 \text{ k0} & 3.55271 \times 10^{-14} \text{ k0} \\ -1.42109 \times 10^{-14} \text{ k0} & 306.899 \text{ k0} \end{array} \right)$ 
```

```
In[71]:=  $D1 == \Lambda // \text{Chop}$ 
```

```
Out[71]= True
```

```
In[72]:=  $D2 = \text{Transpose}[T].K.T // \text{Chop}$ 
```

```
Out[72]=  $\left( \begin{array}{cc} 57.5656 \text{ k0} & 0 \\ 0 & 956.786 \text{ k0} \end{array} \right)$ 
```

```
In[73]:= comment8 = "Όχι, δεν είναι καθόλου χρήσιμα για τον Πολιτικό Μηχανικό οι ιδιοτιμές  $\lambda$  και τα ιδιοδιανύσματα  $\delta$  του μητρώου δυσκαμψίας  $K$ ";
```

```
In[74]:= comment9 = "Αυτό συμβαίνει γιατί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων  $M u''(t) + K u(t) = 0$  στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών περιλαμβάνει όχι μόνο το μητρώο δυσκαμψίας  $K$ , αλλά και το μητρώο μάζας  $M$  και δε μπορούμε να αγνοήσουμε το γεγονός αυτό. Δεν έχουμε να κάνουμε μόνο με το μητρώο δυσκαμψίας  $K$ . Σωστά;"
```

```
In[75]:= comment10 =
```

"Μια δυνατότητα αναγωγής του παραπάνω μη κλασικού προβλήματος ιδιοτιμών (ή ιδιοπροβλήματος) στη Δυναμική των Κατασκευών στο αντίστοιχο κλασικό πρόβλημα αποτελεί ο πολλαπλασιασμός από τα αριστερά με το αντίστροφο μητρώο μάζας M^{-1} . Έτσι παίρνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων $u''(t) + M^{-1} K u(t) = 0$. Αυτό ταιριάζει πολύ καλύτερα με το κλασικό πρόβλημα των ιδιοτιμών, παρόλο που συνεχίζει να είναι σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως και όχι πρώτης. Έτσι χρήσιμο μητρώο είναι το μητρώο $M^{-1} K$. Δυστυχώς όμως πρόκειται για μη συμμετρικό μητρώο που σπάνια χρησιμοποιείται από τον Πολιτικό Μηχανικό. Χρησιμοποιείται μόνο σε περιπτώσεις που αυτός προσφεύγει σε έτοιμα προγράμματα επιλύσεως του κλασικού ιδιοπροβλήματος: του προβλήματος προσδιορισμού των ιδιοτιμών λ και των ιδιοδιανυσμάτων δ τετραγωνικού μητρώου. Αυτό σπάνια συμβαίνει, επειδή ο Πολιτικός Μηχανικός έχει τα δικά του προγράμματα για το δικό του μη κλασικό ιδιοπρόβλημα: το κλασικό πρόβλημα των ταλαντώσεων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας στη Δυναμική των Κατασκευών.";

```
In[76]:= comment11 = "Στο αμέσως προηγούμενο σχόλιο comment10 εξηγήθηκε ήδη λεπτομερώς για ποιο ακριβώς λόγο το γενικά μη συμμετρικό πραγματικό μητρώο  $M^{-1} K$  μπορεί να χρησιμεύσει στον Πολιτικό Μηχανικό, αν και σπάνια χρησιμεύει στην πραγματικότητα, όπως επίσης εξηγήθηκε.";
```

```
In[77]:= u[t_] = {{u1[t]}, {u2[t]}}
```

```
Out[77]=  $\begin{pmatrix} u1(t) \\ u2(t) \end{pmatrix}$ 
```

```
In[78]:= bdsde = M.u''[t] + K.u[t] == {{0}, {0}}
```

```
Out[78]=  $\begin{pmatrix} 221 k0 u1(t) - 125 k0 u2(t) + 4 m0 u1''(t) \\ -125 k0 u1(t) + 125 k0 u2(t) + 3 m0 u2''(t) \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
In[79]:= FrequencyEquation = Det[K - ω² M] == 0
```

```
Out[79]=  $12 m0^2 ω^4 - 1163 k0 m0 ω^2 + 12000 k0^2 == 0$ 
```

```
In[80]:= FrequencyEquationSolution = Solve[FrequencyEquation, ω] // N
```

```
Out[80]=  $\left\{ \left\{ \omega \rightarrow 3.42642 \sqrt{\frac{k0}{m0}} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow -3.42642 \sqrt{\frac{k0}{m0}} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow -9.2291 \sqrt{\frac{k0}{m0}} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow 9.2291 \sqrt{\frac{k0}{m0}} \right\} \right\}$ 
```

```
In[81]:= comment12 =
```

"Προφανώς αποδεκτές είναι μόνο οι δύο θετικές ρίζες της (από τις τέσσερις παραπάνω συνολικά). Αυτές αφορούν στις δύο ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2 του διώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως που εξετάζουμε. Αρνητικές ιδιοσυχνότητες δεν υπάρχουν στις Ταλαντώσεις και στη Δυναμική των Κατασκευών. Οι θετικές ιδιοσυχνότητες μας αρκούν. Τούτο είναι απόλυτα σαφές από τις σχετικές τριγωνομετρικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων του σχετικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων."

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MF7 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΙΔΕΑΤΑ ΚΤΙΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ)

```
In[82]:= MI = Inverse[M]
```

```
Out[82]=  $\begin{pmatrix} \frac{1}{4 m0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3 m0} \end{pmatrix}$ 
```

```
In[83]:= ver = MI.M == IdentityMatrix[2]
```

```
Out[83]= True
```

```
In[84]:= A = Inverse[M].K
```

```
Out[84]=  $\begin{pmatrix} \frac{221 k0}{4 m0} & -\frac{125 k0}{4 m0} \\ -\frac{125 k0}{3 m0} & \frac{125 k0}{3 m0} \end{pmatrix}$ 
```

```
In[85]:= bdsde = u''[t] + A.u[t] == {{0}, {0}}
```

```
Out[85]=  $\begin{pmatrix} \frac{221 k0 u1(t)}{4 m0} - \frac{125 k0 u2(t)}{4 m0} + u1''(t) \\ -\frac{125 k0 u1(t)}{3 m0} + \frac{125 k0 u2(t)}{3 m0} + u2''(t) \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
In[86]:= λA = Eigenvalues[A] // N
```

```
Out[86]=  $\left\{ \frac{11.7404 k0}{m0}, \frac{85.1763 k0}{m0} \right\}$ 
```

In[87]:= $\omega A = \text{Sqrt}[\lambda A]$

Out[87]= $\left\{ 3.42642 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}, 9.2291 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \right\}$

In[88]:= $\{\omega_1 = \omega A[[1]], \omega_2 = \omega A[[2]]\}$

Out[88]= $\left\{ 3.42642 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}, 9.2291 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \right\}$

In[89]:= $\omega t b = \text{Table}[\text{FrequencyEquationSolution}[[k, 1, 2]], \{k, 1, 4, 3\}]$

Out[89]= $\left\{ 3.42642 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}, 9.2291 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \right\}$

In[90]:= $\omega A == \omega t b$

Out[90]= True

In[91]:= $M1 = \text{Sqrt}[M]$

Out[91]= $\begin{pmatrix} 2\sqrt{m_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{3}\sqrt{m_0} \end{pmatrix}$

In[92]:= $M2 = \text{Inverse}[M1]$

Out[92]= $\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m_0}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m_0}} \end{pmatrix}$

In[93]:= K

Out[93]= $\begin{pmatrix} 221 k_0 & -125 k_0 \\ -125 k_0 & 125 k_0 \end{pmatrix}$

In[94]:= $B = M2.K.M2$

Out[94]= $\begin{pmatrix} \frac{221 k_0}{4 m_0} & -\frac{125 k_0}{2\sqrt{3} m_0} \\ -\frac{125 k_0}{2\sqrt{3} m_0} & \frac{125 k_0}{3 m_0} \end{pmatrix}$

In[95]:= $\text{SymmetryVerification} = \text{Transpose}[B] == B$

Out[95]= True

In[96]:= $\omega B = \text{Sqrt}[\text{Eigenvalues}[B] // N]$

Out[96]= $\left\{ 3.42642 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}, 9.2291 \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \right\}$

In[97]:= $\omega A == \omega B == \omega t b$

Out[97]= True

In[98]:= $\omega B a = \omega B /. \text{Sqrt}[k_0 / m_0] \rightarrow \omega_0$

Out[98]= $\{3.42642 \omega_0, 9.2291 \omega_0\}$

In[99]:= $\text{comment13} =$

"Όχι, οι σταθερές m_0 , k_0 και ω_0 δεν έχουν καμία φυσική σημασία. Είναι βοηθητικά μεγέθη. Φυσική σημασία έχουν οι μάζες των πλακών, οι σταθερές δυσκαμψίας των ορόφων και οι αληθινές ιδιοσυχνότητες.";

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-MG

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG1 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε πρόβολο μήκους L ($0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI υπό σταθερή φόρτιση p_0 . Άγνωστη συνάρτηση είναι εδώ το βέλος κάμψης $v(x)$. Ζητούνται: (1) Η σχετική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως beamde και (2) οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες bcs. (3) Όλες μαζί οι εξισώσεις αυτές eqs. (4) Η λύση τους sol και (5) η σχετική συνάρτηση $v_s(x)$ (με απλοποίηση). (6) Η επαλήθευση της λύσεως sol. (7) Σε λίστα οι συναρτήσεις για τη γωνία στροφής $\theta(x)$, την καμπτική ροπή $M(x)$ και την τέμνουσα (διατμητική) δύναμη $Q(x)$ (με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG2 (Ταλαντώσεις): Θεωρούμε μονοβάθμιο αρμονικό ταλαντωτή υλικού σημείου-ελατηρίου ιδιοσυχνότητας ω_0 χωρίς απόσβεση και σε εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$. Ζητούνται: (8) Η σχετική διαφορική εξίσωση vde και η (9) δήλωση με το σύμβολο ics των αρχικών συνθηκών $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ σε μορφή δηλώσεων τιμών (όχι εξισώσεων!). Θεωρούμε τώρα τις εξωτερικές φορτίσεις $p_1(t) = p_0 \cos \omega_0 t$, $p_2(t) = p_0 \sin(\omega_0 t - \alpha)$, $p_3(t) = p_0 e^{i\omega t}$, $p_4(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3$, $p_5(t) = p_0 t \cos \omega t$ και $p_6(t) = p_0 t \cos \omega_0 t$ (με $\omega \neq \omega_0$). Ζητούνται απλά οι υποθέσεις (10) $u_{p1}(t)$, (11) $u_{p2}(t)$, (12) $u_{p3}(t)$, (13) $u_{p4}(t)$, (14) $u_{p5}(t)$ και (15) $u_{p6}(t)$ που πρέπει να γίνουν για τις αντίστοιχες μερικές (ή ειδικές) λύσεις $u_p(t)$ σύμφωνα με τη γνωστή μας μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. (16) Σε σχόλιο comment1 ποιες άλλες μέθοδοι θα μπορούσαν να εφαρμοσθούν; Στη συνέχεια ζητούνται επίσης: (17) ο μετασχηματισμός Laplace lt της διαφορικής εξίσωσης vde, (18) η λύση sol της αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει, (19) ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ilt, (20) η συνάρτηση $u_s(t)$ για τη λύση του προβλήματος αυτού, (21) η επαλήθευση ver 1 των αρχικών συνθηκών και (22) ver 2 της διαφορικής εξίσωσης (με απλοποίηση). Από τη λύση $u_s(t)$ ζητούνται μετά οι λύσεις (23) για $p(t) = p_0$, (24) για $p(t) = p_0 e^{-ct}$ και (25) για $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$ (και οι τρεις με απλοποιήσεις).

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG3 (Μετασχηματισμός Laplace): Εδώ θεωρούμε το γνωστό μετασχηματισμό Laplace. Εδώ ζητούνται: (26) Η δήλωση της εντολής υπολογισμού του στη Mathematica με το σύμβολο L αντί για το σύμβολο LaplaceTransform. (Από 'δώ και πέρα ζητείται η συνεχής χρήση του συμβόλου αυτού L.) (27) Λίστα με δύο στοιχεία: (i) τη φράση «Γραμμική ιδιότητα» και την ιδιότητα αυτή, ώστε να προκύψει αποτέλεσμα True (αληθής). Ανάλογα για το μετασχηματισμό Laplace (28) της δευτέρας παραγώγου και (29) της τετάρτης παραγώγου επαρκώς παραγωγίσιμης συναρτήσεως $u(t)$, (30) του μετασχηματισμού Laplace ολοκληρώματος και (31) του θεωρήματος της συνελιξέως. (32) Πίνακας TableOfDerivatives των δέκα πρώτων παραγώγων παραγωγίσιμης συναρτήσεως $u(t)$ και (33) λίστα με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG4 (Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων): Θεωρούμε εδώ το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων: $\dot{x}(t) = x(t) + 2y(t)$ και $\dot{y}(t) = 4x(t) + 3y(t)$ με τις αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $y(0) = y_0$. Ζητούνται: Η δήλωση (34) των διαφορικών εξισώσεων με το σύμβολο sde και (35) των αρχικών συνθηκών με το σύμβολο ics. Κατόπιν (36) η άμεση λύση sol αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών (με πλήρη απλοποίηση), (37) οι αντίστοιχες συναρτήσεις $x_s(t)$ και $y_s(t)$ σε λίστα και (38) η επαλήθευση ver τόσο των διαφορικών εξισώσεων όσο και των αρχικών συνθηκών (με μία εντολή και με απλοποίηση). Στη συνέχεια (39) να δηλωθούν οι τιμές $x_0 = 3$ και $y_0 = 1$ σαν αντικαταστάσεις με το σύμβολο values και (40) να σχεδιασθεί η αντίστοιχη λύση $x_s(t)$ και $y_s(t)$ με τον τίτλο «SOLUTION OF THE SYSTEM» και με άξονες t και x, y .

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG5 (Ταλαντώσεις): Ζητούνται: (41) Να δηλωθεί ο πίνακας των οκτώ συναρτήσεων x^{3k} με $k = 0, 1, \dots, 7$ σε λίστα list. Στη συνέχεια με σύντομη εντολή να υπολογισθούν (42) το μητρώο Wmat της αντίστοιχης ορίζουσας Wronski W και μετά (43) η ίδια η ορίζουσα Wronski W . (44) Να απαλειφθεί (να «καθαρισθεί») το σύμβολο u . Θεωρούμε τώρα τη διαφορική εξίσωση του μονοβάθμιου ταλαντωτή υλικού σημείου-ελατηρίου-αποσβεστήρα με ισχυρή απόσβεση σε ελεύθερες ταλαντώσεις με σταθερές ω_0 και ξ . Ζητούνται: (45) Η δήλωσή της με το σύμβολο vde και (46) των δύο αρχικών συνθηκών $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ (σαν εξισώσεων) με το σύμβολο ics.

(47) Η λύση sol του προβλήματος αυτού (με πλήρη απλοποίηση) και (48) η σχετική συνάρτηση $u_s(t)$ με χρήση και του συμβόλου $a_D = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$ (με κατάλληλη αντικατάσταση). Να υπολογισθούν οι δύο συναρτήσεις (49) $u_1(t)$ και (50) $u_2(t)$ που πολλαπλασιάζουν τις αρχικές τιμές u_0 και v_0 αντίστοιχα στη λύση και (51) να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία τους με χρήση κατάλληλης ορίζουσας W . Τέλος σε σχόλια comment2 και comment3 να γραφούν τα γενικά συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από την ορίζουσα W (52) γενικά και (53) για λύσεις διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG6 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους $2a$ ($a > 0$) και δυσκαμψίας EI υπό κάθετη φόρτιση $p(x)$. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού. Ζητούνται: (54) Η σχετική διαφορική εξίσωση bde. (55) Ο μετασχηματισμός Laplace lt της διαφορικής εξίσωσης bde (χωρίς συνοριακές συνθήκες) και (56) η απλοποιημένη γραφή του lt1 με τη χρήση των συμβόλων $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ και $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$. (57) Η λύση sol1 της αλγεβρικής εξίσωσης lt1 και (58) η λύση sol της αντίστοιχης εξίσωσης lt. (59) Στη συνέχεια από τη λύση sol το βέλος κάμψεως $v_s(x)$ χωρίς αρχικές συνθήκες και υπό αυθαίρετη φόρτιση $p(x)$. (60) Τώρα η δήλωση subs1 αντικαταστάσεων των αρχικών τιμών $v(0)$, $v'(0)$, $v''(0)$ και $v'''(0)$ με κατάλληλη χρήση γνωστών τιμών v_0 , θ_0 , M_0 και Q_0 για $x = 0$. (61) Σε σχόλιο comment4 τι δηλώνει καθεμιά από τις τέσσερις αυτές τιμές; Σε σχόλια comment5 και comment6 από ποιους απλούς τύπους μπορούν να υπολογισθούν οι ποσότητες (62) M_0 και (63) Q_0 για πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$; (64) Τώρα ζητείται να ξαναγραφεί η λύση $v_s(x)$ σαν $v_{s1}(x)$ με τις αντικαταστάσεις subs1 και τη χρήση και της εντολής Apart και στη συνέχεια (65) να γίνει επαλήθευση ver1 της λύσεως $v_{s1}(x)$ ως προς τη διαφορική εξίσωση bde. (66) Σε λίστα να υπολογισθούν οι τιμές της συναρτήσεως $v_{s1}(x)$ και των τριών πρώτων παραγώγων της για $x = 0$. Θεωρούμε τώρα τη φόρτιση $p(x)$ της δοκού ότι αποτελείται από μία ομοιόμορφη κατανομημένη φόρτιση p_0 και δύο συγκεντρωμένα φορτία P_1 και P_2 στο μέσον της δοκού και στο δεξιό άκρο της αντίστοιχα. Ζητούνται επίσης: (67) Η δήλωση της ωστικής συναρτήσεως $\delta(x)$ του Dirac με το σύμβολο δ . (68) Η δήλωση της πιο πάνω φορτίσεως της δοκού σαν $p_1(x)$ και (69) η αντίστοιχη μορφή bde1 της διαφορικής εξίσωσης bde. (70) Με το σύμβολο subs2 η δήλωση των αντικαταστάσεων $H(a) \rightarrow 1$, $H(2a) \rightarrow 1$ και $H(x - 2a) \rightarrow 0$ για τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(x)$ ειδικά στο παρόν πρόβλημα δοκού με $0 \leq x \leq 2a$. (71) Ο μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής εξίσωσης bde1 με τις αντικαταστάσεις subs1 και subs2, (72) η λύση sol1 της αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει και (73) το βέλος κάμψεως $v_{s1}(x)$ υπό την παρούσα φόρτιση $p_1(x)$ (με απλοποίηση). Σε δύο σχόλια comment7 και comment8 να εξηγηθεί (74) πού υστερεί η λύση αυτή $v_{s1}(x)$ για μια συγκεκριμένη δοκό (π.χ. έναν πρόβολο) και (75) τι ακριβώς πρέπει να κάνει ο Πολιτικός Μηχανικός, ώστε να μπορέσει να την αξιοποιήσει;

ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG7 (Δυναμική των Κατασκευών): Θεωρούμε διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως. Με τις συνήθεις παραδοχές προκύπτουν οι συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις ως προς τις δύο άγνωστες οριζόντιες μετατοπίσεις των ορόφων $u_1(t)$ και $u_2(t)$:

$$4\ddot{u}_1(t) + 221\omega_0^2 u_1(t) - 125\omega_0^2 u_2(t) = 0 \quad \text{και} \quad 3\ddot{u}_2(t) - 125\omega_0^2 u_1(t) + 125\omega_0^2 u_2(t) = 0.$$

(Το ω_0 είναι γνωστή σταθερά.) Ζητούνται: (76) Η απαλοιφή (το «καθάρισμα») των συμβόλων u_1 και u_2 . (77) Η δήλωση του συστήματος αυτών των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σαν bdes. (78) Η δήλωση του συμβόλου $c = \cos(\omega t - \alpha)$. (79) Σε λίστα η δήλωση δύο δοκιμαστικών συναρτήσεων $u_{10}(t)$ και $u_{20}(t)$ για τη χρήση της μεθόδου της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως με βάση το c και (80) η μορφή baes που παίρνει τώρα το σύστημα bdes. Στη συνέχεια από τις εξισώσεις baes η εύρεση των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (81) eq1 και (82) eq2 (με απλοποιήσεις). Τώρα (83) η κατευθείαν γραφή της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων FrequencyEquation1 με τη χρήση ορίζουσας και (84) η λύση της sol (με δεκαδικές προσεγγίσεις). Σε σχόλια comment9 και comment10 (85) πόσες είναι οι λύσεις της εξίσωσης FrequencyEquation1 και (86) πόσες από αυτές είναι δεκτές στο διώροφο κτίριό μας; Αυτές που δεν είναι αποδεκτές για ποιο λόγο απορρίπτονται; (87) Αν γνωρίζαμε τα μητρώα μάζας \mathbf{M} και δυσκαμψίας \mathbf{K} , να γραφεί πάλι η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων. Σε σχόλια comment11 και comment12 ποιες άλλες μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν (88) για το ίδιο πρόβλημα και (89) για το πρόβλημα της σεισμικής φορτίσεως;

■ Notebook EMI-MG

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMI-MG (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMI-MG1 ΕΩΣ EMI-MG7)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMI-MG1 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```
In[1]:= {Off[General :: spell1],
        beamde = EI v''''[x] == p0};

In[2]:= bcs = {v[0] == 0, v'[0] == 0, v''[L] == 0, v'''[L] == 0};

In[3]:= eqs = {beamde, bcs}

Out[3]= {EI v^(4)(x) == p0, {v(0) == 0, v'(0) == 0, v''(L) == 0, v'''(L) == 0}}
```

```
In[4]:= sol = DSolve[eqs, v[x], x]

Out[4]= {{v(x) -> \frac{p0 x^4 - 4 L p0 x^3 + 6 L^2 p0 x^2}{24 EI}}}
```

```
In[5]:= vs[x_] = sol[[1, 1, 2]] // Simplify

Out[5]= \frac{p0 x^2 (6 L^2 - 4 x L + x^2)}{24 EI}
```

```
In[6]:= ver = eqs /. v -> vs

Out[6]= {True, {True, True, True, True}}
```

```
In[7]:= {theta[x_] = vs'[x], M[x_] = EI theta'[x], Q[x_] = M'[x]} // Simplify

Out[7]= {\frac{p0 x (3 L^2 - 3 x L + x^2)}{6 EI}, \frac{1}{2} p0 (L - x)^2, p0 (x - L)}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMI-MG2 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```
In[8]:= vde = u''[t] + ω0^2 u[t] == p[t] / m;

In[9]:= ics = {u[0] = u0, u'[0] = v0};

In[10]:= up1[t_] = t (A Cos[ω t] + B Sin[ω t]);

In[11]:= up2[t_] = t (A Cos[ω t] + B Sin[ω t]);

In[12]:= up3[t_] = A e^{i ω t};

In[13]:= up4[t_] = A + B t + C t^2 + D t^3;

In[14]:= up5[t_] = (A + B t) Cos[ω t] + (C + D t) Sin[ω t];

In[15]:= up6[t_] = t (A + B t) Cos[ω0 t] + t (C + D t) Sin[ω0 t];
```

```
In[16]:= comment1 = "Αντί για τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών
    θα μπορούσαν επίσης να εφαρμοσθούν οι μέθοδοι (α) της
    μεταβολής των παραμέτρων και (β) του μετασχηματισμού Laplace.";
```

```
In[17]:= lt = LaplaceTransform[vde, t, s]
```

```
Out[17]= LaplaceTransform[u(t), t, s] s^2 - u0 s - v0 + ω0^2 LaplaceTransform[u(t), t, s] ==
    LaplaceTransform[p(t), t, s]
    m
```

```
In[18]:= sol = Solve[lt, LaplaceTransform[u[t], t, s]]
```

```
Out[18]= {{LaplaceTransform[u(t), t, s] →  $\frac{su_0 + v_0 + \frac{\text{LaplaceTransform}[p(t), t, s]}{m}}{s^2 + \omega_0^2}$ }}
```

```
In[19]:= ilt = InverseLaplaceTransform[sol[[1, 1, 2]], s, t]
```

```
Out[19]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{\int_0^t p(s) \sin((t-s) \omega_0) ds}{m \omega_0}$  +  $\frac{v_0 \sin(t \omega_0)}{\omega_0}$ 
```

```
In[20]:= us[t_] = ilt
```

```
Out[20]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{\int_0^t p(s) \sin((t-s) \omega_0) ds}{m \omega_0}$  +  $\frac{v_0 \sin(t \omega_0)}{\omega_0}$ 
```

```
In[21]:= ver1 = ics /. u → us
```

```
Out[21]= {u0, v0}
```

```
In[22]:= ver2 = vde /. u → us // Simplify
```

```
Out[22]= True
```

```
In[23]:= us1[t_] = us[t] /. p[s] → p0 // Simplify
```

```
Out[23]=  $\frac{p_0 + (m u_0 \omega_0^2 - p_0) \cos(t \omega_0) + m v_0 \omega_0 \sin(t \omega_0)}{m \omega_0^2}$ 
```

```
In[24]:= us2[t_] = us[t] /. p[s] → p0 e^{-cs} // Simplify
```

```
Out[24]=  $\frac{e^{-ct} (p_0 \omega_0 + e^{ct} (m u_0 (c^2 + \omega_0^2) - p_0) \cos(t \omega_0) \omega_0 + e^{ct} (m v_0 c^2 + p_0 c + m v_0 \omega_0^2) \sin(t \omega_0))}{m \omega_0 (c^2 + \omega_0^2)}$ 
```

```
In[25]:= us3[t_] = us[t] /. p[s] → p0 Cos[ω0 s] // Simplify
```

```
Out[25]=  $\frac{2 m u_0 \omega_0 \cos(t \omega_0) + p_0 t \sin(t \omega_0) + 2 m v_0 \sin(t \omega_0)}{2 m \omega_0}$ 
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG3 (ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE)

```
In[26]:= L = LaplaceTransform
```

```
Out[26]= LaplaceTransform
```

```
In[27]:= {"Γραμμική ιδιότητα",
    L[c1 u1[t] + c2 u2[t], t, s] == c1 L[u1[t], t, s] + c2 L[u2[t], t, s]}
```

```
Out[27]= {Γραμμική ιδιότητα, True}
```

```

In[28]:= {"Μετασχηματισμός Laplace της δευτέρας παραγώγου",
          L[u''[t], t, s] == s^2 L[u[t], t, s] - s u[0] - u'[0]}

Out[28]= {Μετασχηματισμός Laplace της δευτέρας παραγώγου, True}

In[29]:= {"Μετασχηματισμός Laplace της τετάρτης παραγώγου",
          L[u''''[t], t, s] == s^4 L[u[t], t, s] - s^3 u[0] - s^2 u'[0] - s u''[0] - u''''[0]}

Out[29]= {Μετασχηματισμός Laplace της τετάρτης παραγώγου, True}

In[30]:= {"Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος",
          L[Integrate[u[τ], {τ, 0, t}], t, s] == L[u[t], t, s] / s}

Out[30]= {Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος, True}

In[31]:= {"Θεώρημα της συνελίξεως",
          L[Integrate[u1[τ] u2[t - τ], {τ, 0, t}], t, s] == L[u1[t], t, s] L[u2[t], t, s]}

Out[31]= {Θεώρημα της συνελίξεως, True}

In[32]:= TableOfDerivatives = Table[D[u[t], {t, n}], {n, 10}]

Out[32]= {u'(t), u''(t), u^(3)(t), u^(4)(t), u^(5)(t), u^(6)(t), u^(7)(t), u^(8)(t), u^(9)(t), u^(10)(t)}

In[33]:= L[TableOfDerivatives, t, s] // TraditionalForm

Out[33]//TraditionalForm=
{s LaplaceTransform[u(t), t, s] - u0, LaplaceTransform[u(t), t, s] s^2 - u0 s - v0,
 LaplaceTransform[u(t), t, s] s^3 - u0 s^2 - v0 s - u'(0),
 LaplaceTransform[u(t), t, s] s^4 - u0 s^3 - v0 s^2 - u'(0) s - u^(3)(0),
 LaplaceTransform[u(t), t, s] s^5 - u0 s^4 - v0 s^3 - u'(0) s^2 - u^(3)(0) s - u^(4)(0),
 LaplaceTransform[u(t), t, s] s^6 - u0 s^5 - v0 s^4 - u'(0) s^3 - u^(3)(0) s^2 - u^(4)(0) s - u^(5)(0),
 LaplaceTransform[u(t), t, s] s^7 - u0 s^6 - v0 s^5 - u'(0) s^4 - u^(3)(0) s^3 - u^(4)(0) s^2 - u^(5)(0) s - u^(6)(0),
 LaplaceTransform[u(t), t, s] s^8 - u0 s^7 - v0 s^6 - u'(0) s^5 - u^(3)(0) s^4 - u^(4)(0) s^3 - u^(5)(0) s^2 -
 u^(6)(0) s - u^(7)(0), LaplaceTransform[u(t), t, s] s^9 - u0 s^8 - v0 s^7 - u'(0) s^6 - u^(3)(0) s^5 -
 u^(4)(0) s^4 - u^(5)(0) s^3 - u^(6)(0) s^2 - u^(7)(0) s - u^(8)(0), LaplaceTransform[u(t), t, s] s^10 - u0 s^9 -
 v0 s^8 - u'(0) s^7 - u^(3)(0) s^6 - u^(4)(0) s^5 - u^(5)(0) s^4 - u^(6)(0) s^3 - u^(7)(0) s^2 - u^(8)(0) s - u^(9)(0)}

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG4 (ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ)

```

In[34]:= sde = {x'[t] == x[t] + 2 y[t], y'[t] == 4 x[t] + 3 y[t]}

Out[34]= {x'(t) == x(t) + 2 y(t), y'(t) == 4 x(t) + 3 y(t)}

In[35]:= ics = {x[0] == x0, y[0] == y0}

Out[35]= {x(0) == x0, y(0) == y0}

In[36]:= sol = DSolve[{sde, ics}, {x[t], y[t]}, t] // FullSimplify

Out[36]= {{x(t) -> 1/3 e^{-t} (2 x0 - y0 + e^{6t} (x0 + y0)), y(t) -> 1/3 e^{-t} (-2 x0 + y0 + 2 e^{6t} (x0 + y0))}}

In[37]:= {xs[t_] = sol[[1, 1, 2]], ys[t_] = sol[[1, 2, 2]]}

Out[37]= {1/3 e^{-t} (2 x0 - y0 + e^{6t} (x0 + y0)), 1/3 e^{-t} (-2 x0 + y0 + 2 e^{6t} (x0 + y0))}

```

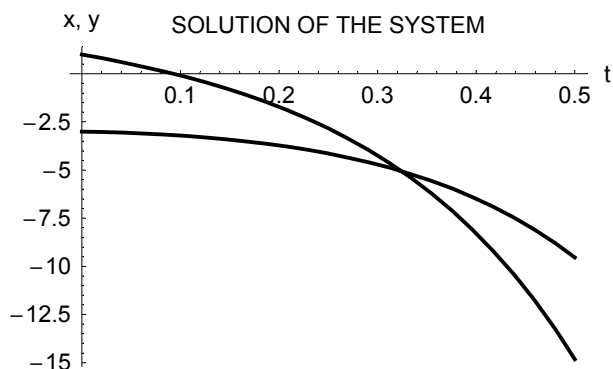
```
In[38]:= ver = {sde, ics} /. {x → xs, y → ys} // Simplify
```

```
Out[38]= ( True True
           True True )
```

```
In[39]:= values = {x0 → -3, y0 → 1}
```

```
Out[39]= {x0 → -3, y0 → 1}
```

```
In[40]:= Plot[{xs[t] /. values, ys[t] /. values}, {t, 0, 0.5},
             PlotStyle → Thickness[0.008], PlotLabel → "SOLUTION OF THE SYSTEM",
             AxesLabel → {"t", "x, y"}, DefaultFont → {"Arial", 11}];
```



■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG5 (ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```
In[41]:= list = Table[x3k, {k, 0, 7}]
```

```
Out[41]= {1, x3, x6, x9, x12, x15, x18, x21}
```

```
In[42]:= Wmat = Table[D[list, {x, n}], {n, 0, 7}]; Wmat // TraditionalForm
```

```
Out[42]//TraditionalForm=
```

1	x^3	x^6	x^9	x^{12}	x^{15}	x^{18}	x^{21}
0	$3x^2$	$6x^5$	$9x^8$	$12x^{11}$	$15x^{14}$	$18x^{17}$	$21x^{20}$
0	$6x$	$30x^4$	$72x^7$	$132x^{10}$	$210x^{13}$	$306x^{16}$	$420x^{19}$
0	6	$120x^3$	$504x^6$	$1320x^9$	$2730x^{12}$	$4896x^{15}$	$7980x^{18}$
0	0	$360x^2$	$3024x^5$	$11880x^8$	$32760x^{11}$	$73440x^{14}$	$143640x^{17}$
0	0	$720x$	$15120x^4$	$95040x^7$	$360360x^{10}$	$1028160x^{13}$	$2441880x^{16}$
0	0	720	$60480x^3$	$665280x^6$	$3603600x^9$	$13366080x^{12}$	$39070080x^{15}$
0	0	0	$181440x^2$	$3991680x^5$	$32432400x^8$	$160392960x^{11}$	$586051200x^{14}$

```
In[43]:= W = Det[Wmat]
```

```
Out[43]= 2869008922157039198208000 x56
```

```
In[44]:= Remove[u]
```

```
In[45]:= vde = u''[t] + 2ξω0 u'[t] + ω02 u[t] == 0
```

```
Out[45]= u(t)ω02 + 2ξ u'(t)ω0 + u''(t) == 0
```

```
In[46]:= ics = {u[0] == u0, u'[0] == v0}
```

```
Out[46]= {u(0) == u0, u'(0) == v0}
```

```
In[47]:= sol = DSolve[{vde, ics}, u[t], t] // FullSimplify
```

$$\text{Out[47]} = \left\{ \left\{ u(t) \rightarrow e^{-t\xi\omega_0} \left(u_0 \cosh(t\sqrt{\xi^2-1}\omega_0) + \frac{(v_0 + u_0\xi\omega_0) \sinh(t\sqrt{\xi^2-1}\omega_0)}{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0} \right) \right\} \right\}$$

```
In[48]:= us[t_] = sol[[1, 1, 2]] /. \omega_0 Sqrt[\xi^2 - 1] \to a_D
```

$$\text{Out[48]} = e^{-t\xi\omega_0} \left(u_0 \cosh(t a_D) + \frac{(v_0 + u_0\xi\omega_0) \sinh(t a_D)}{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0} \right)$$

```
In[49]:= u1[t_] = Coefficient[us[t], u_0]
```

$$\text{Out[49]} = e^{-t\xi\omega_0} \left(\cosh(t a_D) + \frac{\xi \sinh(t a_D)}{\sqrt{\xi^2-1}} \right)$$

```
In[50]:= u2[t_] = Coefficient[us[t], v_0]
```

$$\text{Out[50]} = \frac{e^{-t\xi\omega_0} \sinh(t a_D)}{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0}$$

```
In[51]:= W = Det[{{u1[t], u2[t]}, {u1'[t], u2'[t]}}] /. a_D \to Sqrt[\xi^2 \omega_0^2 - 1] // Simplify
```

$$\text{Out[51]} = \frac{e^{-2t\xi\omega_0} \sqrt{\xi^2 \omega_0^2 - 1}}{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0}$$

```
In[52]:= comment2 =
```

"Γενικά, εάν η ορίζουσα Wronski W είναι διάφορη του μηδενός, τότε οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Δηλαδή μπορεί (σπάνια βέβαια) η ορίζουσα Wronski να είναι ίση με το μηδέν και πάλι οι συναρτήσεις να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Η συνθήκη δηλαδή του μη μηδενισμού της ορίζουσας Wronski είναι ικανή αλλ' όχι και αναγκαία συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας."

```
In[53]:= comment3 = "Εάν όμως οι συναρτήσεις των οποίων υπολογίζεται η ορίζουσα Wronski W είναι λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως, τότε ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας. Δηλαδή στην ειδική περίπτωση συναρτήσεων που είναι λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως, εάν η σχετική ορίζουσα Wronski είναι ίση με το μηδέν, τότε οπωσδήποτε αυτές οι συναρτήσεις-λύσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες, αποκλείεται να είναι γραμμικά ανεξάρτητες."
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG6 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```
In[54]:= bde = EI v''''[x] == p[x]
```

$$\text{Out[54]} = EI v^{(4)}(x) == p(x)$$

```
In[55]:= lt = LaplaceTransform[bde, x, s]
```

$$\text{Out[55]} = EI (\text{LaplaceTransform}[v(x), x, s] s^4 - v(0) s^3 - v'(0) s^2 - v''(0) s - v^{(3)}(0)) == \text{LaplaceTransform}[p(x), x, s]$$

```
In[56]:= lt1 =
```

$$lt /. \{ \text{LaplaceTransform}[v[x], x, s] \to V[s], \text{LaplaceTransform}[p[x], x, s] \to P[s] \}$$

$$\text{Out[56]} = EI (V(s) s^4 - v(0) s^3 - v'(0) s^2 - v''(0) s - v^{(3)}(0)) == P(s)$$

In[57]:= sol1 = Solve[lt1, v[s]]

Out[57]= $\left\{ \left\{ V(s) \rightarrow \frac{EI v(0) s^3 + EI v'(0) s^2 + EI v''(0) s + P(s) + EI v^{(3)}(0)}{EI s^4} \right\} \right\}$

In[58]:= sol = Solve[lt, LaplaceTransform[v[x], x, s]] [[1, 1, 2]]

Out[58]= $\frac{EI v(0) s^3 + EI v'(0) s^2 + EI v''(0) s + LaplaceTransform[p(x), x, s] + EI v^{(3)}(0)}{EI s^4}$

In[59]:= vs[x_] = InverseLaplaceTransform[sol, s, x] // Simplify

Out[59]= $\frac{1}{6} \left(\frac{\int_0^x (x-s)^3 p(s) ds}{EI} + 6 v(0) + x(v^{(3)}(0) x^2 + 3 v''(0) x + 6 v'(0)) \right)$

In[60]:= subs1 = {v[0] → v0, v'[0] → θ0, v''[0] → M0/EI, v'''[0] → Q0/EI}

Out[60]= $\left\{ v(0) \rightarrow v_0, v'(0) \rightarrow \theta_0, v''(0) \rightarrow \frac{M_0}{EI}, v^{(3)}(0) \rightarrow \frac{Q_0}{EI} \right\}$

In[61]:= comment4 = "Στο αριστερό άκρο x=0 της δοκού η τιμή v₀
δηλώνει το βέλος κάμψεως, η τιμή θ₀ τη γωνία κλίσεως ή στροφή,
η τιμή M₀ την καμπτική ροπή και η τιμή Q₀ την τέμνουσα δύναμη.";

In[62]:= comment5 =

"Για πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του x = 0 η καμπτική ροπή M₀
στο άκρο αυτό μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο M₀ = ∫₀^{2a} x p(x) dx
με p(x) την κάθετη καταναεμημένη φόρτιση κατά μήκος του προβόλου.
Ο τύπος αυτός και ο πιο κάτω τύπος για την τέμνουσα δύναμη Q
προκύπτουν αμέσως από τις στατικές εξισώσεις ισορροπίας του προβόλου.";

In[63]:= comment6 = "Για τον ίδιο ακριβώς πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο
του x = 0 η τέμνουσα δύναμη στο άκρο αυτό μπορεί να υπολογισθεί

από τον αντίστοιχο και ακόμη πιο απλό τύπο Q₀ = ∫₀^{2a} p(x) dx.";

In[64]:= vs1[x_] = vs[x] /. subs1 // Apart

Out[64]= $\frac{Q_0 x^3 + 3 M_0 x^2 + 6 EI \theta_0 x + 6 EI v_0}{6 EI} + \frac{\int_0^x (x-s)^3 p(s) ds}{6 EI}$

In[65]:= ver1 = bde /. v → vs1

Out[65]= True

In[66]:= {vs1[0], vs1'[0], vs1''[0], vs1'''[0]}

Out[66]= $\left\{ v_0, \theta_0, \frac{M_0}{EI}, \frac{Q_0}{EI} \right\}$

In[67]:= δ = DiracDelta

Out[67]= DiracDelta

In[68]:= p1[x_] = p0 + P1 δ[x - a] + P2 δ[x - 2 a]

Out[68]= p0 + P1 δ(a - x) + P2 δ(2 a - x)

In[69]:= bde1 = bde /. p → p1

Out[69]= EI v⁽⁴⁾(x) == p0 + P1 δ(a - x) + P2 δ(2 a - x)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το σύμβολο $\theta(x)$ δηλώνει στις εξόδους τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(x)$.

```
In[70]:= subs2 = {UnitStep[a] → 1, UnitStep[2 a] → 1, UnitStep[x - 2 a] → 0}
```

```
Out[70]= {θ(a) → 1, θ(2 a) → 1, θ(x - 2 a) → 0}
```

```
In[71]:= lt1 = LaplaceTransform[bde1, x, s] /. subs1 /. subs2
```

```
Out[71]= EI (LaplaceTransform[v(x), x, s] s^4 - v0 s^3 - θ0 s^2 -  $\frac{M0 s}{EI}$  -  $\frac{Q0}{EI}$ ) ==  $\frac{p0}{s} + e^{-as} P1 + e^{-2as} P2$ 
```

```
In[72]:= sol1 = Solve[lt1, LaplaceTransform[v[x], x, s]] [[1, 1, 2]]
```

```
Out[72]=  $\frac{EI v0 s^3 + EI \theta0 s^2 + M0 s + e^{-as} P1 + e^{-2as} P2 + Q0 + \frac{p0}{s}}{EI s^4}$ 
```

```
In[73]:= vs1[x_] = InverseLaplaceTransform[sol1, s, x] /. subs2 // Simplify
```

```
Out[73]=  $\frac{-4 P1 \theta(x - a) (a - x)^3 + x^2 (p0 x^2 + 4 Q0 x + 12 M0) + 24 EI (v0 + x \theta0)}{24 EI}$ 
```

```
In[74]:= comment7 = "Για μια συγκεκριμένη δοκό (π.χ. έναν πρόβολο) η λύση αυτή υστερεί στο ότι χρειάζεται και τις τέσσερις αρχικές τιμές  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$  και  $Q_0$  στο αριστερό άκρο  $x=0$  της δοκού, ενώ γενικά είναι διαθέσιμες μόνο δύο από τις αρχικές αυτές τιμές, π.χ. για πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x=0$  οι δύο τιμές  $v_0=0$  και  $\theta_0=0$ .";
```

```
In[75]:= comment8 =
```

"Επομένως, για να μπορέσει να αξιοποιήσει την πιο πάνω λύση, ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να την εφαρμόσει και στο δεξιό άκρο της δοκού, εδώ στο άκρο $x=2a$ χρησιμοποιώντας μάλιστα και τις άλλες δύο συνοριακές συνθήκες που του είναι διαθέσιμες στο δεξιό άκρο $x=2a$. Για παράδειγμα, στον πιο πάνω πρόβολο τις συνθήκες $M(2a)=0$ και $Q(2a)=0$. Έτσι θα προσδιορίσει και τις δύο υπολειπόμενες σταθερές στο αριστερό άκρο $x=0$, π.χ. για τον πρόβολο τις M_0 και Q_0 . Εναλλακτικά ειδικά για τον πρόβολο μπορεί να υπολογίσει τις σταθερές M_0 και Q_0 χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας κατά μήκος του προβόλου χωρίς χρήση της λύσεως $v_{s1}(x)$. Αυτές οδηγούν στους τύπους προσδιορισμού των M_0 και Q_0 που ήδη αναφέρθηκαν πιο πάνω στα σχόλια comment5 και comment6 αντίστοιχα και τελικά στο ίδιο αποτέλεσμα για το βέλος κάμψεως $v_{s1}(x)$ της δοκού.";

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MG7 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ)

```
In[76]:= Remove[u1, u2]
```

```
In[77]:= bdes = {4 u1''[t] + 221 ω0^2 u1[t] - 125 ω0^2 u2[t] == 0,
  3 u2''[t] - 125 ω0^2 u1[t] + 125 ω0^2 u2[t] == 0}
```

```
Out[77]= {221 u1(t) ω0^2 - 125 u2(t) ω0^2 + 4 u1''(t) == 0, -125 u1(t) ω0^2 + 125 u2(t) ω0^2 + 3 u2''(t) == 0}
```

```
In[78]:= c = Cos[ω t - α]
```

```
Out[78]= COS(α - t ω)
```

```
In[79]:= {u10[t_] = A c, u20[t_] = B c}
```

```
Out[79]= {A cos(α - t ω), B cos(α - t ω)}
```

In[80]:= **baes = bdes / . {u1 → u10, u2 → u20}**

Out[80]= $\{-4 A \cos(\alpha - t \omega) \omega^2 + 221 A \omega 0^2 \cos(\alpha - t \omega) - 125 B \omega 0^2 \cos(\alpha - t \omega) == 0,$
 $-3 B \cos(\alpha - t \omega) \omega^2 - 125 A \omega 0^2 \cos(\alpha - t \omega) + 125 B \omega 0^2 \cos(\alpha - t \omega) == 0\}$

In[81]:= **eq1 = baes[[1, 1]] / c == baes[[1, 2]] / c // Simplify**

Out[81]= $221 A \omega 0^2 == 4 A \omega^2 + 125 B \omega 0^2$

In[82]:= **eq2 = baes[[2, 1]] / c == baes[[2, 2]] / c // Simplify**

Out[82]= $125 B \omega 0^2 == 3 B \omega^2 + 125 A \omega 0^2$

In[83]:= **FrequencyEquation1 = Det[{{221 $\omega 0^2 - 4 \omega^2$, $-125 \omega 0^2$ }, {-125 $\omega 0^2$, $125 \omega 0^2 - 3 \omega^2$ }}] == 0**

Out[83]= $12 \omega^4 - 1163 \omega 0^2 \omega^2 + 12000 \omega 0^4 == 0$

In[84]:= **sol = Solve[FrequencyEquation1, $\omega 0$] // N // PowerExpand**

Out[84]= $\{\{\omega 0 \rightarrow -0.108353 \omega\}, \{\omega 0 \rightarrow 0.108353 \omega\}, \{\omega 0 \rightarrow -0.29185 \omega\}, \{\omega 0 \rightarrow 0.29185 \omega\}\}$

In[85]:= **comment9 = "Οι λύσεις της εξίσωσης FrequencyEquation1 είναι τέσσερις:
 δύο θετικές και δύο αρνητικές (οι αντίθετες των θετικών ριζών).";**

In[86]:= **comment10 =**

"Από τις τέσσερις αυτές λύσεις αποδεκτές σαν ιδιοσυχνότητες ω_k του δώροφου κτιρίου είναι μόνο δύο: οι θετικές λύσεις. Οι δύο αρνητικές λύσεις δεν έχουν έννοια σαν ιδιοσυχνότητες: οι θετικές λύσεις είναι απόλυτα επαρκείς σαν ιδιοσυχνότητες ή αλλιώς οι ιδιοσυχνότητες είναι πάντοτε θετικές. Σπάνια δεχόμαστε και τη μηδενική ιδιοσυχνότητα, αυτήν σαν την έκφραση της κινήσεως της δοκού σαν στερεό σώμα χωρίς αληθινή ταλάντωση της δοκού. Τέτοια κίνηση της δοκού παρουσιάζεται π.χ. στην απόλυτα ελεύθερη (χωρίς στηρίξεις) δοκό στη Δυναμική των Κατασκευών. Όμως στη Στατική η τελευταία αυτή δοκός, η ελεύθερη δοκός, είναι απόλυτα απαράδεκτη, επειδή δε μπορεί να ισορροπήσει.";

In[87]:= **FrequencyEquation2 = Det[K - M ω^2] == 0**

Out[87]= $|K - M \omega^2| == 0$

In[88]:= **comment11 = "Εκτός από την πιο πάνω μέθοδο της τριγωνομετρικής αντικαταστάσεως μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του ίδιου συστήματος διαφορικών εξισώσεων οι μέθοδοι: (α) της εκθετικής αντικαταστάσεως, (β) της διαγωνιοποίησης (ή αποσυζεύξεως), (γ) του μετασχηματισμού Laplace και (δ) της απαλοιφής.";**

In[89]:= **comment12 =**

"Στο πρόβλημα της σεισμικής φορτίσεως στην πιο πάνω γενική λύση του ομογενούς γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρέπει να προστεθεί και μια μερική λύση (ή ειδική λύση) του αντίστοιχου μη ομογενούς γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Αυτή η λύση μπορεί να υπολογισθεί με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (σε ειδικές περιπτώσεις) και επίσης γενικά με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Οι μέθοδοι αυτές αποτελούν κατάλληλες γενικεύσεις των αντίστοιχων μεθόδων για απλές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Οι μέθοδοι του μετασχηματισμού Laplace και της απαλοιφής είναι επίσης άμεσα εφαρμόσιμες και σε γραμμικά συστήματα μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων.";

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMII-MH

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH1 (Διαφορικές Εξισώσεις στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού): Ζητούνται: (1) Λίστα δύο εντολών για μη προειδοποίηση για ορθογραφικά λάθη. Στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού να δηλωθούν: (2) μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως ODE4 και (3) σχόλιο comment (με περίπου 10–20 λέξεις) που απαντάται. (4) Μία εξίσωση Bernoulli BernoulliODE και (5) το αντίστοιχο σχόλιο. (6) Να βρεθεί και η λύση της sol. (7) Μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών NonlinearSVODE1 και (8) σχόλιο που απαντάται. (9) Και δεύτερη όμοια εξίσωση (τώρα με 2) και (10) αντίστοιχο σχόλιο. (11) Και τρίτη όμοια εξίσωση (με 3) και (12) σχόλιο.

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH2 (Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις): Και πάλι στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού ζητούνται: (13) Μία γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως ode1 με πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης και (14) σχόλιο comment (με περίπου 10–20 λέξεις) που απαντάται. (15) Άμεσα η χαρακτηριστική της εξίσωση charEq1, (16) εύρεση των ριζών της sol1 και (17) άμεσα οι ρίζες αυτές σε μία λίστα roots1. Ανάλογα (18), (19), (20), (21), (22) για φανταστικές ρίζες (τώρα με 2, αλλά πάλι δεύτερας τάξεως). Ανάλογα (23), (24), (25), (26), (27) για μιγαδικές ρίζες (τώρα με 3, αλλά πάλι δεύτερας τάξεως). Ανάλογα (28), (29), (30), (31), (32), αλλά τετάρτης τάξεως τώρα, για μία διπλή ρίζα και δύο φανταστικές ρίζες (τώρα με 4). (33) Μία μη ομογενής εξίσωση Euler τετάρτης τάξεως EulerODE, (34) σχόλιο comment που απαντάται, (35) η λύση της sol, (36) κατευθείαν το σχετικό θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς solHlist και (37) εύρεση της ορίζουσας Wronski τους W.

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH3 (Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις, Animations): Εξετάζουμε τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις αμφίεριστης δοκού μήκους $L = 3$. Ζητούνται: (38) Κατευθείαν ο σχηματισμός λίστας (με ειδική εντολή) των έξι πρώτων ιδιομορφών $X_n(x)$ (οι συναρτήσεις εδώ με :=). (39) Η γραφική παράσταση SimplySupportedBeamVibrations των συναρτήσεων $X_2(x) \cos 2t_k$ σε μία περίοδο με τρεις επιλογές: πάχος γραμμής 0.025, διάστημα στον κατακόρυφο άξονα $[-1, 1]$ και κατάλληλο τίτλο χωρίς επανάληψη του πρώτου σχήματος και με 16 συνολικά σχήματα. (40) Δημιουργία του σχετικού αρχείου animated gif για την animation με το όνομα SimplySupportedBeamVibrations.gif και αποθήκευσή του σε κατάλληλο ευρετήριο (directory). Τέλος δύο σχόλια comment για το πώς ξεκινάει η animation (41) μέσα στην ίδια τη Mathematica (δύο τρόποι) και επίσης (42) έξω από τη Mathematica.

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH4 (Μετασχηματισμός Laplace): Να επαληθευθούν οι γνωστοί μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων (43) 1 με την επαλήθευσή του να καλείται LT1, (44) t^3 : LT2, (45) $t \sin \omega t$: LT3, (46) $\sin bt \sinh bt$ LT4, (47) $\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$: LT5, (48) $H(t)$: LT6 και τέλος (49) $\delta(t)$: LT7. Ανάλογα και οι γνωστοί αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace (50) $1/s$: ILT1, (51) $1/(s^2 - b^2)$: ILT2, (52) $1/(s^2 + b^2)$: ILT3, (53) $1/[(s + a)^2 + b^2]$: ILT4, (54) 1: ILT5, (55) $s/(s^4 - b^4)$: ILT6 και τέλος (56) $s^3/(s^4 + b^4)$: ILT7. Σχόλια comment για το πού είναι χρήσιμοι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace (57) ILT6 και (58) ILT7.

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH5 (Συναρτήσεις Macaulay): Εδώ ζητούνται: (59) Σχόλιο για το πώς αλλιώς καλούνται οι συναρτήσεις Macaulay. Ορισμοί των συναρτήσεων (60) Macaulay[0, x_] και (61) Macaulay[-1, x_]. (62) Με χρήση τους η φόρτιση $p(x)$ συνήθους δοκού μήκους 5: $0 \leq x \leq 5$ σε κάμψη που συνίσταται σε ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση p_0 στο διάστημα $[1, 2]$ και συγκεντρωμένα φορτία P_1 στη θέση $x = 3$ και P_2 στη θέση $x = 4$. (63) Η σχετική διαφορική εξίσωση BeamDE, (64) οι αρχικές συνθήκες iCS (με απλά ίσον) με γνωστές τις ποσότητες v_0 , θ_0 , M_0 και Q_0 στο άκρο $x = 0$. (65) Ο μετασχηματισμός Laplace LT1BeamDE της BeamDE και από αυτό (66) δεύτερη γραφή του LT2BeamDE, τώρα με χρήση του ειδικού συμβόλου $V(s) := \mathcal{L}\{v(x)\}$. (67) Η λύση sol του LT2BeamDE για τη $V(s)$ και από αυτήν (68) η λύση $v_s(x)$ της BeamDE με μία απλή εντολή (69) με επαλήθευσή της ver (με πλήρη απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH6 (Ωστική Απόκριση): Σε ταλαντώσεις μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου (με σταθερές m και ω_0) χωρίς απόσβεση ζητούνται: (70) η διαφορική εξίσωση ODE για μοναδιαία ωστική φόρτιση, όταν $t = 0$. (71) Η δήλωση (με απλά ίσον) μηδενικών αρχικών συνθηκών ics . (72) Η μετασχηματισμένη κατά Laplace εξίσωση LTODE, (73) η λύση της $G(s)$ και από αυτήν (74) η λύση $g(t)$ της ODE και με (75) άμεση γραφή της $g_1(t)$. Δύο σχόλια comment (76) για το ποιο σύμβολο χρησιμοποιείται συνήθως αντί για το $G(s)$ και (77) γιατί δε χρησιμοποιήθηκε αυτό εδώ.

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH7 (Ωστική Απόκριση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται. (78) Ο «καθαρισμός» του συμβόλου p . (79) Ξανά η άμεση δήλωση της συναρτήσεως $g_1(t)$ (για $\xi = 0$) και με αυτήν κατευθείαν η λύση $u(t)$ (80) για μηδενικές αρχικές συνθήκες και αυθαίρετη φόρτιση $p(t)$: $u_{1a}(t)$. Επίσης (81) η λύση για αρχικές συνθήκες $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$ σε ελεύθερες ταλαντώσεις: $u_{1b}(t)$. (82) Από τις δύο προηγούμενες λύσεις να βρεθεί η λύση $u_{1c}(t)$ και με αρχικές συνθήκες και με αυθαίρετη φόρτιση και από αυτήν (83) η λύση $u_{1d}(t)$ για σταθερή φόρτιση p_0 (με απλοποίηση, αλλά και με προσοχή: με τ και όχι t). (84) Σχόλιο γιατί τ και όχι t εδώ. Μετά εξετάζουμε την περίπτωση ασθενούς αποσβέσεως. Ζητούνται: (85) Η άμεση γραφή της ωστικής αποκρίσεως $g_2(t)$ και με χρήση της (86) της αποκρίσεως $u_2(t)$ σε αυθαίρετη φόρτιση $p(t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Ανάλογα για ισχυρή απόσβεση (87) $g_3(t)$ και (88) $u_3(t)$. Και τρία σχόλια comment: Πώς αλλιώς καλούνται (89) η ασθενής και (90) η ισχυρή απόσβεση; (91) Πώς καλείται η απόσβεση, όταν $\xi = 1$;

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH8 (Δυναμική των Κατασκευών: Κτίρια Διατμήσεως): Θεωρούμε τριώροφο ιεαυτό κτίριο διατμήσεως. Ζητούνται: (92) Η απαλοιφή (ο «καθαρισμός») των συμβόλων u_1 , u_2 και u_3 . Με μάζες των ορόφων (στα ύψη των πλακών) m_1 , m_2 και m_3 το μητρώο μάζας \mathbf{M} (93) κανονικά και επίσης (94) σε μητρική μορφή: μορφή μητρώου. (95) Σχόλιο για το πώς αλλιώς καλείται και γιατί. Στη συνέχεια και το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} με γνωστά τα στοιχεία του k_{11} , k_{12} , k_{13} , k_{22} , k_{23} και k_{33} (96) κανονικά και (97) σε μητρική μορφή. (98) Επαλήθευση verK βασικής ιδιότητάς του. (99) Το διάνυσμα (το διάνυσμα στήλης) $\mathbf{u}(t)$ των οριζόντιων μετατοπίσεων των άκαμπτων πλακών των ορόφων $u_{1,2,3}(t)$ εδώ με σύνθετη εντολή: κανονικά και εμφάνιση σε μητρική μορφή. (100) Ανάλογα το διάνυσμα των φορτίσεων $\mathbf{p}(t)$ των πλακών. Με βάση τα προηγούμενα (101) το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων sdeqs και (102) η εξίσωση FrequencyEquation1 για τις ιδιοσυχνότητες ω τελικά (103) και στην κανονική πολυωνυμική της μορφή (με 2) ως προς ω . Και τώρα κατευθείαν οι τρεις διαφορικές εξισώσεις (104) $\text{deq}[1]$, (105) $\text{deq}[2]$ και (106) $\text{deq}[3]$ των μετατοπίσεων των πλακών χωρίς πια μητρώα. Ορισμοί των αντικαταστάσεων (107) subsu , ώστε $\mathcal{L}\{u_{1,2,3}(t)\} = U_{1,2,3}(s)$, (108) subsp , ώστε $\mathcal{L}\{p_{1,2,3}(t)\} = P_{1,2,3}(s)$ και (109) subsz για μηδενικές αρχικές συνθήκες. (110) Με χρήση όλων τους σε λίστα οι μετασχηματισμένες κατά Laplace LTdeqs διαφορικές εξισώσεις $\text{deq}[1]$, $\text{deq}[2]$ και $\text{deq}[3]$, (111) η λύση τους solLTdeqs και (112) η άμεση γραφή της σχετικής οριζουσας LTdet . Τώρα σε ιδιοταλαντώσεις (113) η δήλωση μηδενικής φορτίσεως ZeroLoading (σε λίστα) και (114) κατάλληλη δήλωση συνημιτονικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων για τις μετατοπίσεις $u_{1,2,3}(t)$. (115) Με χρήση τους οι σχετικές εξισώσεις algeqs1 (με απλοποίηση) και (116) τελικά σε καθαρά αλγεβρική μορφή algeqs2 χωρίς πια την παρουσία των συνημιτονικών όρων. (Υπόδειξη: Να γίνει εδώ η αντικατάσταση $\cos(\omega t + \alpha) \rightarrow 1$.) Να γραφούν άμεσα οι τρεις αυτές αλγεβρικές εξισώσεις (117) $\text{algeq}[1]$, (118) $\text{algeq}[2]$ και (119) $\text{algeq}[3]$ καθώς και (120) η σχετική οριζουσα algdet . (121) Τέλος να βρεθεί και πάλι η εξίσωση FrequencyEquation3 για τις ιδιοσυχνότητες ω του κτιρίου.

ΑΣΚΗΣΗ-EMII-MH9 (Δυναμική των Κατασκευών: Κτίρια Διατμήσεως: Σεισμική Φόρτιση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Κατά τη διάρκεια ενός σεισμού η οριζόντια μετατόπιση του εδάφους είναι $u_g(t)$, ενώ δεν υπάρχει άλλη φόρτιση: $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{0}$. Ζητούνται: Κατευθείαν το σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων (122), (123), (124) για τις απόλυτες μετατοπίσεις $u_{1,2,3}(t)$ των τριών πλακών του κτιρίου (χωρίς μητρώα) και το αντίστοιχο σύστημα (125), (126), (127) για τις σχετικές μετατοπίσεις $u_{r1,2,3}(t)$ (ως προς το έδαφος). (128) Σχόλιο comment για ποιο λόγο προτιμάται το δεύτερο σύστημα. (129) Το διάνυσμα των ισοδύναμων (των ενεργών) φορτίσεων των ορόφων στην αρχική του μορφή $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$ και, (130) αφού δηλωθεί (με κατάλληλο σύμβολο) ειδικό διάνυσμα $\mathbf{1}$, (131) στην τελική του μορφή $\mathbf{p}_{\text{eff}1}(t)$.

■ Notebook EMI-MH

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMI-MH

(ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMI-MH1 ΕΩΣ EMI-MH9)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMI-MH1 (ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

```
In[2]:= ODE4 = EI v''''[x] == p[x];
```

```
In[3]:= comment = "Απαντάται στη Μηχανική των Υλικών στην κάμψη συνήθους  
δοκού υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση κατά μήκος της δοκού.";
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε εξίσου αποδεκτή απάντηση αφορά και η αντίστοιχη εξίσωση για δοκό επί ελαστικής βάσεως (π.χ. πεδילוδοκό ή σιδηροτροχιά), όπου υπάρχει στο αριστερό μέλος επίσης και η αντίδραση του εδάφους $+k v(x)$.

```
In[4]:= BernoulliODE = m v'[t] == -b v[t] - c v[t]^2;
```

```
In[5]:= comment =  
"Απαντάται στη Δυναμική στην κίνηση υλικού σημείου με αντίσταση ανάλογη τόσο  
της ταχύτητας του υλικού σημείου (ένας όρος) όσο και του τετραγώνου της  
ταχύτητας του υλικού σημείου (δεύτερος όρος): δύο όροι στην αντίσταση";
```

```
In[6]:= sol = DSolve[BernoulliODE, v[t], t]
```

```
Out[6]= {{v(t) ->  $\frac{b e^{bc_1}}{e^{\frac{bt}{m}} - c e^{bc_1}}$ }}
```

```
In[7]:= NonlinearSVODE1 = c'[t] == -k c[t]^2;
```

```
In[8]:= comment = "Απαντάται στην Περιβαλλοντική Μηχανική στην αποδόμηση ρύπου  
δευτέρας τάξεως μέσα σε δοχείο με ομοιόμορφη κατανομή του ρύπου.";
```

```
In[9]:= NonlinearSVODE2 = L v'[t] + v[t]^2 / 2 == g h;
```

```
In[10]:= comment = "Απαντάται στη Ρευστομηχανική στο πρόβλημα του  
προσδιορισμού της ταχύτητας εκροής ρευστού στο άκρο σωλήνα στο  
κάτω μέρος δοχείου με σταθερή στάθμη του ρευστού στο δοχείο.";
```

```
In[11]:= NonlinearSVODE3 = m v'[t] + c v[t]^2 == m g;
```

```
In[12]:= comment = "Απαντάται στη Δυναμική στην πτώση υλικού σημείου στο γήινο πεδίο  
βαρύτητας με αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του.";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMI-MH2 (ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)

```
In[13]:= ode1 = r''[t] - ω^2 r[t] == 0;
```

```
In[14]:= comment =
      "Απαντάται στη Δυναμική στην κίνηση υλικού σημείου μέσα σε ημιάπειρο σωλήνα
      που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άκρο του με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ ."
```

```
In[15]:= chareq1 =  $\mu^2 - \omega^2 == 0$ ;
```

```
In[16]:= sol1 = Solve[chareq1,  $\mu$ ]
```

```
Out[16]= {{ $\mu \rightarrow -\omega$ }, { $\mu \rightarrow \omega$ }}
```

```
In[17]:= roots1 = { $-\omega, \omega$ };
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε εξίσου αποδεκτή απάντηση αφορά και η διαφορική εξίσωση $w''(z) = \eta^2 w(z)$. Αυτή απαντάται στις Θεμελιώσεις στην αξονική φόρτιση κυλινδρικού πασσάλου στο έδαφος και έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\mu^2 = \eta^2$ με δύο πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες $\mu_1 = -\eta$ και $\mu_2 = \eta$.

```
In[18]:= ode2 = u''[t] +  $\omega_0^2$  u[t] == 0;
```

```
In[19]:= comment = "Απαντάται στις Ταλαντώσεις στις ελεύθερες ταλαντώσεις υλικού
      σημείου σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου χωρίς απόσβεση."
```

```
In[20]:= chareq2 =  $\mu^2 + \omega_0^2 == 0$ ;
```

```
In[21]:= sol2 = Solve[chareq2,  $\mu$ ]
```

```
Out[21]= {{ $\mu \rightarrow -i \omega_0$ }, { $\mu \rightarrow i \omega_0$ }}
```

```
In[22]:= roots2 = { $i \omega_0, -i \omega_0$ };
```

```
In[23]:= ode3 = u''[t] + 2  $\xi \omega_0$  u'[t] +  $\omega_0^2$  u[t] == 0;
```

```
In[24]:= comment = "Απαντάται στις Ταλαντώσεις στις ελεύθερες ταλαντώσεις
      υλικού σημείου σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-
      αποσβεστήρα με ασθενή απόσβεση:  $\xi < 1$ . (Ο περιορισμός αυτός,
       $\xi < 1$ , υποτίθεται ότι ισχύει και στις τρεις παρακάτω εντολές.)";
```

```
In[25]:= chareq3 =  $\mu^2 + 2 \xi \omega_0 \mu + \omega_0^2 == 0$ ;
```

```
In[26]:= sol3 = Solve[chareq3,  $\mu$ ]
```

```
Out[26]= {{ $\mu \rightarrow -\xi \omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0$ }, { $\mu \rightarrow \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0 - \xi \omega_0$ }}
```

```
In[27]:= roots3 = {(- $\xi + i \text{Sqrt}[1 - \xi^2]$ )  $\omega_0, (-\xi - i \text{Sqrt}[1 - \xi^2]$ )  $\omega_0$ };
```

```
In[28]:= ode4 = v''''[x] +  $k^2$  v''[x] == 0;
```

```
In[29]:= comment = "Απαντάται στη Μηχανική των Υλικών και στην Ελαστική Ευστάθεια
      στο πρόβλημα του λυγισμού στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος).";
```

```
In[30]:= chareq4 =  $\mu^4 + k^2 \mu^2 == 0$ ;
```

```
In[31]:= sol4 = Solve[chareq4,  $\mu$ ]
```

```
Out[31]= {{ $\mu \rightarrow 0$ }, { $\mu \rightarrow 0$ }, { $\mu \rightarrow -i k$ }, { $\mu \rightarrow i k$ }}
```

```
In[32]:= roots4 = {0, 0,  $i k, -i k$ };
```

```
In[33]:= EulerODE =  $r^4$  w''''[r] + 2  $r^3$  w''''[r] -  $r^2$  w''[r] +  $r$  w'[r] == (p0 / D)  $r^4$ ;
```

```
In[34]:= comment = "Απαντάται στις Πλάκες σε
κυκλική πλάκα υπό σταθερή κατανεμημένη φόρτιση p_0 .";
```

```
In[35]:= sol = DSolve[EulerODE, w[r], r]
```

```
Out[35]= {{w(r) -> \frac{p_0 r^4}{64 D} + \frac{1}{4} (2 c_2 - c_3) r^2 + \frac{1}{2} c_3 \log(r) r^2 + c_4 + c_1 \log(r)}}
```

```
In[36]:= solhlist = {1, r^2, Log[r], r^2 Log[r]}
```

```
Out[36]= {1, r^2, log(r), r^2 log(r)}
```

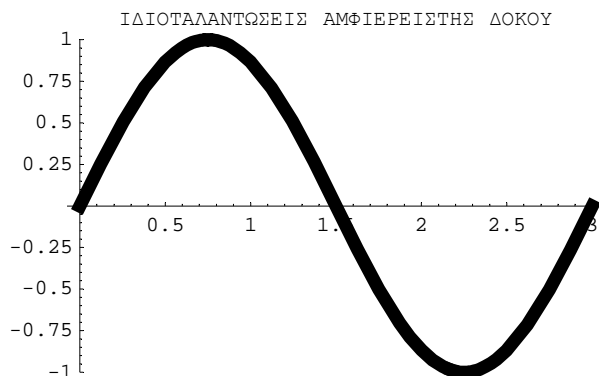
```
In[37]:= W = Det[{solhlist, D[solhlist, r], D[solhlist, {r, 2}], D[solhlist, {r, 3}]]]
```

```
Out[37]= -\frac{16}{r^2}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙ-ΜΗ3 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ, ANIMATIONS)

```
In[38]:= Table[X[n_, x_] := Sin[n π x / 3], {n, 1, 6}];
```

```
In[39]:= SimplySupportedBeamVibrations = Table[Plot[X[2, x] Cos[2 t],
{x, 0, 3}, PlotStyle -> Thickness[0.025], PlotRange -> {-1, 1},
PlotLabel -> "ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ"], {t, 0, π - π / 16, π / 16}]
```



```
Out[39]= {-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-,
-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-}
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παραπάνω για οικονομία χώρου παραλείφθηκαν όλα τα σχήματα της animation εκτός από το πρώτο.

```
In[40]:= Export["D:\CEII\SimplySupportedBeamVibrations.gif",
SimplySupportedBeamVibrations, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[40]= D:\CEII\SimplySupportedBeamVibrations.gif
```

```
In[41]:= comment =
"Το κινούμενο σχήμα (η animation) ενεργοποιείται μέσα στη Mathematica είτε
απο τις επιλογές (τα menus) με Cell -> Animate Selected Graphics είτε
πιο απλά από το πληκτρολόγιο με Ctrl Y. Επ' ευκαιρία σημειώνεται
επίσης ότι το σταμάτημα της animation γίνεται με πάτημα του
ποντικιού έξω από την animation ή καλύτερα με δεύτερο Ctrl Y.";
```

```
In[42]:= comment =
  "Έξω από τη Mathematica το αρχείο animated gif που δημιουργήθηκε καλείται
  απλά με διπλό κτύπημα με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού πάνω στο
  εικονίδιό του. Όμως μερικές φορές χρειάζεται να δηλωθεί ρητά και το
  πρόγραμμα των Windows που θα ανοίξει αυτό το αρχείο animated gif.
  Για το σκοπό αυτό πατιέται το εικονίδιο του αρχείου με πάτημα του
  δεξιού πλήκτρου του ποντικιού και στη συνέχεια από το παράθυρο που
  εμφανίζεται η επιλογή Open With και τέλος Windows Picture and Fax Viewer.
  Τότε παρουσιάζεται πραγματικά η animation (το κινούμενο σχήμα).";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH4 (ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE)

```
In[43]:= LT1 = LaplaceTransform[1, t, s] == 1 / s
```

```
Out[43]= True
```

```
In[44]:= LT2 = LaplaceTransform[t^3, t, s] == 3! / s^4
```

```
Out[44]= True
```

```
In[45]:= LT3 = LaplaceTransform[t Sin[ω t], t, s] == 2 ω s / (s^2 + ω^2)^2
```

```
Out[45]= True
```

```
In[46]:= LT4 = LaplaceTransform[Sin[b t] Sinh[b t], t, s] == 2 b^2 s / (s^4 + 4 b^4)
```

```
Out[46]= True
```

```
In[47]:= LT5 = LaplaceTransform[Erfc[a / Sqrt[t]], t, s] == (1 / s) e^-2 a Sqrt[s]
```

```
Out[47]= True
```

```
In[48]:= LT6 = LaplaceTransform[UnitStep[t], t, s] == 1 / s
```

```
Out[48]= True
```

```
In[49]:= LT7 = LaplaceTransform[DiracDelta[t], t, s] == 1
```

```
Out[49]= True
```

```
In[50]:= ILT1 = InverseLaplaceTransform[1 / s, s, t] == 1
```

```
Out[50]= True
```

```
In[51]:= ILT2 = InverseLaplaceTransform[1 / (s^2 - b^2), s, t] == (1 / b) Sinh[b t] // Simplify
```

```
Out[51]= True
```

```
In[52]:= ILT3 = InverseLaplaceTransform[1 / (s^2 + b^2), s, t] == (1 / b) Sin[b t]
```

```
Out[52]= True
```

```
In[53]:= ILT4 = InverseLaplaceTransform[1 / ((s + a)^2 + b^2), s, t] == (1 / b) e^-a t Sin[b t]
```

```
Out[53]= True
```

```
In[54]:= ILT5 = InverseLaplaceTransform[1, s, t] == DiracDelta[t]
```

```
Out[54]= True
```



```
In[55]:= ILT6 = InverseLaplaceTransform[s / (s^4 - b^4), s, t] ==
          (1 / (2 b^2)) (Cosh[b t] - Cos[b t]) // Simplify
```

```
Out[55]= True
```

```
In[56]:= ILT7 = InverseLaplaceTransform[s^3 / (s^4 + b^4), s, t] ==
          Cosh[b t / Sqrt[2]] Cos[b t / Sqrt[2]] // Simplify
```

```
Out[56]= True
```

```
In[57]:= comment = "Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ILT6 είναι
                    χρήσιμος στη Δυναμική των Κατασκευών σε προβλήματα καμπτικών
                    ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων γενικότερα συνήθων δοκών.";
```

```
In[58]:= comment = "Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ILT7 είναι χρήσιμος στη
                    Μηχανική των Υλικών σε προβλήματα κάμψεως δοκών επί ελαστικής βάσεως,
                    π.χ. πεδιλοδοκών στις Θεμελιώσεις ή σιδηροτροχιών στη Σιδηροδρομική.";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH5 (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MACAULAY)

```
In[59]:= comment = "Οι συναρτήσεις Macaulay καλούνται και συναρτήσεις ιδιομορφίας,
                    επειδή είτε οι ίδιες είτε παράγωγοί τους παρουσιάζουν ιδιομορφίες
                    στο σημείο x = 0. Με τον τρόπο αυτό είναι κατάλληλες και για
                    την παράσταση ιδιόμορφων φορτίσεων, όπως είναι οι ροπές, τα
                    συγκεντρωμένα φορτία και οι ασυνέχειες σε κατανεμημένες φορτίσεις.";
```

```
In[60]:= Macaulay[0, x_] = UnitStep[x];
```

```
In[61]:= Macaulay[-1, x_] = DiracDelta[x];
```

```
In[62]:= p[x_] = p0 (Macaulay[0, x - 1] - Macaulay[0, x - 2]) +
          P1 Macaulay[-1, x - 3] + P2 Macaulay[-1, x - 4];
```

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το σύμβολο $\theta(x)$ δηλώνει στις εξόδους τη βηματική συνάρτηση του Heavide $H(x)$.

```
In[63]:= BeamDE = EI v''''[x] == p[x]
```

```
Out[63]= EI v^(4)(x) == P2 δ(x - 4) + P1 δ(x - 3) + p0 (θ(x - 1) - θ(x - 2))
```

```
In[64]:= ics = {v[0] = v0, v'[0] = θ0, v''[0] = M0 / EI, v'''[0] = Q0 / EI};
```

```
In[65]:= LT1BeamDE = LaplaceTransform[BeamDE, x, s]
```

```
Out[65]= EI (LaplaceTransform[v(x), x, s] s^4 - v0 s^3 - θ0 s^2 - \frac{M0 s}{EI} - \frac{Q0}{EI}) ==
          - \frac{e^{-2s} p0}{s} + \frac{e^{-s} p0}{s} + e^{-3s} P1 + e^{-4s} P2
```

```
In[66]:= LT2BeamDE = LT1BeamDE /. LaplaceTransform[v[x], x, s] -> V[s]
```

```
Out[66]= EI (V(s) s^4 - v0 s^3 - θ0 s^2 - \frac{M0 s}{EI} - \frac{Q0}{EI}) == - \frac{e^{-2s} p0}{s} + \frac{e^{-s} p0}{s} + e^{-3s} P1 + e^{-4s} P2
```

```
In[67]:= sol = Solve[LT2BeamDE, V[s]]
```

```
Out[67]= {{V(s) -> \frac{EI v0 s^3 + EI θ0 s^2 + M0 s + e^{-3s} P1 + e^{-4s} P2 + Q0 - \frac{e^{-2s} p0}{s} + \frac{e^{-s} p0}{s}}{EI s^4}}
```

```
In[68]:= vs[x_] = InverseLaplaceTransform[sol[[1, 1, 2]], s, x]
```

$$\text{Out[68]} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24} p_0 \theta(x-2)(x-2)^4 + \frac{Q_0 x^3}{6} + \frac{M_0 x^2}{2} + EI v_0 + \right. \\ \left. EI x \theta_0 + \frac{1}{6} P_2 (x-4)^3 \theta(x-4) + \frac{1}{6} P_1 (x-3)^3 \theta(x-3) + \frac{1}{24} p_0 (x-1)^4 \theta(x-1) \right)$$

```
In[69]:= ver = BeamDE /. v -> vs // FullSimplify
```

```
Out[69]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH6 (ΩΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ)

```
In[70]:= ODE = u''[t] + ω0^2 u[t] == DiracDelta[t] / m;
```

```
In[71]:= ics = {u[0] = 0, u'[0] = 0};
```

```
In[72]:= LTODE = LaplaceTransform[ODE, t, s] // Simplify
```

$$\text{Out[72]} = (s^2 + \omega_0^2) \text{LaplaceTransform}[u(t), t, s] == \frac{1}{m}$$

```
In[73]:= G[s_] = Solve[LTODE, LaplaceTransform[u[t], t, s]][[1, 1, 2]]
```

$$\text{Out[73]} = \frac{1}{m(s^2 + \omega_0^2)}$$

```
In[74]:= g[t_] = InverseLaplaceTransform[G[s], s, t]
```

$$\text{Out[74]} = \frac{\sin(t \omega_0)}{m \omega_0}$$

```
In[75]:= g1[t_] = (1 / (m ω0)) Sin[ω0 t];
```

```
In[76]:= comment = "Ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί συνήθως, σχεδόν πάντα  
το σύμβολο H(s) αντί για το G(s) για τη συνάρτηση μεταφοράς.";
```

```
In[77]:= comment = "Αυτό δεν έγινε εδώ και γενικότερα δε γίνεται στα  
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ καθώς επίσης και σε μερικά βιβλία  
Ταλαντώσεων για να μην υπάρξει σύγχυση της συναρτήσεως μεταφοράς  
G(s) με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside H(x)";
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH7 (ΩΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ)

```
In[78]:= Clear[p]
```

```
In[79]:= g1[t_] = (1 / (m ω0)) Sin[ω0 t]
```

$$\text{Out[79]} = \frac{\sin(t \omega_0)}{m \omega_0}$$

```
In[80]:= u1a[t_] = Integrate[g1[t - τ] p[τ], {τ, 0, t}]
```

$$\text{Out[80]} = \frac{\int_0^t p(\tau) \sin((t-\tau) \omega_0) d\tau}{m \omega_0}$$

```

In[81]:= u1b[t_] = u0 Cos[ω0 t] + (v0 / ω0) Sin[ω0 t]

Out[81]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{v0 \sin(t \omega 0)}{\omega 0}$ 

In[82]:= u1c[t_] = u1b[t] + u1a[t]

Out[82]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{\int_0^t p(\tau) \sin((t - \tau) \omega 0) d\tau}{m \omega 0}$  +  $\frac{v0 \sin(t \omega 0)}{\omega 0}$ 

In[83]:= u1d[t_] = u1c[t] /. p[τ] → p0 // Simplify

Out[83]=  $\frac{p0 + (m u0 \omega 0^2 - p0) \cos(t \omega 0) + m v0 \omega 0 \sin(t \omega 0)}{m \omega 0^2}$ 

In[84]:= comment = "Εδώ χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο τ αντί για το t, γιατί τ
είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης στο πιο πάνω ολοκλήρωμα Duhamel.
Το t είναι το πάνω όριο ολοκλήρωσης στο ολοκλήρωμα αυτό";

In[85]:= g2[t_] = (1 / (m ωD)) e-ξ ω0 t Sin[ωD t]

Out[85]=  $\frac{e^{-t \xi \omega 0} \sin(t \omega D)}{m \omega D}$ 

In[86]:= u2[t_] = Integrate[g2[t - τ] p[τ], {τ, 0, t}]

Out[86]=  $\frac{\int_0^t e^{-\xi(t-\tau)\omega 0} p(\tau) \sin((t-\tau)\omega D) d\tau}{m \omega D}$ 

In[87]:= g3[t_] = (1 / (m aD)) e-ξ ω0 t Sinh[aD t]

Out[87]=  $\frac{e^{-t \xi \omega 0} \sinh(a D t)}{a D m}$ 

In[88]:= u3[t_] = Integrate[g3[t - τ] p[τ], {τ, 0, t}]

Out[88]=  $\frac{\int_0^t e^{-\xi(t-\tau)\omega 0} p(\tau) \sinh(a D (t-\tau)) d\tau}{a D m}$ 

In[89]:= comment = "Η ασθενής απόσβεση (με ξ < 1) καλείται και υποκρίσιμη απόσβεση.";

In[90]:= comment = "Η ισχυρή απόσβεση (με ξ > 1) καλείται και υπερκρίσιμη απόσβεση.";

In[91]:= comment = "Η απόσβεση, όταν ξ = 1, καλείται κρίσιμη απόσβεση.";

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH8 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΤΙΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ)

```

In[92]:= Clear[u1, u2, u3]

In[93]:= M = DiagonalMatrix[{m1, m2, m3}];

In[94]:= M // MatrixForm

Out[94]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{pmatrix}$$


```

```

In[95]:= comment = "Στη Δυναμική των Κατασκευών το μητρώο μάζας M καλείται
μερικές φορές, όχι όμως και πολύ συχνά, και μητρώο αδρανεΐας.
Αυτή η δεύτερη ονομασία δόθηκε στο μητρώο μάζας M, επειδή αυτό
σχετίζεται με τις αδρανεΐακές δυνάμεις με βάση το νόμο του Νεύτωνα.";

In[96]:= K = {{k11, k12, k13}, {k12, k22, k23}, {k13, k23, k33}};

In[97]:= K // MatrixForm

Out[97]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}$$


In[98]:= ver = Transpose[K] == K

Out[98]= True

In[99]:= u[t_] = {u1[t], u2[t], u3[t]}; u[t] // MatrixForm

Out[99]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$


In[100]:= p[t] = {p1[t], p2[t], p3[t]}; p[t] // MatrixForm

Out[100]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$


In[101]:= sdeqs = M.u''[t] + K.u[t] == p[t]

Out[101]= {k11 u1(t) + k12 u2(t) + k13 u3(t) + m1 u1''(t), k12 u1(t) + k22 u2(t) + k23 u3(t) + m2 u2''(t),
k13 u1(t) + k23 u2(t) + k33 u3(t) + m3 u3''(t)} == {p1(t), p2(t), p3(t)}

In[102]:= FrequencyEquation1 = Det[-ω^2 M + K] == 0

Out[102]= -m1 m2 m3 ω^6 + k33 m1 m2 ω^4 + k22 m1 m3 ω^4 + k11 m2 m3 ω^4 +
k23^2 m1 ω^2 - k22 k33 m1 ω^2 + k13^2 m2 ω^2 - k11 k33 m2 ω^2 + k12^2 m3 ω^2 -
k11 k22 m3 ω^2 - k11 k23^2 - k13^2 k22 + 2 k12 k13 k23 - k12^2 k33 + k11 k22 k33 == 0

In[103]:= FrequencyEquation2 = Collect[FrequencyEquation1[[1]], ω] == 0

Out[103]= -m1 m2 m3 ω^6 + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) ω^4 +
(m3 k12^2 + k23^2 m1 - k22 k33 m1 + k13^2 m2 - k11 k33 m2 - k11 k22 m3) ω^2 -
k11 k23^2 - k13^2 k22 + 2 k12 k13 k23 - k12^2 k33 + k11 k22 k33 == 0

In[104]:= deq[1] = m1 u1''[t] + k11 u1[t] + k12 u2[t] + k13 u3[t] == p1[t];

In[105]:= deq[2] = m2 u2''[t] + k12 u1[t] + k22 u2[t] + k23 u3[t] == p2[t];

In[106]:= deq[3] = m3 u3''[t] + k13 u1[t] + k23 u2[t] + k33 u3[t] == p3[t];

In[107]:= subsu = {LaplaceTransform[u1[t], t, s] → U1[s],
LaplaceTransform[u2[t], t, s] → U2[s], LaplaceTransform[u3[t], t, s] → U3[s]};

In[108]:= subsp = {LaplaceTransform[p1[t], t, s] → P1[s],
LaplaceTransform[p2[t], t, s] → P2[s], LaplaceTransform[p3[t], t, s] → P3[s]};

```

```
In[109]:= subsz = {u1[0] → 0, u2[0] → 0, u3[0] → 0, u1'[0] → 0, u2'[0] → 0, u3'[0] → 0};
```

```
In[110]:= LTdeqs =
  LaplaceTransform[{deq[1], deq[2], deq[3]}, t, s] /. subsu /. subsp /. subsz //
  Simplify
```

```
Out[110]= {(m1 s^2 + k11) U1(s) + k12 U2(s) + k13 U3(s) == P1(s),
  k12 U1(s) + (m2 s^2 + k22) U2(s) + k23 U3(s) == P2(s),
  k13 U1(s) + k23 U2(s) + (m3 s^2 + k33) U3(s) == P3(s)}
```

```
In[111]:= solLTdeqs = Solve[LTdeqs, {U1[s], U2[s], U3[s]}] // Simplify
```

```
Out[111]= {{U1(s) → ((k23^2 - (m2 s^2 + k22) (m3 s^2 + k33)) P1(s) +
  (k12 m3 s^2 - k13 k23 + k12 k33) P2(s) + (k13 m2 s^2 + k13 k22 - k12 k23) P3(s)) /
  (-m1 m2 m3 s^6 - k33 m1 m2 s^4 - k22 m1 m3 s^4 + k23^2 m1 s^2 - k22 k33 m1 s^2 + k12^2 m3 s^2 -
  2 k12 k13 k23 + k12^2 k33 + k13^2 (m2 s^2 + k22) + k11 (k23^2 - (m2 s^2 + k22) (m3 s^2 + k33))),
  U2(s) → ((k12 (m3 s^2 + k33) - k13 k23) P1(s) + (k13^2 - (m1 s^2 + k11) (m3 s^2 + k33)) P2(s) +
  (k23 (m1 s^2 + k11) - k12 k13) P3(s)) /
  (-m1 m2 m3 s^6 - k33 m1 m2 s^4 - k22 m1 m3 s^4 + k23^2 m1 s^2 - k22 k33 m1 s^2 + k12^2 m3 s^2 -
  2 k12 k13 k23 + k12^2 k33 + k13^2 (m2 s^2 + k22) + k11 (k23^2 - (m2 s^2 + k22) (m3 s^2 + k33))),
  U3(s) → -((k13 (m2 s^2 + k22) - k12 k23) ((m1 s^2 + k11) P3(s) - k13 P1(s)) -
  (k12 k13 - k23 (m1 s^2 + k11)) (k12 P3(s) - k13 P2(s))) /
  ((k12 k13 - k23 (m1 s^2 + k11)) (k12 (m3 s^2 + k33) - k13 k23) +
  (k13 (m2 s^2 + k22) - k12 k23) (k13^2 - (m1 s^2 + k11) (m3 s^2 + k33)))}}
```

```
In[112]:= LTdet = Collect[Det[s^2 M + K], s] == 0
```

```
Out[112]= m1 m2 m3 s^6 + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) s^4 +
  (-m3 k12^2 - k23^2 m1 + k22 k33 m1 - k13^2 m2 + k11 k33 m2 + k11 k22 m3) s^2 -
  k11 k23^2 - k13^2 k22 + 2 k12 k13 k23 - k12^2 k33 + k11 k22 k33 == 0
```

```
In[113]:= ZeroLoading = {p1[t] = 0, p2[t] = 0, p3[t] = 0};
```

```
In[114]:= {u10[t_] = φ1 Cos[ω t + α], u20[t_] = φ2 Cos[ω t + α], u30[t_] = φ3 Cos[ω t + α]};
```

```
In[115]:= algeqs1 = {deq[1], deq[2], deq[3]} /. {u1 → u10, u2 → u20, u3 → u30} // Simplify
```

```
Out[115]= {(-m1 φ1 ω^2 + k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3) Cos(α + t ω) == 0,
  (-m2 φ2 ω^2 + k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3) Cos(α + t ω) == 0,
  (k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω^2)) Cos(α + t ω) == 0}
```

```
In[116]:= algeqs2 = algeqs1 /. Cos[ω t + α] → 1
```

```
Out[116]= {-m1 φ1 ω^2 + k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3 == 0,
  -m2 φ2 ω^2 + k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3 == 0, k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω^2) == 0}
```

```
In[117]:= algeq[1] = k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3 - m1 φ1 ω^2 == 0
```

```
Out[117]= -m1 φ1 ω^2 + k11 φ1 + k12 φ2 + k13 φ3 == 0
```

```
In[118]:= algeq[2] = k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3 - m2 φ2 ω^2 == 0
```

```
Out[118]= -m2 φ2 ω^2 + k12 φ1 + k22 φ2 + k23 φ3 == 0
```

```
In[119]:= algeq[3] = k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω^2) == 0
```

```
Out[119]= k13 φ1 + k23 φ2 + φ3 (k33 - m3 ω^2) == 0
```

```
In[120]:= algdet = Collect[
  Det[{{k11 - m1 ω², k12, k13}, {k12, k22 - m2 ω², k23}, {k13, k23, k33 - m3 ω²}}, ω]
```

```
Out[120]= -m1 m2 m3 ω⁶ + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) ω⁴ +
  (m3 k12² + k23² m1 - k22 k33 m1 + k13² m2 - k11 k33 m2 - k11 k22 m3) ω² -
  k11 k23² - k13² k22 + 2 k12 k13 k23 - k12² k33 + k11 k22 k33
```

```
In[121]:= FrequencyEquation3 = algdet == 0
```

```
Out[121]= -m1 m2 m3 ω⁶ + (k33 m1 m2 + k11 m3 m2 + k22 m1 m3) ω⁴ +
  (m3 k12² + k23² m1 - k22 k33 m1 + k13² m2 - k11 k33 m2 - k11 k22 m3) ω² -
  k11 k23² - k13² k22 + 2 k12 k13 k23 - k12² k33 + k11 k22 k33 == 0
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMII-MH9 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΤΙΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ: ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ)

```
In[122]:= deqa[1] =
  m1 u1''[t] + k11 (u1[t] - ug[t]) + k12 (u2[t] - ug[t]) + k13 (u3[t] - ug[t]) == 0;
```

```
In[123]:= deqa[2] =
  m2 u2''[t] + k12 (u1[t] - ug[t]) + k22 (u2[t] - ug[t]) + k23 (u3[t] - ug[t]) == 0;
```

```
In[124]:= deqa[3] =
  m3 u3''[t] + k13 (u1[t] - ug[t]) + k23 (u2[t] - ug[t]) + k33 (u3[t] - ug[t]) == 0;
```

```
In[125]:= deqr[1] = m1 u1''[t] + k11 u1[t] + k12 u2[t] + k13 u3[t] == -m1 ug''[t];
```

```
In[126]:= deqr[2] = m2 u2''[t] + k12 u1[t] + k22 u2[t] + k23 u3[t] == -m2 ug''[t];
```

```
In[127]:= deqr[3] = m3 u3''[t] + k13 u1[t] + k23 u2[t] + k33 u3[t] == -m3 ug''[t];
```

```
In[128]:= comment =
  "Το δεύτερο σύστημα προτιμάται, γιατί περιέχει την οριζόντια επιτάχυνση
  του εδάφους, δεύτερη παράγωγο της μετατοπίσεώς του, που είναι άμεσα
  διαθέσιμη από το επιταχυνσιογράφημα που δίνει το επιταχυνσιόμετρο.";
```

```
In[129]:= peff[t_] = {-m1 ug''[t], -m2 ug''[t], -m3 ug''[t]}; peff[t] // MatrixForm
```

```
Out[129]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -m_1 u_g''(t) \\ -m_2 u_g''(t) \\ -m_3 u_g''(t) \end{pmatrix}$$

```
In[130]:= UnitVector = {1, 1, 1}; UnitVector // MatrixForm
```

```
Out[130]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
In[131]:= peff1[t_] = -M.UnitVector ug''[t]; peff1[t] // MatrixForm
```

```
Out[131]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -m_1 u_g''(t) \\ -m_2 u_g''(t) \\ -m_3 u_g''(t) \end{pmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Στις επόμενες σελίδες παρατίθενται δύο εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica*, που έχουν προετοιμασθεί με αρκετή προσοχή, λίγο-πολύ σαν να ήταν απλές επιστημονικές εργασίες, και επιχειρούν να δείξουν τη χρησιμότητά της σε συγκεκριμένα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού που σχετίζονται με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Τα notebooks αυτά είναι τα εξής:

● ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS

1. *Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-NEWTON: Νόμος του Νεύτωνα* (5 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Το notebook αυτό αφορά στον πολύ γνωστό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη Δυναμική. Αυτός αποτελεί τη βάση της μελέτης πάρα πολλών φαινομένων του Πολιτικού Μηχανικού, όπως του φαινομένου της σεισμικής φορτίσεως μιας κατασκευής. Κατ' αρχήν αναφέρεται ο νόμος αυτός για την κίνηση υλικού σημείου με γνωστή εξωτερική δύναμη και με χρήση του σχηματίζεται η σχετική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως για τη θέση του υλικού σημείου. Καταστρώνεται επίσης και το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Στη συνέχεια μελετάται η περίπτωση σταθερής εξωτερικής δυνάμεως και λύνεται το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται επίσης ότι η αύξηση της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου προέρχεται απλά από το έργο που παράγει η εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται πάνω του. Μετά μελετάται μια ειδική περίπτωση μη σταθερής (μεταβλητής) εξωτερικής δυνάμεως που περιέχει δύο τριγωνομετρικούς όρους και έναν αρνητικό εκθετικό όρο και λύνεται και πάλι το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Η μέθοδος στο notebook αυτό μπορεί βέβαια να εφαρμοσθεί και για πολλές άλλες μορφές εξωτερικών δυνάμεων και επίσης να γενικευθεί και σε πολύ δυσκολότερα προβλήματα της Δυναμικής.

2. *Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMII-FALL: Ελεύθερη Πτώση Υλικού Σημείου* (13 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Στο notebook αυτό με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μελετάται η ελεύθερη πτώση ενός υλικού σημείου στο γήινο πεδίο βαρύτητας. Καταστρώνεται η σχετική διαφορική εξίσωση για τη θέση του υλικού σημείου και προσδιορίζεται η γενική λύση της με άμεση ολοκλήρωση και, ανεξάρτητα, με τη χρήση της εντολής επίλυσεως διαφορικών εξισώσεων *DSolve* της *Mathematica*. Στη συνέχεια καθορίζεται το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών και λύνεται και αυτό τόσο κατευθείαν με την εντολή *DSolve* όσο και με προσδιορισμό των σταθερών στη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως που έχει ήδη βρεθεί. Μετά την επιμελημένη γραφική παράσταση της λύσεως που βρέθηκε χρησιμοποιείται η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξισώσεως για την επίλυση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως. Τέλος χρησιμοποιείται και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών. Φυσικά τα αποτελέσματα με όλες αυτές τις μεθόδους συμφωνούν μεταξύ τους, όπως αναμενόταν, και πραγματικά συνιστάται στον Πολιτικό Μηχανικό η χρήση διαφορετικών μεθόδων για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος της επιστήμης του.

Τα δύο αυτά εφαρμοσμένα notebooks έχουν προφανώς το καθαυτό ενδιαφέρον τους και στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα συγκεκριμένα στη Δυναμική. Η παρουσία τους όμως εδώ στοχεύει επίσης και στη χρήση τους σαν υποδειγμάτων από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό για την εξίσου επιμελημένη προετοιμασία και των δικών του/των δικών της εφαρμοσμένων notebooks με τη *Mathematica*.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ NOTEBOOK EN-EMII-NEWTON ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Δυναμική του Υλικού Σημείου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αρχικές Συνθήκες, Προβλήματα Αρχικών Τιμών

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου, Δύναμη, Θέση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα, Εξισώσεις Κινήσεως, Έργο, Κινητική Ενέργεια

ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΔΕΙΓΜΑ):

[1] Fowles, G. R. and Cassiday, G. L., *Analytical Mechanics*, 6η Έκδοση. Saunders College Publishing, Fort Worth, Philadelphia, 1999, Κεφάλαιο 2.

[2] Timoshenko, S. and Young, D. H., *Engineering Mechanics*, 4η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, 1983, Κεφάλαιο 6.

[3] Shames, I. H., *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*, 4η Έκδοση. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997, Κεφάλαιο 12.

1.1. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Θεωρούμε τον κλασικό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη Δυναμική του υλικού σημείου. Σύμφωνα με το νόμο αυτό κατά την ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου M (κατά μήκος του x -άξονα και με t το χρόνο) το γινόμενο της μάζας m του υλικού σημείου επί την επιτάχυνσή του $a(t)$ ισούται με τη δύναμη $F(t)$ που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Δηλαδή ισχύει η εξίσωση

$$\text{In}[1] := \mathbf{eq} = m \mathbf{a}[t] == F[t]$$

$$\text{out}[1] = m \mathbf{a}(t) == F(t)$$

Όμως η επιτάχυνση $a = a(t)$ του υλικού σημείου M είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας $v = v(t)$ ή η δεύτερη παράγωγος της θέσεως $x = x(t)$ του ίδιου υλικού σημείου. Συνεπώς έχουμε

$$\text{In}[2] := \mathbf{a}[t_] := \mathbf{v}'[t]$$

και επομένως η εξίσωση \mathbf{eq} (ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) παίρνει τη μορφή

$$\text{In}[3] := \mathbf{eq}$$

$$\text{out}[3] = m \mathbf{v}'(t) == F(t)$$

και επειδή, όπως αναφέρθηκε, η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της θέσεως, δηλαδή

$$\text{In}[4] := \mathbf{v}[t_] := \mathbf{x}'[t]$$

προκύπτει τελικά η εξής διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου M :

```
In[5]:= deq = eq
```

```
Out[5]= m x''(t) == F(t)
```

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι προφανώς συνήθης, γραμμική, δευτέρας τάξεως, πρώτου βαθμού, με σταθερό συντελεστή (αν και αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία στην παρούσα διαφορική εξίσωση) και γενικά μη ομογενής (εννοείται για μη μηδενική δύναμη $F = F(t)$). Εν προκειμένω θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή **DSolve** επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων στη *Mathematica* για την επίλυσή της. Εντούτοις καταρχήν θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε και άμεσα με δύο απλές ολοκληρώσεις μέσω της εντολής **Integrate**.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση της κινήσεως **deq** συνοδεύεται συνήθως στο παρόν πρόβλημα κινήσεως και από τις δύο αρχικές συνθήκες (αρχική θέση x_0 κι αρχική ταχύτητα v_0 για το υλικό σημείο), που τις συμβολίζουμε σαν **ics** (initial conditions):

```
In[6]:= ics = {x[0] == x0, v[0] == v0}
```

```
Out[6]= {x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

(Επ' ευκαιρία παρατηρούμε ότι η *Mathematica* χρησιμοποίησε τον ορισμό της ταχύτητας σαν παράγωγο της θέσεως στον αμέσως πιο πάνω "υπολογισμό" των δύο αρχικών συνθηκών **ics**.) Επομένως έχουμε τώρα ένα πλήρες πρόβλημα αρχικών τιμών. Αυτό αποτελείται από τρεις εξισώσεις **eqs**, δηλαδή από τη διαφορική εξίσωση **deq** και τις αρχικές συνθήκες **ics**. Άρα

```
In[7]:= eqs = {deq, ics} // Flatten
```

```
Out[7]= {m x''(t) == F(t), x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

(Η εντολή **Flatten** χρησιμεύει στο να δημιουργηθεί μια απλή λίστα εξισώσεων για το πρόβλημά μας. Η χρήση της δεν είναι απαραίτητη στις λίστες εξισώσεων που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με την εντολή **DSolve** στην παρούσα version 4.1 της *Mathematica*.)

1.2. Σταθερή δύναμη πάνω στο υλικό σημείο

Και τώρα είμαστε έτοιμοι να λύσουμε το πρόβλημα κινήσεως που έχουμε πρώτα για μια σταθερή δύναμη F_0

```
In[8]:= F[t_] := F0
```

Η σχετική λύση **sol1** προκύπτει άμεσα με τη χρήση της εντολής **DSolve**. Επομένως

```
In[9]:= eqs
```

```
Out[9]= {m x''(t) == F0, x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

```
In[10]:= sol1 = DSolve[eqs, x[t], t][[1]] // Simplify
```

$$\text{Out[10]} = \left\{ x(t) \rightarrow \frac{F_0 t^2}{2m} + v_0 t + x_0 \right\}$$

(Η βοηθητική εντολή **Simplify** μας επέτρεψε μια μικρή απλοποίηση του αποτελέσματος.) Μπορούμε τώρα εύκολα να προσδιορίσουμε τη θέση $x_1(t)$, την ταχύτητα $v_1(t)$ και την επιτάχυνση $a_1(t)$ του υλικού σημείου M που αντιστοιχούν στη λύση αυτή. (Μια λίστα τριών εντολών αρκεί!) Επομένως έχουμε

```
In[11]:= {x1[t_] = x[t] /. sol1, v1[t_] = x1'[t], a1[t_] = v1'[t]}
```

$$\text{Out[11]} = \left\{ \frac{F_0 t^2}{2m} + v_0 t + x_0, \frac{F_0 t}{m} + v_0, \frac{F_0}{m} \right\}$$

(Προφανώς η επιτάχυνση $a_1(t)$ είναι στην παρούσα περίπτωση σταθερή, η ταχύτητα $v_1(t)$ πρωτοβάθμιο πολυώνυμο του χρόνου t και η θέση $x_1(t)$ δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του χρόνου t στην απλή περίπτωση σταθερής δυνάμεως $F = F_0$ πάνω στο υλικό σημείο την κίνηση του οποίου εξετάζουμε. Όλα αυτά είναι εύλογα.) Η επαλήθευση των τριών εξισώσεων **eqs** είναι άμεση, πάρα πολύ απλή με τον παρόντα συμβολισμό:

```
In[12]:= ver1 = eqs /. x → x1
```

```
Out[12]= {True, True, True}
```

Επομένως και οι τρεις εξισώσεις μας **eqs**, η διαφορική εξίσωση της κινήσεως **deq** και οι δύο αρχικές συνθήκες **ics**, επαληθεύονται και είμαστε έτσι βέβαιοι για το μαθηματικό μέρος της λύσεως του προβλήματός μας. Εντούτοις από φυσικής απόψεως, δηλαδή αν πραγματικά οι εξισώσεις μας **eqs** είναι και αυτές σωστές και πόσο σωστές άραγε, δηλαδή πόσες παραδοχές έχουν γίνει (π.χ. αγνοήθηκε κάθε αντίσταση και τριβή, το σώμα μας θεωρήθηκε απλά υλικό σημείο M , κλπ.), αυτό είναι ένα άλλο θέμα καθαρής αρμοδιότητας του Πολιτικού Μηχανικού. Ασφαλώς το θέμα αυτό είναι έξω από τους άμεσους στόχους του παρόντος εφαρμοσμένου notebook.

Μπορούμε επίσης να εξετάσουμε την εξάρτηση της θέσεως $x_1(t)$ (που δηλώνεται τώρα σαν x_t τη χρονική στιγμή t) από την ταχύτητα $v_1(t)$ (που δηλώνεται τώρα σαν v_t τη χρονική στιγμή t) στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτό το πετυχαίνουμε απαλείφοντας το χρόνο t μεταξύ των δύο αυτών ποσοτήτων με τη χρήση της εντολής **Eliminate** της *Mathematica*. Έτσι βρίσκουμε (με απαλοιφή του χρόνου t)

```
In[13]:= elimination = Eliminate[{x1[t] == xt, v1[t] == vt}, t] // Simplify
```

$$\text{Out[13]} = vt^2 == \frac{m v_0^2 - 2 F_0 x_0 + 2 F_0 x_t}{m} \wedge m \neq 0$$

(με το σύμβολο \wedge να παριστάνει το λογικό “και”, “and” στα Αγγλικά). Υποθέτουμε τώρα ότι η μάζα m του υλικού σημείου M είναι μη μηδενική (επειδή είναι θετική ποσότητα), όπως πραγματικά συμβαίνει. Μπορούμε έτσι να περιορισθούμε στο πρώτο μέρος της παραπάνω απαλοιφής **elimination** (δηλαδή στον πρώτο όρο της σχετικής λογικής συζεύξεως), παίρνοντας απλά την εξής ισότητα μετά από πολλαπλασιασμό και των δύο μελών επί $(1/2)m$:

In[14]:= **EnergyEquation1** = $\frac{1}{2} m \text{ elimination}[[1, 1]] == \frac{1}{2} m \text{ elimination}[[1, 2]] // \text{Simplify}$

Out[14]= $\frac{m v t^2}{2} == \frac{m v_0^2}{2} - F_0 x_0 + F_0 x t$

για τη σχέση που συνδέει τη θέση x_t του υλικού σημείου M με την ταχύτητά του v_t (τη χρονική στιγμή t). Προφανώς η σχέση αυτή αναφέρεται στην αύξηση (για $F_0 > 0$) της κινητικής ενέργειας $T = (1/2) m v_t^2$ του υλικού σημείου M , η οποία οφείλεται στο έργο $W = F_0(x_t - x_0)$ της δυνάμεως F_0 που έχει παραχθεί κατά την κίνηση του υλικού σημείου M από την αρχική θέση του x_0 (για $t = 0$) μέχρι την κάθε φορά (μεταβλητή) θέση του x_t τη χρονική στιγμή t . Η ίδια σχέση γράφεται και στην εξής απόλυτα ισοδύναμη μορφή:

In[15]:= **EnergyEquation2** = $\frac{1}{2} m (v t^2 - v_0^2) == F_0 (x t - x_0)$

Out[15]= $\frac{1}{2} m (v t^2 - v_0^2) == F_0 (x t - x_0)$

Κι αντίστροφα, όπως ασφαλώς και αναμένεται, η παραπάνω ενεργειακή εξίσωση **EnergyEquation2** διαπιστώνεται αμέσως ότι επαληθεύεται από τις εκφράσεις της θέσεως $x_1(t)$ και της ταχύτητας $v_1(t)$ που ήδη βρέθηκαν στην παρούσα ευθύγραμμη κίνηση του υλικού σημείου M , δηλαδή

In[16]:= **EnergyConservation** = **EnergyEquation2** /. {x t → x 1[t], v t → v 1[t]} // **Simplify**

Out[16]= True

Επομένως πέρα από την καθαρά μαθηματική επαλήθευση των εξισώσεων **eqs** (της διαφορικής εξίσωσης **deq** και των αρχικών συνθηκών **ics**) του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών κάναμε επιπλέον και την επαλήθευση της ισχύος της σχετικής ενεργειακής εξίσωσης **EnergyEquation2**. Δηλαδή διαπιστώσαμε ότι η λύση μας $x_1(t)$ για τη θέση του υλικού σημείου M και η έκφραση της ταχύτητας $v_1(t) = x_1'(t)$ του ίδιου υλικού σημείου που προέκυψε από αυτήν πραγματικά επαληθεύουν το από φυσικής απόψεως αναμενόμενο γεγονός. Το γεγονός αυτό είναι ότι η αύξηση της κινητικής ενέργειας T του υλικού σημείου M στ' αλήθεια οφείλεται στο έργο W της εξωτερικής δυνάμεως F_0 κατά την κίνηση αυτή του υλικού σημείου M . Με τον τρόπο αυτό η εμπιστοσύνη μας προς τη λύση **sol1**, η οποία βρέθηκε για το πρόβλημα αρχικών τιμών που έχουμε (βασικά με τη χρήση της εντολής **DSolve**) αυξάνεται ακόμη περισσότερο, γίνεται σχεδόν βεβαιότητα.

1.3. Μεταβλητή δύναμη πάνω στο υλικό σημείο

Θα προχωρήσουμε τώρα σε ένα παρόμοιο πρόβλημα, αλλά με μεταβλητή τη δύναμη $F = F(t)$ που εφαρμόζεται πάνω στο υλικό σημείο, συγκεκριμένα με

In[17]:= **F[t_]:= F1 Cos[a t] + F2 Sin[b t] + F3 Exp[-c t]**

(με τις ποσότητες $F_{1,2,3}$ και a, b, c σταθερές). Για την επίλυση των εξισώσεών μας **eqs** θα χρησιμοποιηθεί και πάλι η εντολή **DSolve**. Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως γίνεται

λιγάκι πιο πολύπλοκη (χωρίς όμως να αλλάζουν οι χαρακτηρισμοί της). Έχουμε επομένως (και απολύτως ανάλογα με τα προηγούμενα και μάλιστα με χρήση ανάλογων συμβόλων)

`In[18]:= deq`

`Out[18]= m x''(t) == e^{-ct} F3 + F1 cos(a t) + F2 sin(b t)`

`In[19]:= eqs`

`Out[19]= {m x''(t) == e^{-ct} F3 + F1 cos(a t) + F2 sin(b t), x(0) == x0, x'(0) == v0}`

`In[20]:= sol2 = DSolve[eqs, x[t], t][[1]] // Simplify`

`Out[20]= {x(t) → -\frac{\cos(a t) F1}{a^2 m} + \frac{F1}{a^2 m} + \frac{F2 t}{b m} + \frac{F3 t}{c m} + t v0 + x0 - \frac{F2 \sin(b t)}{b^2 m} + \frac{e^{-ct} F3}{c^2 m} - \frac{F3}{c^2 m}}`

`In[21]:= {x2[t_] = x[t] /. sol2, v2[t_] = x2'[t], a2[t_] = v2'[t]} // Simplify`

`Out[21]= {-\frac{\cos(a t) F1}{a^2 m} + \frac{F1}{a^2 m} + \frac{F2 t}{b m} + \frac{F3 t}{c m} + t v0 + x0 - \frac{F2 \sin(b t)}{b^2 m} + \frac{e^{-ct} F3}{c^2 m} - \frac{F3}{c^2 m},`

$$\frac{a c F2 - a c \cos(b t) F2 - a b e^{-ct} F3 + a b F3 + a b c m v0 + b c F1 \sin(a t)}{a b c m},$$

$$\frac{e^{-ct} F3 + F1 \cos(a t) + F2 \sin(b t)}{m}}$$

Είναι πολύ καλό που χρησιμοποιήθηκε και πάλι η εντολή **Simplify** στους συγκεκριμένους υπολογισμούς. Είναι επίσης χρήσιμη και σε πάρα πολλούς άλλους πολύπλοκους υπολογισμούς. Μερικές φορές μάλιστα απαιτείται αντί γι' αυτή η χρήση και της αρκετά πιο ισχυρής εντολής **FullSimplify** για σχεδόν άριστα υπολογιστικά αποτελέσματα. Η επαλήθευση της λύσεως είναι και τώρα πάρα πολύ εύκολη

`In[22]:= ver2 = eqs /. x → x2`

`Out[22]= {m \left(\frac{e^{-ct} F3}{m} + \frac{F1 \cos(a t)}{m} + \frac{F2 \sin(b t)}{m} \right) == e^{-ct} F3 + F1 \cos(a t) + F2 \sin(b t),`
`True, True}`

Πρέπει όμως να χρησιμοποιηθεί (και πάλι) και η εντολή **Simplify** μόνο όσον αφορά στην ίδια τη διαφορική εξίσωση **deq**. Για τις αρχικές συνθήκες **ics** διαπιστώθηκε ήδη ότι δεν απαιτείται η χρήση της:

`In[23]:= ver2 // Simplify`

`Out[23]= {True, True, True}`

Φυσικά η *Mathematica* μπορεί να μας οδηγήσει και στις λύσεις $x(t)$ πολύ πιο δύσκολων προβλημάτων ευθύγραμμης κινήσεως υλικού σημείου M της μορφής που εξετάζουμε εδώ, δηλαδή με πολύ πιο πολύπλοκες εκφράσεις της δυνάμεως $F = F(t)$ που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M . Ασφαλώς όμως η παράθεση τέτοιων πολύπλοκων εκφράσεων, αν και υπολογιστικά είναι απόλυτα εφικτή, εντούτοις πρακτικά δεν εξυπηρετεί κανέναν ουσιαστικό εκπαιδευτικό σκοπό!

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ NOTEBOOK EN-EMII-FALL ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Δυναμική του Υλικού Σημείου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις, Γενική Λύση, Μερική Λύση, Χαρακτηριστική Εξίσωση, Αρχικές Συνθήκες, Προβλήματα Αρχικών Τιμών, Μετασχηματισμός Laplace

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου, Ευθύγραμμη Κίνηση, Ελεύθερη Πτώση, Θέση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση της Βαρύτητας, Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα, Εξισώσεις Κινήσεως

ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΔΕΙΓΜΑ):

[1] Μάρκελλου, Β. Β., *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Τόμος II, Τεύχος 5: *Διαφορικές Εξισώσεις: Εισαγωγή*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000, Κεφάλαιο 1, Εδάφιο 1.1.

[2] Fowles, G. R. and Cassiday, G. L., *Analytical Mechanics*, 6η Έκδοση. Saunders College Publishing, Fort Worth, Philadelphia, 1999, Κεφάλαιο 2.

[3] Timoshenko, S. and Young, D. H., *Engineering Mechanics*, 4η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, 1983, Κεφάλαιο 6.

[4] Shames, I. H., *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*, 4η Έκδοση. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997, Κεφάλαια 11-12.

2.1. Το μηχανικό πρόβλημα

Θεωρούμε το κλασικό μηχανικό πρόβλημα της ελεύθερης πτώσεως υλικού σημείου M (μάζας m) χωρίς καθόλου τριβές ή άλλη αντίσταση του αέρα στο γήινο πεδίο βαρύτητας με g την επιτάχυνση της βαρύτητας (προς τη γη). Στο στοιχειώδες αυτό πρόβλημα ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει την εξής απλή μορφή διαφορικής εξίσωσης (differential equation) **de** στη *Mathematica*:

```
In[1]:= de = D[x[t], {t, 2}] == -g
```

```
Out[1]= x''(t) == -g
```

ως προς τη θέση (ύψος) $x(t)$ του υλικού σημείου M (με τη θετική φορά του $x(t)$ να έχει επιλεγεί προς τα πάνω) συναρτήσει του χρόνου t . Η ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση **de** μπορεί φυσικά να δηλωθεί (απόλυτα ισοδύναμα) και με τον απλούστερο συμβολισμό

```
In[2]:= de = x''[t] == -g
```

```
Out[2]= x''(t) == -g
```

Εν πάση περιπτώσει έχουμε μια απλή συνήθη διαφορική εξίσωση **de** της κινήσεως (ελεύθερης πτώσεως χωρίς τριβές ή αντίσταση του αέρα) για το υλικό σημείο M . Η διαφορική αυτή εξίσωση **de** είναι δευτέρας τάξεως (λόγω της εμφανίσεως της δευτέρας παραγώγου ως προς τη θέση $x(t)$), πρώτου βαθμού (γιατί η δεύτερη αυτή παράγωγος είναι υψωμένη

στην πρώτη δύναμη), προφανώς γραμμική και με σταθερό συντελεστή (τη μονάδα) στη δεύτερη παράγωγο που προαναφέρθηκε (αν και αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία εν προκειμένω λόγω της μη υπάρξεως άλλων παραγώγων) και μη ομογενής (λόγω της εμφάνισης της επιταχύνσεως της βαρύτητας g στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης de). Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η θέση x και η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t .

2.2. Άμεση ολοκλήρωση

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης de μπορούμε να εργασθούμε με διάφορους τρόπους. Στο βιβλίο [1] επιδεικνύεται η μέθοδος της άμεσης ολοκληρώσεως. Με τη *Mathematica* η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί (με τη χρήση της εντολής **Integrate** για τις ολοκληρώσεις) ως εξής:

```
In[3]:= de1 = Integrate[de[[1]], t] == Integrate[de[[2]], t] + k1
```

```
Out[3]= x'(t) == k1 - g t
```

Εδώ δε λησμονήσαμε να προσθέσουμε μια σταθερά ολοκληρώσεως k_1 (κατά προτίμηση, αλλ' όχι απαραίτητα, στην ολοκλήρωση του δεξιού μέλους) και να δηλώσουμε τη νέα διαφορική εξίσωση σαν $de1$. Ασφαλώς η εντολή **Integrate** μπορεί να γραφεί αρκετά πιο παραδοσιακά με τη χρήση του συνηθισμένου συμβόλου της ολοκληρώσεως \int . Τότε έχουμε και πάλι (απόλυτα ισοδύναμα, όπως παρατηρούμε από το πιο κάτω αποτέλεσμα)

```
In[4]:= de1 = ∫ de[[1]] dt == ∫ de[[2]] dt + k1
```

```
Out[4]= x'(t) == k1 - g t
```

Με τον τρόπο αυτό η αρχική διαφορική εξίσωση de (δευτέρας τάξεως, όπως ήδη αναφέρθηκε) έχει μετατραπεί σε μια απλούστερη διαφορική εξίσωση $de1$ πρώτης τάξεως (τώρα ως προς την ταχύτητα $x'(t) = v(t)$ του ίδιου υλικού σημείου M). Αυτό το πετύχαμε με την πιο πάνω ολοκλήρωση. Κατ' ανάλογο τρόπο, δηλαδή με μια ακόμη ολοκλήρωση (και στα δύο μέλη και πάλι) μπορούμε να απαλλαγούμε εντελώς από την παράγωγο και να έχουμε την τελική έκφραση της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου M (ασφαλώς σαν συνάρτηση του χρόνου t)

```
In[5]:= θέση = ∫ de1[[1]] dt == ∫ de1[[2]] dt + k2
```

```
Out[5]= x(t) == -\frac{g t^2}{2} + k1 t + k2
```

Εδώ εισαγάγαμε και μια δεύτερη σταθερά ολοκληρώσεως: την k_2 . Με το σύμβολο **θέση** δηλώσαμε την παραπάνω εξίσωση για τη θέση $x(t)$ του υλικού σημείου M . Η *Mathematica* θυμάται βέβαια το σύμβολο αυτό:

```
In[6]:= θέση
```

```
Out[6]= x(t) == -\frac{g t^2}{2} + k1 t + k2
```

που μπορούμε πια να το χρησιμοποιούμε όποτε θέλουμε, π.χ. για να δηλώσουμε τη λύση $x_g(t)$ του προβλήματος της ελεύθερης πτώσεως που εξετάζουμε (δηλαδή της διαφορικής εξίσωσης **de**) σαν συνάρτηση στη *Mathematica*:

```
In[7]:= xg[t_] = θέση[2]
```

$$\text{Out[7]} = -\frac{g t^2}{2} + k_1 t + k_2$$

Επ' ευκαιρία σημειώνουμε ότι η συνάρτηση αυτή $x_g(t)$ αποτελεί τη γενική λύση (general solution) του προβλήματος της ελεύθερης πτώσεως του υλικού σημείου M , γιατί δεν καθορίστηκαν μέχρι στιγμής αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$. Παρά ταύτα διαπιστώνεται ότι οι αυθαίρετες σταθερές k_2 και k_1 δηλώνουν εν προκειμένω την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου M αντίστοιχα, όπως αμέσως παρατηρούμε πολύ εύκολα:

```
In[8]:= {xg[0], xg'[t] /. t -> 0}
```

```
Out[8]= {k2, k1}
```

Σημειώνουμε επίσης ότι είναι απόλυτα δικαιολογημένη η εμφάνιση δύο σταθερών, των k_1 και k_2 , στην παραπάνω γενική λύση $x_g(t)$ της διαφορικής εξίσωσης **de**. Αυτό συμβαίνει, επειδή πρόκειται για διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Ο Πολιτικός Μηχανικός έχει τεράστια ευθύνη στις κατασκευές και στα λοιπά έργα που αναλαμβάνει και πρέπει ασφαλώς από τώρα (δηλαδή ακόμη και σαν φοιτητής/φοιτήτρια) να συνηθίσει να επαληθεύει τα αποτελέσματά του, εν προκειμένω την τόσο απλή και γνωστή λύση $x_g(t)$ του προβλήματος της ελεύθερης πτώσεως για τη θέση $x(t)$ του υλικού σημείου M . Αυτό ασφαλώς είναι εξαιρετικά εύκολο με τη *Mathematica*:

```
In[9]:= επαλήθευση = de /. x -> xg
```

```
Out[9]= True
```

Οποσδήποτε αντί για το σύμβολο **επαλήθευση** θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί και οποιοδήποτε άλλο σύμβολο (π.χ. **verification** ή η προφανής σύντμησή του **ver**) ή και κανένα απολύτως σύμβολο, δηλαδή

```
In[10]:= de /. x -> xg
```

```
Out[10]= True
```

Καλό είναι όμως να δηλώνουμε με σύμβολα τις παραστάσεις και τα αποτελέσματα που παίρνουμε στη *Mathematica* (εν προκειμένω το λογικό αποτέλεσμα True, δηλαδή αληθές). Έτσι θα μπορούμε, αν χρειασθεί, να τα έχουμε διαθέσιμα στους παραπέρα υπολογισμούς μας, όπως ήδη κάναμε με το σύμβολο **de** για την αρχική διαφορική εξίσωσή μας, το οποίο χρησιμοποιήθηκε αμέσως πιο πάνω. (Αν δεν το είχαμε διαθέσιμο, θα έπρεπε να ξαναγράψουμε τη διαφορική εξίσωση της ελεύθερης πτώσεως του υλικού σημείου M .) Το επιχείρημα ότι η διαφορική αυτή εξίσωση είναι απλή δεν ευσταθεί απόλυτα, γιατί υπάρχουν και πολύπλοκες ακόμη και εξαιρετικά πολύπλοκες διαφορικές εξισώσεις στην Επιστήμη του

Πολιτικού Μηχανικού. Γιατί να μην τους δίνουμε ένα όνομα, π.χ. **de**, **de1** ή **deq** (από τον όρο differential equation) ή και **δε** (διαφορική εξίσωση), ώστε να τις θυμάται η *Mathematica*;

2.3. Χρήση της εντολής **DSolve**

Πέρα από τη μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης, που επιδείχθηκε αναλυτικά πιο πάνω στην απλή διαφορική εξίσωσή μας **de**, η *Mathematica* διαθέτει ασφαλώς και ειδική εντολή για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων που επιδέχονται αναλυτική επίλυση (ακόμη και πολύ δύσκολων τέτοιων εξισώσεων). Αυτή είναι η εντολή **DSolve**. Με τη χρήση της εντολής αυτής, που έχει τρία ορίσματα: τη διαφορική εξίσωση, την άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) και την ανεξάρτητη μεταβλητή, μπορούμε να βρούμε αμέσως τη λύση **λύση** της διαφορικής εξισώσεώς μας **de** ως εξής:

```
In[11]:= λύση = DSolve[de, x[t], t]
```

```
Out[11]= {{x(t) -> -\frac{g t^2}{2} + c_2 t + c_1}}
```

Ασφαλώς θα μπορούσαμε να μην είχαμε δώσει όνομα (**λύση**) στη λύση αυτήν, αν όμως τη χρειαστούμε παραπέρα, ακόμη και μέσα στο κείμενο, θα πρέπει να την ξαναυπολογίσουμε ή να την ξαναγράψουμε; (Όχι βέβαια!) Έτσι επιλέξαμε εύλογα να της δώσουμε ένα όνομα. Φυσικά ο παρατηρητικός φοιτητής/η παρατηρητική φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός έχει ήδη σημειώσει την ουσιαστική σύμπτωση της πιο πάνω λύσεως (**λύση**) με την ανάλογη λύση (**θέση**) που είχε προκύψει την μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης της ίδιας διαφορικής εξισώσεως **de** της κινήσεως του υλικού σημείου *M* (με μόνη ουσιαστική διαφορά στα σύμβολα για τις αυθαίρετες σταθερές και στο συμβολισμό γενικότερα).

Είναι πραγματικά πολύ χρήσιμο ο Πολιτικός Μηχανικός να χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές μεθόδους στην επίλυση των προβλημάτων του, γιατί με αυτό τον τρόπο ελέγχει τις μεθόδους που χρησιμοποιεί (πέρα από την επαλήθευση των αποτελεσμάτων σε μια μόνο μέθοδο σε όσο βαθμό είναι και αυτή δυνατή). Εν προκειμένω η εντολή **DSolve** προγραμματίστηκε από ανθρώπους στην εταιρεία Wolfram Research, Inc., η οποία έχει αναπτύξει τη *Mathematica* (υπό τη διεύθυνση του διάσημου Stephen Wolfram), και προφανώς, ποτέ δεν είναι 100% βέβαιο ότι όλοι οι προγραμματιστές δεν κάνουν ποτέ λάθη. Ανάλογα ισχύουν, θεωρητικά τουλάχιστον, και με τα προγράμματα που χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός στη μελέτη κατασκευών, π.χ. στη στατική και τη δυναμική ανάλυση μιας πολυκατοικίας: η χρήση δύο τέτοιων προγραμμάτων για την ίδια μελέτη ασφαλώς δίνει μια σιγουριά στο μελετητή Πολιτικό Μηχανικό, εφόσον βέβαια τα αποτελέσματα είναι ανάλογα υπό τους ίδιους αρχιτεκτονικούς, λειτουργικούς και τεχνικούς περιορισμούς και προϋποθέσεις. Δεν είναι έτσι;

Ας σημειωθεί επίσης ότι από την παραπάνω γενική λύση **λύση** που βρήκαμε μπορούμε αμέσως να πάρουμε και τη σχετική συνάρτηση $x_y(t)$ ανάλογα με ό,τι κάναμε προηγουμένως, δηλαδή

```
In[12]:= xy[t_] = λύση[[1, 1, 2]]
```

```
Out[12]= -\frac{g t^2}{2} + c_2 t + c_1
```


με τους δείκτες στο δεξιό μέλος της πιο πάνω εκφράσεως να αποβλέπουν στην “απόσπαση” της κύριας εκφράσεως που θέλουμε στην παραπάνω λύση μας (που βασίστηκε στη χρήση της εντολής **DSolve**). Η παραπάνω γενική λύση είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο ως προς το χρόνο t και είναι επίσης διπαραμετρική: παράμετροι $c_{1,2}$, που μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές πραγματικές ή μιγαδικές. Εννοείται βέβαια ότι ο Πολιτικός Μηχανικός θα αποκλείσει τις μιγαδικές τιμές στις παραμέτρους αυτές, γιατί δεν έχει φυσικό νόημα μιγαδική θέση $x(t)$ στην ελεύθερη πτώση υλικού σημείου M .

Σημειώνεται επίσης (και πάλι) ότι οι δύο παραπάνω γενικές λύσεις που βρήκαμε (τυπικά τουλάχιστον με δύο διαφορετικές μεθόδους) συμπίπτουν, επειδή

```
In[13]:= xg[t] == xv[t] /. {k1 -> C[2], k2 -> C[1]}
```

```
Out[13]= True
```

μετά από μια λίγο-πολύ προφανή αλλαγή των συμβόλων για τις δύο παραμέτρους $k_{1,2}$ της πρώτης λύσεως $x_g(t)$ (που τα επιλέξαμε εμείς), ώστε αυτά να συμπέσουν με τα σύμβολα των παραμέτρων $c_{2,1}$ της δεύτερης λύσεως $x_v(t)$ (που τα επέλεξε η ίδια τη *Mathematica*).

2.4. Αρχικές συνθήκες: το πρόβλημα αρχικών τιμών

Συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός ενδιαφέρεται για τη λύση ενός φυσικού προβλήματος που τον αφορά υπό συγκεκριμένες συνθήκες που εξασφαλίζουν το μονοσήμαντο της λύσεως αυτής. Δηλαδή ενδιαφέρεται για μία και μοναδική λύση σε κάθε φυσικό πρόβλημα. Επομένως δεν ενδιαφέρεται για διπαραμετρικές οικογένειες λύσεων στην καθημερινή πρακτική. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα της ελεύθερης πτώσεως του υλικού σημείου M στην πραγματικότητα πρέπει να ξέρουμε τις καλούμενες αρχικές συνθήκες του προβλήματος αυτού (για $t = 0$), δηλαδή την αρχική θέση (ύψος) x_0 και την αρχική ταχύτητα v_0 του υλικού σημείου M με άλλες λέξεις με ποιον τρόπο αρχίζει η κίνηση του υλικού αυτού σημείου. Αυτές οι αρχικές συνθήκες θα μας επιτρέψουν τον πλήρη προσδιορισμό της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου χωρίς πλέον την εμφάνιση των παραμέτρων $k_{1,2}$ ή $c_{2,1}$, αλλά με την αντικατάστασή τους από τις ίδιες τις αρχικές συνθήκες (x_0, v_0) έστω και σε μη αριθμητική μορφή. Ας δηλώσουμε επομένως τις αρχικές αυτές συνθήκες με το σύμβολο **ics** (initial conditions, αρχικές συνθήκες):

```
In[14]:= ics = {x[0] == x0, x'[0] == v0}
```

```
Out[14]= {x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

Σε τόσο απλές δηλώσεις είναι απόλυτα άχρηστο να θέλουμε και το τετριμμένο αποτέλεσμα του υπολογισμού από τη *Mathematica*. Έτσι γράφουμε απλά και ασφαλώς απόλυτα ισοδύναμα

```
In[15]:= ics = {x[0] == x0, x'[0] == v0};
```

για να μην πάρουμε έξοδο (output) από το πρόγραμμα. Τώρα έχουμε τρεις εξισώσεις: (α) τη διαφορική εξίσωση **de** και (β) τις αρχικές συνθήκες **ics**. Ας τις δηλώσουμε όλες μαζί με το σύμβολο **eqs** (equations, εξισώσεις)

```
In[16]:= eqs = {de, ics}
```

```
Out[16]= {x''(t) == -g, {x(0) == x0, x'(0) == v0}}
```

Αυτές οι τρεις εξισώσεις μας αποτελούν (από κοινού) ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (initial value problem), το οποίο πρέπει να λύσουμε και να βρούμε τη λύση του **sol** (solution, λύση)

```
In[17]:= sol = DSolve[eqs, x[t], t]
```

```
Out[17]= {{x(t) -> 1/2 (-g t^2 + 2 v0 t + 2 x0)}}
```

Η εντολή **Simplify** βοηθάει στην απλοποίηση της λύσεως αυτής:

```
In[18]:= sol = sol // Simplify
```

```
Out[18]= {{x(t) -> -g t^2/2 + v0 t + x0}}
```

και δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε εν προκειμένω ιδιαίτερο σύμβολο (π.χ. **sol1**) στην απλοποίηση αυτή της εκφράσεως της λύσεως **sol**. Συνήθως βέβαια ενώνουμε τις δύο παραπάνω εντολές σε μία μόνο εντολή ως εξής:

```
In[19]:= sol = Simplify[DSolve[eqs, x[t], t]]
```

```
Out[19]= {{x(t) -> -g t^2/2 + v0 t + x0}}
```

ή ίσως ακόμη απλούστερα

```
In[20]:= sol = DSolve[eqs, x[t], t] // Simplify
```

```
Out[20]= {{x(t) -> -g t^2/2 + v0 t + x0}}
```

για να δείξουμε επίσης ότι η εντολή **DSolve** είναι η βασική εντολή, ενώ η εντολή **Simplify** είναι η δευτερεύουσα εντολή. (Γι' αυτό και τη βάζουμε στο τέλος.)

Ας σημειωθεί και στο σημείο αυτό ότι στο παρόν notebook χρησιμοποιείται η version 4.1 της *Mathematica*. Αν είχαμε προηγούμενη version (π.χ. την version 4.0), θα έπρεπε πρώτα να χρησιμοποιήσουμε και την εντολή **Flatten** στις εξισώσεις μας, ώστε να έχουμε ένα απλό σύνολο εξισώσεων **eqs1** σαν πρώτο όρισμα της εντολής **DSolve**:

```
In[21]:= eqs1 = {de, ics} // Flatten
```

```
Out[21]= {x''(t) == -g, x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

(Φαίνεται ότι στη version 4.1, που χρησιμοποιείται εδώ, το καθήκον αυτό το αναλαμβάνει η ίδια η *Mathematica* αυτόματα.) Ασφαλώς μπορούμε εύκολα να χρησιμοποιήσουμε και τη συνθετότερη εντολή

```
In[22]:= sol1 = DSolve[{de, ics} // Flatten, x[t], t] // Simplify
```

```
Out[22]= {{x(t) -> -\frac{g t^2}{2} + v0 t + x0}}
```

(τόσο στη version 4.0 και στις προηγούμενες versions όσο και στη version 4.1) και παραλλαγές της εντολής αυτής.

Τελικά η μερική λύση (partial solution) του προβλήματος αρχικών τιμών που έχουμε έχει τη μορφή

```
In[23]:= xp[t_] = x[t] /. sol[[1]]
```

```
Out[23]= -\frac{g t^2}{2} + v0 t + x0
```

Σημειώνεται πάντως ότι τόσο στη γενική λύση $x_g(t)$ (ή $x_v(t)$) όσο και στη μερική λύση $x_p(t)$ εμφανίζονται δύο επιπλέον σύμβολα πέρα από την επιτάχυνση της βαρύτητας g και την ανεξάρτητη μεταβλητή (δηλαδή το χρόνο t). Η διαφορά είναι όμως ότι στη γενική λύση $x_g(t)$ τα δύο αυτά σύμβολα παρίσταναν αυθαίρετες σταθερές (ακόμη, θεωρητικά, και μιγαδικές), ενώ στη μερική λύση $x_p(t)$ (δηλαδή στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών) τα σύμβολα, x_0 και v_0 που εμφανίζονται παριστάνουν τις συγκεκριμένες τιμές της αρχικής θέσεως και της αρχικής ταχύτητας αντίστοιχα του υλικού σημείου M στο πρόβλημά μας. Όσες φορές διαθέτουμε αριθμητικές τιμές για την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα, τα πράγματα γίνονται πολύ πιο σαφή, γενικά όμως πρέπει να ομολογηθεί ότι η διαφορά μεταξύ γενικής και μερικής λύσεως στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες στην τελευταία παριστάνονται με σύμβολα (και όχι απλά αριθμούς) και μεν είναι φυσικά σαφής, αλλ' υπολογιστικά κάπως δισδιάκριτη. Με άλλα λόγια και στη μερική λύση $x_p(t)$ θα μπορούσε κάποιος να ερμηνεύσει τα σύμβολα x_0 και v_0 σαν αυθαίρετες σταθερές ξεχνώντας τις φυσικές σημασίες τους σαν αρχική θέση και ταχύτητα αντίστοιχα. Μετατρέπει έτσι στο νού του τη μερική αυτή λύση σε γενική λύση χωρίς κανέναν απολύτως υπολογισμό παρά την ουσιώδη διαφορά γενικής και μερικής λύσεως!

Βέβαια η επαλήθευση (verification) της μερικής λύσεως $x_p(t)$ που βρέθηκε είναι ωφέλιμη:

```
In[24]:= ver = eqs /. x -> xp
```

```
Out[24]= {True, {True, True}}
```

Το παραπάνω σύνολο **ver** έχει δύο στοιχεία με το πρώτο να αναφέρεται στη διαφορική εξίσωση **de** και το δεύτερο να είναι και αυτό σύνολο με δύο στοιχεία που να αναφέρονται στις δύο αρχικές συνθήκες **ics**. Ίσως λίγο πιο απλά το σύνολο **ver** θα μπορούσε να γραφεί

```
In[25]:= ver1 = eqs1 /. x -> xp
```

```
Out[25]= {True, True, True}
```

με το σχετικό αποτέλεσμα **ver1** να είναι τώρα ένα συνηθισμένο σύνολο με τρία στοιχεία (όλα ίσα με True και πάλι) λόγω των τριών εξισώσεων (της διαφορικής εξίσωσης και των αρχικών συνθηκών) του προβλήματος αρχικών τιμών που επιλύσαμε.

2.5. Προσδιορισμός της μερικής λύσεως από τη γενική

Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι πέρα από την πιο πάνω δυνατότητα του απευθείας προσδιορισμού της λύσεως $x_p(t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών (μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης **de** υπό τις αρχικές συνθήκες **ics** με άμεση χρήση της εντολής **DSolve**) μια άλλη και τελικά ισοδύναμη δυνατότητα παρέχεται με τη χρήση της γενικής λύσεως που ήδη βρέθηκε

`In[26]:= $x_g[t]$`

`Out[26]= $-\frac{g t^2}{2} + k_1 t + k_2$`

και τον καθορισμό των δύο αυθαίρετων σταθερών $k_{1,2}$ σ' αυτή με τη βοήθεια των συγκεκριμένων αρχικών συνθηκών

`In[27]:= ics`

`Out[27]= $\{x(0) == x0, x'(0) == v0\}$`

Τότε προκύπτει αμέσως το σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

`In[28]:= σύστημα = $\{x_g[0] == x0, (\partial_t x_g[t] /. t \rightarrow 0) == v0\}$`

`Out[28]= $\{k_2 == x0, k_1 == v0\}$`

Αυτό μάλιστα στην εξαιρετικά απλή περίπτωση μας δε χρειάζεται ιδιαίτερα την εντολή **Solve**, ώστε να μας δώσει τις ζητούμενες συγκεκριμένες τιμές των αρχικά αυθαίρετων σταθερών $k_{1,2}$. Η εντολή αυτή (απόλυτα τετριμμένη εν προκειμένω) παίρνει την μορφή

`In[29]:= σταθερές = Solve[σύστημα, $\{k_1, k_2\}$][[1]]`

`Out[29]= $\{k_2 \rightarrow x0, k_1 \rightarrow v0\}$`

Τώρα η γενική λύση $x_g(t)$ μεταπίπτει στη μερική λύση $x_p(t)$

`In[30]:= $\{x_{p1}[t_] = x_g[t] /. σταθερές, x_{p1}[t] == x_p[t]\}$`

`Out[30]= $\{-\frac{g t^2}{2} + v0 t + x0, True\}$`

που έχει ήδη βρεθεί (κατευθείαν με τη χρήση της εντολής **DSolve**) πιο πάνω. Η πρώτη αυτή μέθοδος, δηλαδή χωριστός εξαρχής υπολογισμός της μερικής λύσεως $x_p(t)$ (μέσω της εντολής **DSolve**), όταν η γενική λύση $x_g(t)$ είναι ήδη γνωστή, είναι προφανώς υπολογιστικά δαπανηρή (μέσα στη *Mathematica*), αλλά πρακτικά (προγραμματιστικά) πολύ πιο εύκολη.

Μπορεί να σημειωθεί επίσης ότι από τη θέση (το ύψος) $x_p(t)$ του υλικού σημείου M που ήδη βρέθηκε μπορούμε στη συνέχεια άμεσα (με απλές παραγωγίσεις) να προσδιορίσουμε την ταχύτητά του $v_p(t)$ καθώς και την επιτάχυνσή του $a_p(t)$

`In[31]:= $\{v_p[t_] = \partial_t x_p[t], a_p[t_] = \partial_t v_p[t]\}$`

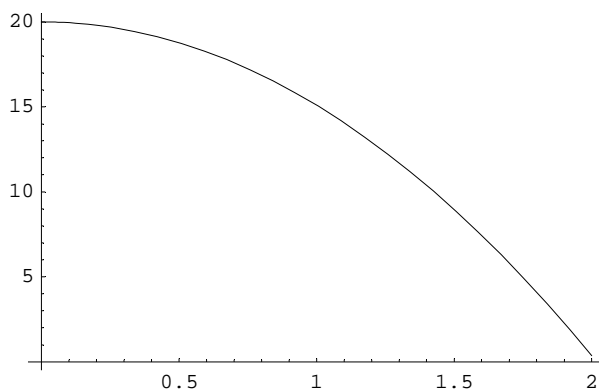
`Out[31]= $\{v0 - g t, -g\}$`

Από αυτές η ταχύτητα $v_p(t)$ μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο t , ενώ η επιτάχυνση $a_p(t)$ είναι προφανώς σταθερή: $a_p(t) = -g$ στο συγκεκριμένο μηχανικό πρόβλημά μας.

2.6. Γραφική παράσταση της λύσεως

Αν θέλουμε να διανθίσουμε κάπως το κείμενο και τους υπολογισμούς του παρόντος notebook με μια γραφική παράσταση για τη θέση (το ύψος) $x_p(t)$ του υλικού σημείου M , αυτό είναι εξαιρετικά εύκολο με χρήση της εντολής **Plot** για συγκεκριμένες τιμές της επιταχύνσεως της βαρύτητας g και των αρχικών συνθηκών x_0 και v_0 . Αυτό φαίνεται και στο σχήμα:

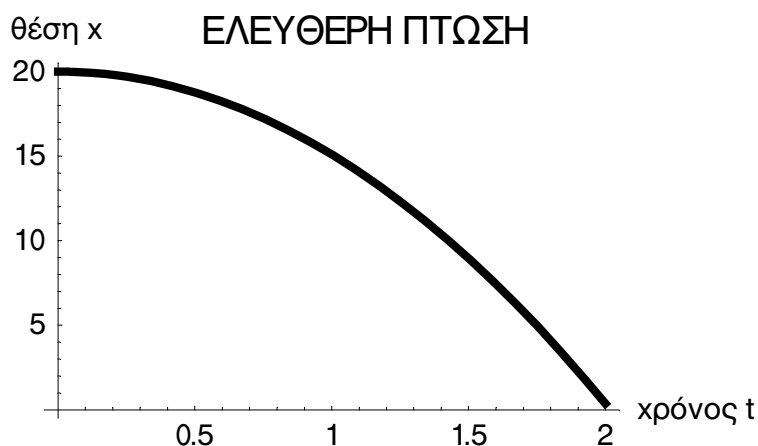
```
In[32]:= Plot[xp[t] /. {g → 9.81, x0 → 20, v0 → 0}, {t, 0, 2}];
```



Μπορούν ασφαλώς να γίνουν διάφορες φυσικές και εύλογες παρατηρήσεις από το σχήμα αυτό, π.χ. ότι το υλικό σημείο M κινείται με ολοένα αυξανόμενη ταχύτητα προς τη γη έχοντας ξεκινήσει (από τη θέση $x_0 = 20$) από κατάσταση ηρεμίας. Παρατηρείται επίσης ότι μετά την πάροδο περίπου 2 sec το υλικό σημείο έχει σχεδόν φθάσει στην επιφάνεια της γης, πράγμα προφανές.

Σε μια πιο επίσημη παρουσίαση της λύσεως αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών το παραπάνω σχήμα θα μπορούσε να γίνει περισσότερο σαφές και εντυπωσιακό ως εξής:

```
In[33]:= Plot[xp[t] /. {g → 9.81, x0 → 20, v0 → 0}, {t, 0, 2},
  DefaultFont → {"MgHelvetica", 14}, ImageSize → 355,
  AxesLabel → {"χρόνος t", "θέση x"}, PlotStyle → {Thickness[0.015]},
  PlotLabel → FontForm[" ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ", {"MgHelvetica", 18}]];
```



Εδώ καθορίσθηκαν η γραμματοσειρά, η MgHelvetica (σε δύο διαφορετικά μεγέθη), ο τίτλος, οι άξονες και το πάχος της γραφικής παραστάσεως. Το ίδιο σχήμα μπορεί να γίνει και πολύ περισσότερο λεπτομερές και εντυπωσιακό από τον αφοσιωμένο και έμπειρο χρήστη της *Mathematica* (που σίγουρα δεν είναι ο γράφων). Παραδείγματος χάρη, μπορούμε να εισαγάγουμε χρώμα, να χρησιμοποιήσουμε άλλες πιο κατάλληλες γραμματοσειρές, κλπ., κλπ. Οι σχετικές λεπτομέρειες ξεφεύγουν από τους στόχους του παρόντος notebook.

2.7. Η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Επιστρέφοντας στο κύριο, στο μαθηματικό μέρος του παρόντος προβλήματος, μπορούμε ασφαλώς να σημειώσουμε και τη δυνατότητα επιλύσεως της αρχικής διαφορικής εξίσωσης **de** με την κλασική μέθοδο επιλύσεως μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $\rho(\mu)$ παίρνει εν προκειμένω την τετριμμένη μορφή $\rho(\mu) = \mu^2$ με διπλή ρίζα το μηδέν, η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\mu^2 = 0$. Άρα η γενική λύση $x_h(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

```
In[34]:= deh = de[[1]] == 0
```

```
Out[34]= X''(t) == 0
```

είναι απλά της μορφής

```
In[35]:= xh[t_] := k1 t + k2
```

με μερική λύση (partial solution) $x_s(t)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης **de** π.χ. την

```
In[36]:= xs[t_] := - 1/2 g t^2
```

η οποία είναι η απλούστερη δυνατή. Επομένως η γενική λύση $x_{gen}(t)$ της διαφορικής εξίσωσης **de** θα είναι το άθροισμα

```
In[37]:= xgen[t_] = xh[t] + xs[t]
```

```
Out[37]= - g t^2 / 2 + k1 t + k2
```

σε απόλυτη συμφωνία με όσα ήδη βρέθηκαν

```
In[38]:= ver2 = xgen[t] == xg[t]
```

```
Out[38]= True
```

2.8. Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace

Προχωρώντας στο παρόν πολύ απλό notebook της *Mathematica*, θα πρέπει ασφαλώς να αναφέρουμε και τη δυνατότητα επιλύσεως του παρόντος στοιχειώδους προβλήματος Κινηματικής-Δυναμικής με την κλασική πια μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Αυτός είναι ένας πολύ γνωστός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, ιδιαίτερα χρήσιμος για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η σχετική εντολή της *Mathematica* είναι η εντολή **LaplaceTransform**.

Μετασχηματίζουμε επομένως τη διαφορική εξίσωση **de** κατά Laplace (εννοείται και τα δύο μέλη της ταυτόχρονα). Έτσι προκύπτει

```
In[39]:= It1 = LaplaceTransform[de, t, s]
```

```
Out[39]= LaplaceTransform[x(t), t, s] s^2 - x(0) s - x'(0) == - g/s
```

Η νέα αυτή εξίσωση **It1** είναι πια καθαρά αλγεβρική (χωρίς παραγώγους πλέον), με μεταβλητή το s (όχι πια το χρόνο t) και με άγνωστη συνάρτηση το μετασχηματισμό Laplace $X(s) = L\{x(t)\}$ της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου M . Είναι επίσης πρώτου βαθμού. Άρα η επίλυσή της είναι πλήρως τετριμμένη. Έχουμε επομένως τη λύση

```
In[40]:= sol2 = Solve[It1, LaplaceTransform[x[t], t, s]]
```

```
Out[40]= {{LaplaceTransform[x(t), t, s] -> (-g/s + s x(0) + x'(0)) / s^2}}
```

Απομένει τώρα η εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (με τη χρήση της εντολής **InverseLaplaceTransform**) για τον προσδιορισμό της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου M από το μετασχηματισμό Laplace της $X(s)$ (δηλαδή με επιστροφή στο χρόνο t). Άρα έχουμε άμεσα

```
In[41]:= xL[t_] = InverseLaplaceTransform[sol2[[1, 1, 2]], s, t]
```

```
Out[41]= -g t^2 / 2 + x'(0) t + x(0)
```

για τη λύση αυτή $x_L(t)$ (με το δείκτη αφιερωμένο στο αρχικό γράμμα L του μετασχηματισμού Laplace που ήδη χρησιμοποιήσαμε). Βρήκαμε και πάλι ουσιαστικά την ίδια ακριβώς λύση στη διαφορική εξίσωσή μας:

```
In[42]:= ver3 = xL[t] == xp[t] /. {x[0] -> x0, x'[0] -> v0}
```

```
Out[42]= True
```

με τις αρχικές συνθήκες $x(0)$ και $x'(0)$ αυθαίρετες (σαν να ήσαν, αν και δεν είναι, τυχαίες σταθερές) ή με δεδομένες αρχικές τιμές x_0 και v_0 αντίστοιχα ανάλογα με την ερμηνεία που δίνει στη λύση αυτή ο χρήστης της μεθόδου. Για να είμαστε λίγο πιο δίκαιοι, η ερμηνεία των δεδομένων αρχικών συνθηκών φαίνεται πολύ πιο λογική (ιδίως όταν χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό Laplace, όπου αυτές δηλώνονται ρητά: $x(0)$ και $x'(0)$) και είναι η επικρατούσα. Επομένως σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή η συνάρτηση $x_L(t)$ αποτελεί μάλλον τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών **eqs** = {**de**, **ics**} που έχουμε παρά τη γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης **de** έστω και με τις παρούσες συμβολικές τιμές των αρχικών συνθηκών (initial conditions) **ics**.

Μπορούμε επίσης να τροποποιήσουμε λίγο την παραπάνω λύση. Καταρχήν μπορούμε να δηλώσουμε ρητά στην αλγεβρική εξίσωση **It1** το μετασχηματισμό Laplace $X(s) = L\{x(t)\}$ της λύσεως $x(t)$ της διαφορικής εξίσωσης **de** που ζητάμε να προσδιορίσουμε. Τότε αυτή παίρνει την πιο απλή και ευανάγνωστη μορφή

`In[43]:= It2 = LaplaceTransform[de, t, s] /. LaplaceTransform[x[t], t, s] → X[s]`

$$\text{Out[43]= } X(s) s^2 - x(0) s - x'(0) == -\frac{g}{s}$$

Η μορφή αυτή της αλγεβρικής εξισώσεώς μας μπορεί να γίνει σαφέστερη με την ρητή δήλωση και των αρχικών συνθηκών **ics**, δηλαδή $x(0) = x_0$ και $x'(0) = v_0$, ως εξής:

`In[44]:= It3 = It2 /. {x[0] → x0, x'[0] → v0}`

$$\text{Out[44]= } X(s) s^2 - x_0 s - v_0 == -\frac{g}{s}$$

Λύνοντας τώρα ως προς $X(s)$, βρίσκουμε

`In[45]:= sol3 = Solve[It3, X[s]]`

$$\text{Out[45]= } \left\{ \left\{ X(s) \rightarrow \frac{-\frac{g}{s} + v_0 + s x_0}{s^2} \right\} \right\}$$

και τελικά για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που ζητούμε (μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως **de**)

`In[46]:= xLp[t_] = InverseLaplaceTransform[sol3[[1, 1, 2]], s, t]`

$$\text{Out[46]= } -\frac{g t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

απολύτως ανάλογα με προηγουμένως, γιατί προφανώς

`In[47]:= ver4 = xp[t] == xLp[t]`

`Out[47]= True`

Ασφαλώς τα δύο τελευταία βήματα της λύσεως μπορούν να συνδυασθούν επίσης σε ένα

`In[48]:= xLp[t_] = InverseLaplaceTransform[Solve[It3, X[s]][[1, 1, 2]], s, t]`

$$\text{Out[48]= } -\frac{g t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

για την εύρεση της λύσεως του προβλήματος αρχικών τιμών που ζητάμε. Σημειώνεται τέλος ότι, επειδή οι αρχικές συνθήκες **ics** είναι ήδη γνωστές

`In[49]:= ics`

`Out[49]= {x(0) == x0, x'(0) == v0}`

η εντολή ευρέσεως της τελικής αλγεβρικής εξισώσεως (πρωτοβάθμιου πολυωνύμου **It3** ως προς $X(s)$) θα μπορούσε να είχε και την εξής εναλλακτική απλοποιημένη μορφή:

`In[50]:= It3 = It2 /. (ics /. Equal → Rule)`

$$\text{Out[50]= } X(s) s^2 - x_0 s - v_0 == -\frac{g}{s}$$

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Στις επόμενες σελίδες παρατίθενται δύο εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica* για animations, δηλαδή για τη δημιουργία κινήσεως σε σχήματα (ή κινούμενων σχημάτων). Αυτά τα notebooks για animations μας δείχνουν πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η *Mathematica* για τη δημιουργία animations. Τα τελικά αρχεία που δημιουργεί η *Mathematica* είναι αρχεία τύπου animated gif. Αυτά μπορούν εύκολα να εμφανισθούν σαν κινούμενα σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή μέσω των *Windows*. Υπάρχει επίσης και η δυνατότητα να αναρτηθούν στο διαδίκτυο (internet) για ανάλογη εμφάνιση σε οποιοδήποτε υπολογιστή συνδεδεμένο στο διαδίκτυο.

Τα δύο αυτά notebooks αφορούν σε εφαρμογές που σχετίζονται άμεσα με την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και ειδικότερα με τις Ταλαντώσεις: εδώ ενός μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου και ενός μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως. Βασίζονται στα αποτελέσματα της επιλύσεως των σχετικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αυτά τα δύο notebooks είναι τα εξής:

• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS

1. *Notebook για Animations: Animations-MassSpringVibrations: Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μηχανικού Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου* (8 σελίδες)

Περιληψη του notebook: Στο notebook αυτό μέσω της χρήσεως animations (κινήσεως σε σχήματα, κινούμενων σχημάτων) εξετάζεται το πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο των ελεύθερων ταλαντώσεων του κλασικού μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου με ιδιοσυχνότητα ω_0 . Πρώτα αναφέρεται η σχετική διαφορική εξίσωση και προσδιορίζεται η γενική λύση της. Στη συνέχεια προστίθενται και αρχικές συνθήκες (αρχική θέση και αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου) και ξαναλύεται η ίδια διαφορική εξίσωση με γραφική παράσταση της λύσεως στην ειδική περίπτωση μηδενικής αρχικής θέσεως. Μετά το εισαγωγικό αυτό μέρος ακολουθεί το κύριο μέρος του notebook. Αυτό περιλαμβάνει τη σχεδίαση του ελατηρίου, της στερεώσεως του αριστερού άκρου του και της μάζας στο δεξιό άκρο του με το ελατήριο και τη μάζα σαν συναρτήσεις του χρόνου t . Όλα αυτά μαζί δημιουργούν το σχετικό σχήμα (κι αυτό βέβαια σαν συνάρτηση του χρόνου t) που σχεδιάζεται για ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 1$ (δηλαδή για περίοδο $T = 2\pi$) σε μια ακολουθία σχημάτων από $t = 0$ μέχρι και $t = 2\pi - (\pi/8)$ ανά $\pi/8$. Δημιουργούμε έτσι 16 σχήματα που δείχνουν ποια ακριβώς μορφή παίρνει το μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου που εξετάζουμε (εννοείται για τις τιμές των σταθερών που επιλέξαμε). Τα σχήματα αυτά παρουσιάζονται εδώ στο χαρτί. Στον υπολογιστή όμως με βάση τα σχήματα αυτά δημιουργείται άμεσα η σχετική animation (το σχετικό κινούμενο σχήμα) πάνω στην οθόνη για τις ελεύθερες ταλαντώσεις του παρόντος μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου. Την animation αυτή μπορούμε άμεσα να την «εξαγάγουμε» από τη *Mathematica* και να την κάνουμε απόλυτα ανεξάρτητη από αυτή σ' ένα αρχείο gif. Αυτό μπορεί να είναι διαθέσιμο οπουδήποτε χωρίς να έχει ανάγκη τη διαθεσιμότητα της *Mathematica*. Στην επόμενη ενότητα του notebook τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται στην περίπτωση υπέρξεως και αποσβέσεως με λόγο αποσβέσεως $\xi = 0.2$ ξανά για $\omega_0 = 1$. Τώρα όμως με την απόσβεση των ταλαντώσεων το φαινόμενο δεν είναι πια περιοδικό, αλλά σβήνει λίγο-λίγο με το χρόνο. Το ενδιαφέρον πάντως είναι ότι και στις δύο περιπτώσεις ταλαντώσεων (τόσο χωρίς απόσβεση όσο και με απόσβεση) έχουμε μια πλήρη εικόνα του συστήματος μάζας-ελατηρίου παρόμοια με το πραγματικό μηχανικό σύστημα σε κίνηση (το κινούμενο σχήμα).

2. Notebook για Animations: Animations–BuildingVibrations: Ταλαντώσεις Μονώροφου Κτιρίου (20 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Σαν συνέχεια του προηγούμενου notebook στο notebook αυτό και πάλι μέσω της χρήσεως animations (κινήσεως σε σχήματα, κινούμενων σχημάτων) εξετάζεται το ακόμη πιο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό φαινόμενο των ταλαντώσεων ενός μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως με δύο υποστυλώματα. Κατ' αρχήν στο πρόβλημα αυτό λύνεται η διαφορική εξίσωση της συνήθους δοκού για ένα υποστυλώμα πακτωμένο στα δύο άκρα του, αλλ' επιτρέποντας κάθετες μετατοπίσεις στα άκρα αυτά και όχι με βάση την κλασική πάκτωση. Αυτό ακριβώς συμβαίνει στα υποστυλώματα του μονώροφου κτιρίου που εξετάζεται εδώ. Στη συνέχεια λύνονται οι διαφορικές εξισώσεις για τις ταλαντώσεις της πλάκας του μονώροφου κτιρίου πρώτα για ελεύθερες ταλαντώσεις και μετά και για ταλαντώσεις που οφείλονται σε ημιτονική κίνηση του εδάφους, π.χ. σε έναν υπεραπλοποιημένο σεισμό. Θεωρούνται και οι δύο περιπτώσεις υπάρξεως και μη υπάρξεως αποσβέσεως. Τέλος θεωρείται και η ειδική περίπτωση του συντονισμού, όπου η συχνότητα της παρούσας υπεραπλοποιημένης σεισμικής καταπονήσεως συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα του μονώροφου κτιρίου. Μετά το εισαγωγικό αυτό μέρος με τις επιλύσεις των διαφορικών εξισώσεων ακολουθεί το κύριο μέρος του notebook με τις animations. Σ' αυτό ανάλογα και με το προηγούμενο notebook δημιουργούνται οι σχετικές animations που δείχνουν πώς ακριβώς κινείται το παρόν μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως. (α) Πρώτα για ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση και χωρίς σεισμική φόρτιση. (β) Μετά για ταλάντωση που οφείλεται σε ημιτονική σεισμική φόρτιση (με κίνηση εδώ και του εδάφους, όχι μόνο της πλάκας του κτιρίου) και πάλι χωρίς απόσβεση. (γ) Στη συνέχεια για όμοια σεισμική φόρτιση, αλλά τώρα και με συντονισμό. (δ) Τέλος για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς σεισμική φόρτιση, αλλά με απόσβεση. Είναι προφανές ότι οι δύο πρώτες από τις animations αυτές αφορούν σε περιοδικά φαινόμενα, ενώ οι δύο τελευταίες (αυτές με συντονισμό και με απόσβεση αντίστοιχα) σε μη περιοδικά. Εδώ βέβαια όλα τα σχετικά σχήματα που παριστάνουν το μονώροφο κτίριο (έδαφος, υποστυλώματα και πλάκα) παρουσιάζονται, όπως ακριβώς και στο προηγούμενο notebook, στο χαρτί. Στον υπολογιστή όμως με βάση τα σχήματα αυτά δημιουργούνται άμεσα οι σχετικές animations (τα σχετικά κινούμενα σχήματα) πάνω στην οθόνη για τις ταλαντώσεις που αναφέραμε του παρόντος μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως. Τις animations αυτές μπορούμε (όπως και πριν) άμεσα να τις «εξαγάγουμε» από τη *Mathematica* και να τις κάνουμε απόλυτα ανεξάρτητες από αυτή σε αρχεία gif (εδώ δημιουργούμε τέσσερα σχετικά αρχεία). Αυτά μπορούν να είναι διαθέσιμα οπουδήποτε χωρίς να έχουν ανάγκη τη διαθεσιμότητα της *Mathematica*. Και στις τέσσερις περιπτώσεις που εξετάσαμε έχουμε μια πλήρη και αρκετά ακριβή εικόνα του κτιρίου που ταλαντώνεται παρόμοια με το αντίστοιχο πραγματικό κτίριο.

Η παρουσία εδώ αυτών των δύο notebooks για animations (κίνηση σε σχήματα, κινούμενα σχήματα) ελπίζεται ότι θα επιτρέψει τη χρήση των animations μέσω της *Mathematica* από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό για την προετοιμασία και **των δικών του/των δικών της** animations στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα. Οι animations προσφέρουν μια θαυμάσια δυνατότητα οπτικής κατανοήσεως ενός φαινομένου συνήθως (όχι όμως και κατ' ανάγκη) δυναμικού.

Από την άλλη πλευρά η *Mathematica* προσφέρει τη δυνατότητα εκτελέσεως των αναλυτικών και αριθμητικών υπολογισμών που απαιτούνται σε ένα πρόβλημα, αλλά και της δημιουργίας της animation για το «ζωντάνεμα» των τελικών αποτελεσμάτων. Τα παρόντα δύο notebooks για animations αποτελούν παραδείγματα της σχετικής διαδικασίας. Αυτή ξεκινάει από τους υπολογισμούς (αναλυτικούς και αριθμητικούς), προχωράει στις αναγκαίες γραφικές παραστάσεις που θα ενσωματωθούν στην animation και φθάνει τέλος στη δημιουργία του σχετικού με την animation αρχείου τύπου gif, καλύτερα animated gif. Αυτό μάλιστα το αρχείο είναι εντελώς ανεξάρτητο από τη *Mathematica* που, όπως αναφέρθηκε, δε χρειάζεται καθόλου για την εμφάνιση του αρχείου gif στην οθόνη του υπολογιστή. Η διαθεσιμότητα του λειτουργικού συστήματος, συνήθως των *Windows*, αρκεί!

■ Notebook Animations-MassSpringVibrations

ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

■ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

■ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ

Στο notebook αυτό εξετάζουμε το γνωστό μας μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς φυσικά φόρτιση ή εξωτερική δύναμη $p(t)$ και αρχικά χωρίς απόσβεση. Η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου (της μάζας m) ως προς τη θέση ισορροπίας του $u = 0$ δίνεται στη μεθεπόμενη εντολή. (Η πρώτη πιο κάτω εντολή αφορά απλά στη μη εμφάνιση ορισμένων πιθανών ορθογραφικών λαθών.)

```
In[1] := Off[General::spell1]
```

```
In[2] := MassSpringODE = u''[t] + ω0^2 u[t] == 0
```

```
Out[2] = u(t) ω0^2 + u''(t) == 0
```

με $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ τη σχετική ιδιοσυχνότητα (ή φυσική συχνότητα, εννοείται για τον Πολιτικό Μηχανικό φυσική κυκλική συχνότητα). Η γενική λύση αυτής της γραμμικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως είναι

```
In[3] := GeneralSolution = DSolve[MassSpringODE, u[t], t]
```

```
Out[3] = {{u(t) -> c1 cos(t ω0) + c2 sin(t ω0)}}
```

και η αντίστοιχη συνάρτηση είναι

```
In[4] := ug[t_] = GeneralSolution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[4] = c1 cos(t ω0) + c2 sin(t ω0)
```

όπως ήδη γνωρίζουμε και μπορούμε μάλιστα να επαληθεύσουμε

```
In[5] := verg = MassSpringODE /. u -> ug // Simplify
```

```
Out[5] = True
```

Θεωρούμε τώρα και τις αρχικές συνθήκες (initial conditions), αρχική θέση και αρχική ταχύτητα, για $t = 0$:

```
In[6] := InitialConditions = {u[0] == u0, u'[0] == v0};
```

Τώρα βρίσκουμε εύκολα τη σχετική μερική λύση (ή ειδική λύση) καθώς και την αντίστοιχη συνάρτηση

```
In[7] := PartialSolution = DSolve[{MassSpringODE, InitialConditions}, u[t], t]
```

```
Out[7] = {{u(t) -> (u0 ω0 cos(t ω0) + v0 sin(t ω0)) / ω0}}
```

```
In[8]:= up[t_] = PartialSolution[[1, 1, 2]] // Apart
```

```
Out[8]= u0 cos(t ω0) +  $\frac{v0 \sin(t \omega 0)}{\omega 0}$ 
```

που κι αυτή επαληθεύεται τόσο ως προς τη διαφορική εξίσωση όσο και ως προς τις αρχικές συνθήκες

```
In[9]:= verp = {MassSpringODE, InitialConditions} /. u → up // Simplify
```

```
Out[9]= {True, {True, True}}
```

Για τις συγκεκριμένες τιμές

```
In[10]:= values = {ω0 → 1, u0 → 0, v0 → 10};
```

η λύση μας παίρνει τώρα την ακόλουθη πάρα πολύ απλή μορφή (πρόκειται για ημιτονική συνάρτηση):

```
In[11]:= uv[t_] = up[t] /. values
```

```
Out[11]= 10 sin(t)
```

Να και η γραφική παράσταση της λύσεως αυτής $u_v(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, 7\pi]$.

```
In[12]:= Plot[uv[t], {t, 0, 7 π}, PlotStyle → Thickness[0.01], PlotRange → {-10, 10},
  AxesLabel → {"u", ""}, PlotLabel → "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ",
  DefaultFont → {"Arial-Bold", 12}, Frame → True, ImageSize → 360];
```



■ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ANIMATION (ΤΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ)

Θα προχωρήσουμε τώρα στη δημιουργία της animation (ενός σχήματος που κινείται, ενός κινούμενου σχήματος) για το ίδιο ακριβώς πρόβλημα και με τις ίδιες τιμές **values** των σταθερών. Προς το σκοπό αυτό υποθέτουμε το ελατήριο μήκους $L = 20$ (σε cm). Το αριστερό άκρο του ελατηρίου είναι φυσικά στερεωμένο, ενώ το δεξιό άκρο του είναι συνδεδεμένο με τη μάζα m . Υπό αυτές τις συνθήκες η θέση $x_v(t)$ της μάζας m ως προς την αρχή $x = 0$ του άξονα x και η μετατόπισή της $u_v(t)$ ως προς τη θέση ισορροπίας της διαφέρουν κατά το μήκος $L = 20$ του ελατηρίου. Συγκεκριμένα

```
In[13]:= L = 20; xv[t_] := L + uv[t]
```

Πρέπει τώρα να σχεδιάσουμε το ελατήριο. Αυτό το πετυχαίνουμε ξεκινώντας με την εντολή καθορισμού των γωνιακών σημείων του (των κορυφών των γωνιών του) σε λίστα

```
In[14]:= Spring1[t_] := Table[{{(2 k - 1) / 40} xv[t], 0.1 (1 + (-1)k}}, {k, 1, 20}] // Expand // N;
```

Στη συνέχεια προσθέτουμε (από αριστερά) στη λίστα αυτή το αριστερό άκρο του ελατηρίου [0, 0.1]

```
In[15]:= Spring2[t_] := Prepend[Spring1[t], {0, 0.1}]
```

και στο τέλος προσθέτουμε (από δεξιά, σαν τελευταίο στοιχείο της λίστας) και το δεξιό άκρο του ίδιου ελατηρίου ($x_v(t)$, 0.1). Τώρα βρίσκουμε εύκολα τη σχετική μερική (ή ειδική) λύση και την αντίστοιχη συνάρτηση, που μετακινείται βέβαια μαζί με τη μάζα m . Προκύπτει έτσι η τελική λίστα

```
In[16]:= Spring[t_] := Append[Spring2[t], {xv[t], 0.1}]; Spring[t] // OutputForm
```

```
Out[16]//OutputForm=
```

```
{0, 0.1}, {0.5 + 0.25 Sin[t], 0.}, {1.5 + 0.75 Sin[t], 0.2},
{2.5 + 1.25 Sin[t], 0.}, {3.5 + 1.75 Sin[t], 0.2},
{4.5 + 2.25 Sin[t], 0.}, {5.5 + 2.75 Sin[t], 0.2},
{6.5 + 3.25 Sin[t], 0.}, {7.5 + 3.75 Sin[t], 0.2},
{8.5 + 4.25 Sin[t], 0.}, {9.5 + 4.75 Sin[t], 0.2},
{10.5 + 5.25 Sin[t], 0.}, {11.5 + 5.75 Sin[t], 0.2},
{12.5 + 6.25 Sin[t], 0.}, {13.5 + 6.75 Sin[t], 0.2},
{14.5 + 7.25 Sin[t], 0.}, {15.5 + 7.75 Sin[t], 0.2},
{16.5 + 8.25 Sin[t], 0.}, {17.5 + 8.75 Sin[t], 0.2},
{18.5 + 9.25 Sin[t], 0.}, {19.5 + 9.75 Sin[t], 0.2},
{20 + 10 Sin[t], 0.1}}
```

(Μία μόνο εντολή αρκούσε. Εντούτοις χρησιμοποιήσαμε τρεις εντολές απλά για εκπαιδευτικούς λόγους.) Σχεδιάζουμε τώρα ένα πολύ μικρό ορθογώνιο για την αριστερή σταθερή στήριξη του ελατηρίου

```
In[17]:= Pin = Graphics[Rectangle[{-0.4, 0.07}, {0.4, 0.13}]];
```

και ένα μεγάλο ορθογώνιο για τη μάζα m (που κινείται βέβαια) του παρόντος μηχανικού συστήματος

```
In[18]:= Mass[t_] := Graphics[Rectangle[{xv[t], 0}, {xv[t] + 3, 0.2}]];
```

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δημιουργήσουμε την ακολουθία των σχημάτων της παρούσας animation. Για το σκοπό αυτό στο ίδιο σχήμα θέτουμε το μικρό ορθογώνιο **Pin** της αριστερής στηρίξεως του ελατηρίου, τη μάζα **Mass[t]** και το ίδιο το ελατήριο **Spring[t]**. Όλο αυτό το σχήμα θα το δημιουργήσουμε με τη χρήση της εντολής **Table** και μάλιστα 16 φορές στο χρονικό διάστημα [0, 2π] ανά π/8. Θα παραλείψουμε βέβαια το τελευταίο σχήμα (για $t = 2π$), επειδή αυτό συμπίπτει με το πρώτο σχήμα (για $t = 0$) και επομένως όχι μόνο θα είναι άχρηστο, αλλά και βλαβερό στην animation την οποία φτειαίνουμε. Δημιουργούμε έτσι μια ακολουθία σχημάτων **VibrationWithoutDampingImages**. Αυτό το πετυχαίνουμε με τρεις εντολές. Η πρώτη εντολή αφορά στο σχήμα που φτειαίνουμε μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t και είναι σε μορφή συναρτήσεως του χρόνου t . Έτσι θα μπορούμε να την καλούμε όποια χρονική στιγμή t εμείς θέλουμε.

```
In[19]:= image[t_] := Show[Pin, Mass[t], ListPlot[Spring[t], PlotJoined → True,
PlotStyle → {Thickness[0.012], Hue[0]}, DisplayFunction → Identity],
AspectRatio → 0.15, PlotRange → {{0, 35}, {-0.1, 0.35}}, Axes → True,
AxesLabel → {"x", ""}, Ticks → {{0, 10, 20, 30}, {-0.1, 0.1, 0.3}},
DefaultFont → {"Arial-Bold", 14}, Background → Hue[0.15],
ImageSize → 560, PlotLabel → label]
```

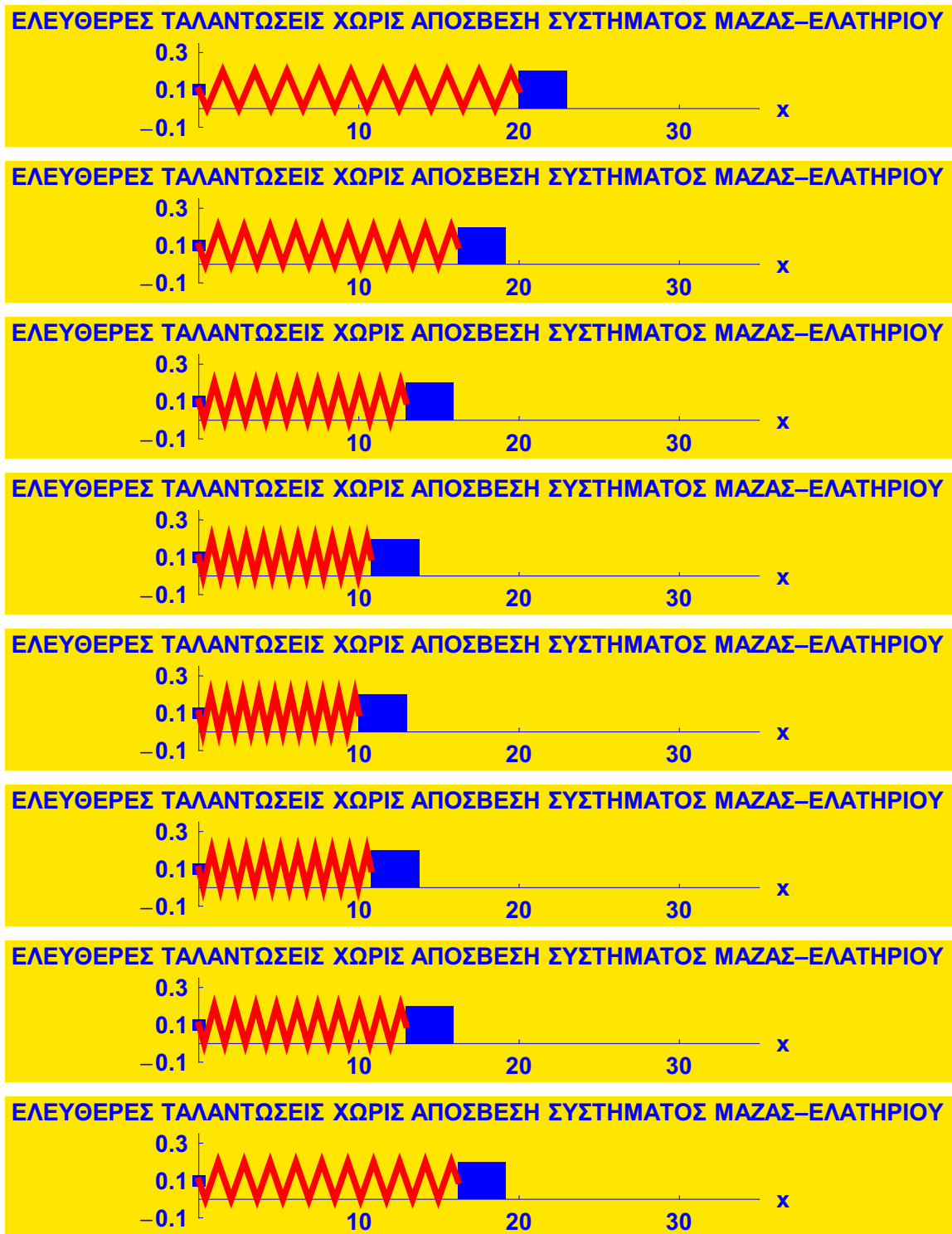
Η δεύτερη εντολή αφορά στον τίτλο της γραφικής παραστάσεως (για κάθε χρονική στιγμή t):

```
In[20]:= label = "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ";
```

Τέλος η τρίτη εντολή δημιουργεί την ακολουθία των σχημάτων τα οποία θέλουμε στην animation που φτειαχνουμε με την εντολή **Table** και με επανειλημμένες κλήσεις σ' αυτήν (ανά χρονικά διαστήματα $\pi/8$) της συναρτήσεως **image[t]** που ήδη ορίσαμε. (Παρενθετικά σημειώνουμε ότι οι τρεις πιο πάνω εντολές θα μπορούσαν εύκολα να είχαν συνδυασθεί σε μία μόνο εντολή. Αυτό όμως δε μας εξυπηρετεί εδώ.)

```
In[21]:= VibrationWithoutDampingImages = Table[image[t], {t, 0, 2 π - π / 8, π / 8}];
```





```
In[22] := Length[VibrationWithoutDampingImages]
```

```
Out[22]= 16
```

(Δηλαδή έχουμε 16 συνολικά σχήματα.) Τώρα για να δούμε στ' αλήθεια την animation μας, θα πρέπει να "σημαδέσουμε" όλα αυτά τα σχήματα με πάτημα του ποντικιού δεξιά σε μία από τις δύο σχετικές κατακόρυφες μπλε γραμμές που περιέχουν τα σχήματα αυτά (και κανένα άλλο σχήμα!), ώστε να μαυρίσουν. Στη συνέχεια πατάμε **Ctrl Y** (από το πληκτρολόγιο) ή εναλλακτικά **Cell → Animate Selected Graphics**

(από τις επιλογές, τα menus). Έτσι παρατηρούμε την κίνηση του μηχανικού συστήματός μας υλικού σημείου-ελατηρίου στις παρούσες χωρίς απόσβεση ελεύθερες ταλαντώσεις του σαν μια πολύ μικρή ταινία.

Το τελικό βήμα μας είναι βέβαια η δημιουργία και του σχετικού αρχείου **gif** ή **GIF** (αρχικά των λέξεων της φράσεως Graphics Interchange File). Αυτή επιτυγχάνεται, όπως ξέρουμε, με την εντολή **Export** ως εξής:

```
In[23] := Export["D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithoutDamping.gif",
  VibrationWithoutDampingImages, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[23] = D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithoutDamping.gif
```

Το όνομα του αρχείου είναι αυθαίρετο, αρκεί να τελειώνει σε **gif**. Το ίδιο και το directory αποθηκεύσεώς του, αρκεί να υπάρχει και να μας διευκολύνει στη δουλειά μας, εδώ με τις animations. Τα σχήματά μας είναι εδώ τα σχήματα **VibrationWithoutDampingImages**, τα οποία μόλις δημιουργήσαμε. Το σημαντικό όμως είναι να μη λησμονήσουμε την επιλογή **ConversionOptions -> {Loop -> True}** στο τέλος της εντολής **Export**. Τώρα, κάθε φορά που επιθυμούμε, πατώντας το ποντίκι πάνω στο αρχείο **gif** που δημιουργήσαμε, δηλαδή στο αρχείο **MassSpringVibrationWithoutDamping.gif**, παρατηρούμε το σχετικό κινούμενο σχήμα, την animation για τις ιδιοταλαντώσεις του μηχανικού συστήματός μας υλικού σημείου-ελατηρίου ή μάζας-ελατηρίου (χωρίς απόσβεση) χωρίς να έχουμε ανοίξει τη *Mathematica*. Πρόκειται για μια απόλυτα αυτοδύναμη animation. Δε χρειάζεται τη *Mathematica*. Μπορούμε να τη στείλουμε και σε τρίτους που δεν έχουν καθόλου *Mathematica*, για να τη δούν στον υπολογιστή τους, ή πιο απλά να τη βάλουμε στο διαδίκτυο, π.χ. στην ιστοσελίδα του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.

■ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

■ Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ

Συνεχίζουμε να εξετάζουμε το γνωστό μας μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας m) και ελατηρίου (σταθεράς k) σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς φυσικά φόρτιση ή εξωτερική δύναμη $p(t)$, αλλά τώρα με απόσβεση των ταλαντώσεων, παρόλο που δε θα δείξουμε στα σχήματα της animation τον αποσβεστήρα. Η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου (της μάζας m) ως προς τη θέση ισορροπίας του $u = 0$ δίνεται στην επόμενη εντολή:

```
In[24] := MassSpringODE = u''[t] + 2 ξ ω0 u'[t] + ω0^2 u[t] == 0 /. {ξ -> 0.2, ω0 -> 1}
```

```
Out[24] = u(t) + 0.4 u'(t) + u''(t) == 0
```

με $\xi = 0.2$ το σχετικό λόγο αποσβέσεως και $\omega_0 = 1$ τη σχετική ιδιοσυχνότητα. Θεωρούμε τώρα και τις ίδιες αρχικές συνθήκες **InitialConditions** όπως και πριν. Τώρα βρίσκουμε και πάλι εύκολα τη σχετική μερική λύση (ή ειδική λύση) και την αντίστοιχη συνάρτηση

```
In[25] := PartialSolution = DSolve[{MassSpringODE, InitialConditions}, u[t], t] // Simplify
```

```
Out[25] = {{u(t) -> e^{-0.2t} (1. u0 cos(0.979796 t) + (0.204124 u0 + 1.02062 v0) sin(0.979796 t))}}
```

```
In[26] := up[t_] = PartialSolution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[26] = e^{-0.2t} (1. u0 cos(0.979796 t) + (0.204124 u0 + 1.02062 v0) sin(0.979796 t))
```

Για τις συγκεκριμένες τιμές **values** που ήδη ορίσαμε η λύση μας παίρνει τώρα μια αρκετά απλή μορφή, όπου όμως βέβαια συνεχίζει να υπεισέρχεται και ο λόγος αποσβέσεως $\xi = 0.2$


```
In[27]:= uv[t_] = up[t] /. values
```

```
Out[27]= 10.2062 e-0.2t sin(0.979796 t)
```

Να και η γραφική παράσταση της λύσεως αυτής $u_v(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, 7\pi]$:

```
In[28]:= Plot[uv[t], {t, 0, 7 π}, PlotStyle → Thickness[0.01], PlotRange → {-10, 10},
  AxesLabel → {"u", ""}, PlotLabel → "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ",
  DefaultFont → {"Arial-Bold", 12}, Frame → True, ImageSize → 360];
```



Παρατηρούμε ότι η παρούσα γραφική παράσταση για ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση (με $\xi = 0.2$), διαφέρει έντονα από την αντίστοιχη προηγούμενη γραφική παράσταση για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (με $\xi = 0$) στο κατά τα άλλα ίδιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (ή μάζας)–ελατηρίου.

■ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ANIMATION (ΤΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ)

Θα προχωρήσουμε τώρα στη δημιουργία της animation ακριβώς όπως και πριν. Προς το σκοπό αυτό υποθέτουμε το ελατήριο το ίδιο όπως προηγουμένως και έχουμε ήδη διαθέσιμη τη σχετική συνάρτηση **Spring[t]**. Έχουμε επίσης διαθέσιμα το μικρό ορθογώνιο **Pin** για τη στήριξη στο αριστερό άκρο του ελατηρίου και τη μάζα **Mass[t]** για το υλικό σημείο (τη μάζα) στο δεξιό άκρο του ελατηρίου. (Εδώ αμελούμε τη σχεδίαση του αποσβεστήρα.) Δημιουργούμε τη λίστα των σχημάτων της animation με τις δύο εντολές

```
In[29]:= label = "ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ";
```

```
In[30]:= VibrationWithDampingImages = Table[image[t], {t, 0, 15, 1.2}];
```





```
In[31]:= atn = Show[Graphics[Text["ΞΑΝΑΡΧΙΖΕΙ Η ANIMATION", {0, 0}], DefaultColor -> Hue[0.4],
  DefaultFont -> {"Arial-Bold", 35}, AspectRatio -> 0.1, ImageSize -> 500]];
```

ΞΑΝΑΡΧΙΖΕΙ Η ANIMATION

(Στην έντυπη και στην PDF μορφή του notebook παραλείφθηκαν τα 6 τελευταία σχήματα πάνω από την προειδοποίηση.) Παρατηρούμε ότι η ταλάντωση τείνει να αποσβεσθεί στα δύο τελευταία σχήματα. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του λόγου αποσβέσεως $\xi = 0.2$. Σημειώνουμε επίσης ότι έχουμε 13 συνολικά σχήματα:

```
In[32]:= Length[VibrationWithDampingImages]
```

```
Out[32]= 13
```

Όπως και πριν, για να δούμε τώρα στ' αλήθεια την animation μας, θα πρέπει να "σημαδέσουμε" όλα αυτά τα σχήματα πατώντας το ποντίκι δεξιά σε μία από τις δύο σχετικές κατακόρυφες μπλε γραμμές που περιέχουν τα σχήματα αυτά (και κανένα άλλο σχήμα!), ώστε να μαυρίσουν. Στη συνέχεια πατάμε **Ctrl Y** ή εναλλακτικά **Cell -> Animate Selected Graphics**. Έτσι παρατηρούμε την κίνηση του μηχανικού συστήματός μας στις παρούσες ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση. Τελικά δημιουργούμε και το σχετικό αρχείο **gif**, πάλι ακριβώς όπως και πριν με τη χρήση της εντολής **Export**. Αυτό είναι χρήσιμο και μόνο του!

```
In[33]:= Export["D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithDamping.gif",
  {VibrationWithDampingImages, atn}, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[33]= D:\cemb\animations\MassSpringVibrationWithDamping.gif
```

■ Notebook Animations-BuildingVibrations

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΟΝΩΡΟΦΟΥ ΚΤΙΡΙΟΥ

■ ΤΟ ΒΕΛΟΣ ΚΑΜΨΕΩΣ ΤΩΝ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις (χωρίς καμία εξωτερική φόρτιση) μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως. Η πλάκα του κτιρίου υποτίθεται ότι είναι απαραμόρφωτη (δηλαδή έχει άπειρη δυσκαμψία D), ενώ τα δύο υποστυλώματα παραμορφώσιμα με δυσκαμψία EI . Η συνολική μάζα m της πλάκας θεωρείται συγκεντρωμένη στο κέντρο βάρους της. Τα υποστυλώματα που είναι ύψους h τα υποθέτουμε προσεγγιστικά χωρίς βάρος, αβαρή. Επομένως δεχόμαστε την ισχύ της σχετικής στατικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης με συνοριακές συνθήκες πακτώσεως τόσο στο κάτω άκρο τους $y = 0$ όσο στο πάνω άκρο τους $y = h$. Χάρη γενικότητας (πρακτικά για να μπορούν να συμπεριληφθούν και σεισμικές μετατοπίσεις του εδάφους), δεχόμαστε ότι στην πάκτωση στο κάτω άκρο $y = 0$ (στο έδαφος) η οριζόντια μετατόπιση είναι v_0 . Από την άλλη πλευρά σε κάθε περίπτωση (και χωρίς σεισμό) υπάρχει στις ταλαντώσεις του μονώροφου αυτού κτιρίου και μια οριζόντια μετατόπιση στο πάνω άκρο των δύο υποστυλωμάτων $y = h$ (στο ύψος της πλάκας) που είναι v_1 . Άρα οι πέντε εξισώσεις του προβλήματος για το κάθε υποστυλώμα (μία συνήθης διαφορική εξίσωση και τέσσερις συνοριακές συνθήκες) θα είναι οι εξής:

```
In[1] := ColumnEquations = {EI v''''[y] == 0, v[0] == v0, v'[0] == 0, v[h] == v1, v'[h] == 0};
```

Τις λύνουμε πάρα πολύ εύκολα με τη χρήση της εντολής **DSolve** για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων:

```
In[2] := solution = DSolve[ColumnEquations, v[y], y] // FullSimplify
```

```
Out[2] = {{v(y) -> (2(v0 - v1)y^3 / h^3 - 3(v0 - v1)y^2 / h^2 + v0)}}
```

και βρίσκουμε το βέλος κάμψεως $v_s(y)$ του κάθε υποστυλώματος, που εδώ βέβαια είναι οριζόντιο, αφού τα δύο υποστυλώματα που στηρίζουν την πλάκα στο μονώροφο κτίριο που εξετάζουμε είναι κατακόρυφα:

```
In[3] := vs[y_] = solution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[3] = (2(v0 - v1)y^3 / h^3 - 3(v0 - v1)y^2 / h^2 + v0)
```

Άμεση είναι η επαλήθευση και των πέντε εξισώσεών μας που ισχύουν για το κάθε υποστυλώμα:

```
In[4] := ColumnEquationsVerification = ColumnEquations /. v -> vs
```

```
Out[4] = {True, True, True, True, True}
```

Την παραπάνω λύση $v_s(y)$ θα τη χρησιμοποιήσουμε πρώτα σε ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς κίνηση του εδάφους. Τότε η μετατόπιση v_0 του εδάφους θα είναι μηδενική και η λύση αυτή θα πάρει την απλή μορφή

```
In[5] := vsf[y_] = vs[y] /. v0 -> 0 // Simplify
```

```
Out[5] = (v1(3h - 2y)y^2 / h^3)
```

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε και την περίπτωση κίνησης του εδάφους λόγω σεισμού. Τότε βέβαια $v_0 \neq 0$.

■ ΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΤΟΥ ΚΤΙΡΙΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σύντομα στις ήδη αρκετά γνωστές μας ταλαντώσεις ενός μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος, εδώ του μονώροφου ιδεατού κτιρίου μας με κυκλική συχνότητα ω_0 . Με τις υποθέσεις που γίνονται για ιδεατό κτίριο και ειδικότερα την υπόθεση της απαραμόρφωτης πλάκας του κτιρίου πρόκειται ασφαλώς για ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα και μάλιστα μαθηματικά απόλυτα ανάλογο με το κλασικό μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα. Βέβαια από φυσικής απόψεως το μονώροφο κτίριο είναι ένα εντελώς διαφορετικό μηχανικό σύστημα. Δηλώνουμε με $u(t)$ την οριζόντια μετατόπιση της πλάκας (άρα και των επάνω πακτώσεων των υποστυλωμάτων: των πακτώσεων τους στην πλάκα) στις ελεύθερες ταλαντώσεις της πλάκας (που περιλαμβάνουν ασφαλώς και τις ιδιοταλαντώσεις σαν μια ειδική περίπτωση). Εδώ χωρίς απόσβεση (με $c = 0$) η σχετική διαφορική εξίσωση είναι η εξής:

```
In[6] := FreeVibrationsODE = u''[t] + ω0^2 u[t] == 0;
```

Η γενική λύση της προσδιορίζεται εύκολα ξανά με την εντολή **DSolve** για διαφορικές εξισώσεις:

```
In[7] := solution = DSolve[FreeVibrationsODE, u[t], t]
```

```
Out[7] = {{u(t) -> c1 cos(t ω0) + c2 sin(t ω0)}}
```

Η αντίστοιχη συνάρτηση (γενική λύση) $u_f(t)$ προσδιορίζεται τώρα κι αυτή εύκολα ως εξής:

```
In[8] := uf[t_] = solution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[8] = c1 cos(t ω0) + c2 sin(t ω0)
```

και περιλαμβάνει βέβαια δύο σταθερές. Μια μερική (ή ειδική) λύση (για συγκεκριμένες τιμές αυτών των σταθερών) είναι η ακόλουθη:

```
In[9] := ufp[t_] = uf[t] /. {c[1] -> 1, c[2] -> 0}
```

```
Out[9] = cos(t ω0)
```

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί φυσικά τη λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης με αρχικές συνθήκες τις

```
In[10] := InitialConditions = {u[0] == 1, u'[0] == 0};
```

Δηλαδή, ακριβώς όπως και πριν, έχουμε

```
In[11] := ufp[t_] = DSolve[{FreeVibrationsODE, InitialConditions}, u[t], t][[1, 1, 2]]
```

```
Out[11] = cos(t ω0)
```

Ας αναφερθούμε τώρα λιγάκι και στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις που οφείλονται σε σεισμό και τη σχετική φόρτιση της κατασκευής μας: εδώ μονώροφου κτιρίου. Στην περίπτωση αυτή το ίδιο το έδαφος (ground) υφίσταται και αυτό εξαιτίας του σεισμού οριζόντια μετατόπιση $u_g(t)$. (Δεν κινείται εδώ μόνο η πλάκα: κινείται και το ίδιο το έδαφος!) Από φυσικής απόψεως με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι σαφές ότι ο αδρανειακός όρος $-m u''(t)$ στη διαφορική εξίσωση των ταλαντώσεων την οποία καταστρώνουμε θα έχει στον όρο της μάζας ολόκληρη τη μετατόπιση $u_i(t)$ της πλάκας του μονώροφου κτιρίου. Πολύ συχνά διευκολύνει τον Πολιτικό Μηχανικό (αν και δεν είναι αναγκαίο) να γράφει τη συνολική (ή απόλυτη) αυτή μετατόπιση (total displacement) $u_i(t)$ σαν το άθροισμα της απόλυτης μετατοπίσεως $u_g(t)$ του εδάφους (ground) συν τη σχετική μετατόπιση (relative displacement) $u_r(t)$ της πλάκας του

μονώροφου κτιρίου ως προς το έδαφος. Σωστά ως εδώ! Επομένως έχουμε: ολική μετατόπιση της πλάκας = μετατόπιση του εδάφους συν σχετική μετατόπιση της πλάκας ως προς το έδαφος και μαθηματικά:

```
In[12] := ut[t_] = ug[t] + ur[t];
```

Από την άλλη πλευρά πάλι από φυσικής απόψεως τόσο ο όρος αποσβέσεως όσο και ο όρος ελατηρίου στα υποστυλώματα θα σχετίζονται με τη σχετική μετατόπιση της πλάκας ως προς το έδαφος, καλύτερα των πάνω πακτώσεων των υποστυλωμάτων (στην πλάκα) ως προς τις κάτω πακτώσεις τους (στο έδαφος). Είναι προφανές αυτό. (Υποθέτουμε εδώ την ύπαρξη και όρου αποσβέσεως με συντελεστή c .) Άρα η γνωστή μας διαφορική εξίσωση των ταλαντώσεων (εδώ χωρίς εξωτερική φόρτιση πέρα από το σεισμικό φαινόμενο, εναλλακτικά την κίνηση του εδάφους λόγω εκρήξεως ή βαρέων οχημάτων) θα έχει τη μορφή

```
In[13] := EarthquakeVibrationsODE1 = -m ut''[t] - c ur'[t] - k ur[t] == 0 // Simplify
```

```
Out[13] = k ur(t) + c ur'(t) + m (ug''(t) + ur''(t)) == 0
```

όπου με τα πρόσσημα πλην ($-$) τονίσαμε (υπερβολικά ίσως και συνήθως δε βάζει πλην ο Πολιτικός Μηχανικός) πως η διαφορική αυτή εξίσωση είναι μια εξίσωση ισορροπίας: αδρανειακή δύναμη της πλάκας (με μάζα m) συν δύναμη αποσβέσεως (με συντελεστή c) συν ελαστική δύναμη ελατηρίου (με συντελεστή k) ίσον με το μηδέν. Αυτό ισχύει με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Θα μπορούσαμε βέβαια να είχαμε την αδρανειακή δύναμη δεξιά και χωρίς το μείον ακριβώς σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Καλύτερα όμως και τις τρεις μαζί δυνάμεις αριστερά: κι η αδρανειακή δύναμη μαζί! Μοιάζει έτσι με συνηθισμένη στατική ισορροπία τριών δυνάμεων, ενώ το φαινόμενο είναι καθαρά δυναμικό. Παρατηρούμε μάλιστα ότι η *Mathematica* μας απάλλαξε μόνη της από τα μείον. Ευτυχώς!

Υποθέτουμε τώρα την ακόλουθη πάρα πολύ απλή τριγωνομετρική έκφραση της κινήσεως του εδάφους εξαιτίας του σεισμού (με μία μόνο σεισμική συχνότητα ω):

```
In[14] := ug[t_] = u0 Sin[ω t];
```

Είναι πολύ απλή με κυκλική συχνότητα ω . Δεν πειράζει όμως. (Εννοείται ότι την κυκλική συχνότητα ω την υποθέτουμε καταρχήν διαφορετική από την ιδιοσυχνότητα ω_0 του κτιρίου. Αλλιώς θα είχαμε συντονισμό. Για το συντονισμό θα μιλήσουμε παρακάτω.) Τώρα η διαφορική μας εξίσωση παίρνει τη μορφή

```
In[15] := EarthquakeVibrationsODE2 =
EarthquakeVibrationsODE1 /. {k -> m ω0^2, c -> 2 ξ ω0 m} // Simplify
```

```
Out[15] = m(-u0 sin(t ω) ω^2 + ω0^2 ur(t) + 2 ξ ω0 ur'(t) + ur''(t)) == 0
```

Αυτή είναι πια μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση εξαιτίας του όρου $u_g(t)$ της κινήσεως του εδάφους, για την ακρίβεια με τη δεύτερη παράγωγο του αριστερά: με τη σεισμική επιτάχυνση, όπως την καταγράφει ένα επιταχυνσιόμετρο, επί τη μάζα m . Η κίνηση του εδάφους (που θεωρείται οριζόντια) είναι γνωστή. Άγνωστη συνάρτηση είναι η σχετική μετατόπιση $u_r(t)$ της πλάκας του μονώροφου κτιρίου ως προς το έδαφος. Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως είναι πανεύκολη με την εντολή **DSolve**

```
In[16] := ue1[t_] = DSolve[EarthquakeVibrationsODE2, ur[t], t][[1, 1, 2]] // Simplify
```

```
Out[16] = 
$$\frac{u_0 ((\omega_0^2 - \omega^2) \sin(t \omega) - 2 \xi \omega \omega_0 \cos(t \omega)) \omega^2}{\omega^4 + 2 (2 \xi^2 - 1) \omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4} + e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0} c_1 + e^{t(\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi) \omega_0} c_2$$

```

και οι σταθερές μπορούν να προκύψουν από τις δύο αρχικές συνθήκες: αρχική μετατόπιση και ταχύτητα της πλάκας ως προς το έδαφος. (Σε σεισμούς και οι δυο τους είναι συνήθως μηδενικές.) Περιοριζόμαστε τώρα στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση χωρίς απόσβεση. Χρησιμοποιούμε επίσης τόσο την (κυκλική) ιδιοσυχνότητα ω_0 του κτιρίου (μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως: μία ιδιοσυχνότητα), η οποία δεν έχει

καμία σχέση με το σεισμό, όσο και τη συχνότητα ω του σεισμού στον υπεραπλοποιημένο αυτό σεισμό. Τότε η παραπάνω διαφορική μας εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή

```
In[17]:= EarthquakeVibrationsODE3 = EarthquakeVibrationsODE1 /. {k -> m ω0^2, c -> 0}
```

```
Out[17]= m ur(t) ω0^2 + m(ur''(t) - u0 ω^2 sin(t ω)) == 0
```

με γενική λύση της τη συνάρτηση (εδώ σε πλήρως απλοποιημένη μορφή)

```
In[18]:= ue2[t_] = DSolve[EarthquakeVibrationsODE3, ur[t], t][[1, 1, 2]] // FullSimplify
```

```
Out[18]=  $\frac{u0 \sin(t \omega) \omega^2}{\omega0^2 - \omega^2} + c1 \cos(t \omega0) + c2 \sin(t \omega0)$ 
```

Καλύτερα είναι όμως να υιοθετήσουμε εδώ μηδενικές αρχικές συνθήκες:

```
In[19]:= InitialConditions3 = {ur[0] == 0, ur'[0] == 0};
```

Τότε προκύπτει η εξής μερική (ή ειδική) λύση, καλύτερα λύση του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών:

```
In[20]:= ue[t_] = DSolve[{EarthquakeVibrationsODE3, InitialConditions3}, ur[t], t][[1, 1, 2]] // Simplify
```

```
Out[20]=  $\frac{u0 \omega^2 \omega0 \sin(t \omega) - u0 \omega^3 \sin(t \omega0)}{\omega0^3 - \omega^2 \omega0}$ 
```

Υπενθυμίζουμε ότι υποθέσαμε πως $\omega \neq \omega_0$. Και η *Mathematica* το ίδιο έχει υποθέσει μόνη της, χωρίς καν να της το πούμε. Έτσι είναι τα περισσότερα συστήματα (προγράμματα) συμβολικών υπολογισμών (computer algebra systems), όχι όμως όλα. Έχουν προγραμματισθεί να κάνουν ορισμένες λογικές υποθέσεις, ακριβώς όπως κάνει και ο χρήστης τους. Προχωράμε τώρα στις animations: πρώτα χωρίς σεισμό, έπειτα με σεισμό αλλά χωρίς συντονισμό, μετά και με σεισμό και με συντονισμό και στο τέλος χωρίς σεισμό, αλλά με απόσβεση των ταλαντώσεων του κτιρίου: συνολικά τέσσερις animations (κινούμενα σχήματα).

Αναφερόμαστε σύντομα στο απευκταίο και πολύ επικίνδυνο φαινόμενο του συντονισμού (resonance), δηλαδή εδώ στο φαινόμενο όπου η συχνότητα ω του πολύ απλού σεισμού που υποθέσαμε συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του μονώροφου κτιρίου: $\omega = \omega_0$. Τότε δυστυχώς οι ταλαντώσεις του κτιρίου μας θα έχουν ολοένα και μεγαλύτερο εύρος και θα οδηγήσουν τελικά στην καταστροφή του. Η σχετική συνάρτηση προκύπτει από την επίλυση του ίδιου προβλήματος αρχικών τιμών (διαφορική εξίσωση και αρχικές συνθήκες) ακριβώς όπως και πριν. Απλά τώρα προκύπτει η εξής μερική (ή ειδική) λύση ή καλύτερα λύση του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών στην περίπτωση του συντονισμού (resonance):

```
In[21]:= ures[t_] =
  DSolve[{EarthquakeVibrationsODE3 /. ω -> ω0, InitialConditions3}, ur[t], t][[1,
    1, 2]] // Simplify
```

```
Out[21]=  $\frac{1}{2} (u0 \sin(t \omega0) - t u0 \omega0 \cos(t \omega0))$ 
```

Παρατηρείται ότι ο παράγοντας t στο συνημιτονικό όρο είναι αυτός που είναι υπεύθυνος για το συντονισμό. Δηλαδή σ' αυτόν οφείλεται η συνεχής γραμμική αύξηση του εύρους των ταλαντώσεων. Ασφαλώς αυτή η συνάρτηση-λύση επαληθεύει τις μηδενικές αρχικές συνθήκες, ακριβώς όπως συνέβαινε και πριν:

```
In[22]:= {{ures[0] == 0, ures'[0] == 0}, InitialConditions3 /. ur -> ures}
```

```
Out[22]=  $\begin{pmatrix} \text{True} & \text{True} \\ \text{True} & \text{True} \end{pmatrix}$ 
```

■ ANIMATION ΓΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Θα προχωρήσουμε τώρα στην animation (κινούμενο σχήμα) στο παρόν πρόβλημα μονώροφου ιδεατού κτιρίου σε ιδιοταλαντώσεις, καλύτερα ίσως εδώ ελεύθερες ταλαντώσεις. Θεωρούμε πρώτα το έδαφος ακίνητο, επομένως $v_0 = 0$, και δίνουμε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στις ποσότητες h (το ύψος των υποστυλωμάτων) και v_1 (την οριζόντια μετατόπιση της πλάκας), αλλά και στην κυκλική συχνότητα των ιδιοταλαντώσεων $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (με k τη συνολική δυσκαμψία και των δύο υποστυλωμάτων). Επισημαίνουμε ότι η οριζόντια μετατόπιση v_1 της πλάκας (και των δύο υποστυλωμάτων στα επάνω άκρα τους) είναι αυτή που προκαλεί τις ταλαντώσεις του κτιρίου. Δεν υπάρχει εδώ ούτε σεισμός που να προκαλέσει σεισμική φόρτιση (αυτός θα εξετασθεί παρακάτω) ούτε κάποια άλλη φόρτιση. Το ύψος του κτιρίου είναι h και το πλάτος του είναι d . Τις τιμές που προαναφέραμε τις δίνουμε στη μορφή κανόνων αντικαταστάσεως **subs1**, ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να τις αλλάζουμε εύκολα, αν χρειασθεί:

```
In[23] := subs1 = {h → 1, d → 1, v0 → 0, v1 → 0.2, ω0 → 1};
```

Τώρα το βέλος κάμψεως $v(y)$ (με $0 \leq y \leq h$) των δύο υποστυλωμάτων του μονώροφου κτιρίου παίρνει την καθαρά αριθμητική μορφή

```
In[24] := us[y_] = vs[y] /. subs1
```

```
Out[24] = 0.6 y2 - 0.4 y3
```

Αναφέρουμε πρώτα δύο σημεία της επιφάνειας του εδάφους που να περιλαμβάνουν ανάμεσά τους τις πακτώσεις των υποστυλωμάτων στα σημεία $x = 0$ και $x = d$ και γενικά τη στήριξη του κτιρίου:

```
In[25] := values0 = {{-0.2, 0}, {d + 0.2, 0}} /. subs1;
```

Με γνωστό το βέλος κάμψεως $u_s(y)$ των υποστυλωμάτων κατά το ύψος τους y δημιουργούμε εύκολα την ελαστική γραμμή τους σε ιδιοταλαντώσεις και σε ελεύθερες ταλαντώσεις γενικότερα (εδώ σε μορφή λίστας με 101 σημεία) τη χρονική στιγμή t πρώτα του αριστερού υποστυλώματος (με την πάκτωση στο σημείο $x = 0$). Για χρονική συνάρτηση παίρνουμε τη συνάρτηση

```
In[26] := ufp[t]
```

```
Out[26] = cos(t ω0)
```

που είχαμε βρει προηγουμένως. Υπολογίζουμε τώρα για τις πιο πάνω αριθμητικές τιμές **subs1** τα σημεία του αριστερού υποστυλώματος, όπως διαμορφώνονται με τη μορφή της ελαστικής γραμμής του $u_s(y)$ (που ήδη προσδιορίσθηκε) και της πιο πάνω χρονικής συναρτήσεως $u_{fp}(t)$ (για τις αρχικές συνθήκες):

```
In[27] := values1[t_] = Table[{us[y] ufp[t] /. subs1, y}, {y, 0, 1, 0.01}];
```

Έχουμε λοιπόν το αριστερό υποστυλώμα και μάλιστα σαν συνάρτηση του χρόνου t . Αυτό θα μας φανεί πολύ χρήσιμο παρακάτω στην animation. Ανάλογα υπολογίζουμε και τα σημεία του δεξιού υποστυλώματος (ξανά λίστα με 101 σημεία). Αυτό είναι ολόιδιο με το αριστερό, απλά είναι μετατοπισμένο προς τα δεξιά κατά το πλάτος d του κτιρίου:

```
In[28] := values2[t_] = Table[{d + us[y] ufp[t] /. subs1, y}, {y, 0, 1, 0.01}];
```

Τέλος δημιουργούμε τη λίστα των δύο σημείων πακτώσεως των υποστυλωμάτων στην απαραμόρφωτη πλάκα του μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατήσεως που μελετάμε εδώ σε ελεύθερες ταλαντώσεις:

```
In[29]:= values3[t_] = {values1[t][[101], values2[t][[101]]}
```

```
Out[29]=  $\begin{pmatrix} 0.2 \cos(t) & 1. \\ 0.2 \cos(t) + 1 & 1. \end{pmatrix}$ 
```

Σχεδιάζουμε τώρα και τις τέσσερις πιο πάνω λίστες σαν λίστες σημείων, αλλά ενωμένων το ένα με το άλλο με τη χρήση της εντολής **ListPlot** και της επιλογής της **PlotJoined** \rightarrow **True**. Δεν τις εμφανίζουμε όμως. Απλά τις δηλώνουμε και μάλιστα σαν συναρτήσεις του χρόνου t (εκτός βέβαια από την πρώτη):

```
In[30]:= LP0 = ListPlot[values0, PlotJoined  $\rightarrow$  True,
  PlotStyle  $\rightarrow$  {Thickness[0.03], Hue[0.3]}, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
```

```
In[31]:= LP1[t_] = ListPlot[values1[t], PlotJoined  $\rightarrow$  True,
  PlotStyle  $\rightarrow$  {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
```

```
In[32]:= LP2[t_] = ListPlot[values2[t], PlotJoined  $\rightarrow$  True,
  PlotStyle  $\rightarrow$  {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
```

```
In[33]:= LP3[t_] = ListPlot[values3[t], PlotJoined  $\rightarrow$  True,
  PlotStyle  $\rightarrow$  {Thickness[0.05], Hue[0.7]}, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
```

Τώρα έχουμε πλέον τη δυνατότητα να ενώσουμε τις τέσσερις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις και να δημιουργήσουμε την εικόνα του κτιρίου μας κάθε χρονική στιγμή t . Επιλέγουμε σαν χρονικό διάστημα όπου θα παρουσιάσουμε την animation το διάστημα $[0, 2\pi]$ μιας περιόδου $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$ με εικόνες ανά $\pi/8$. Δημιουργούμε έτσι μια λίστα από 16 εικόνες του κτιρίου μας. Αυτές οι εικόνες εξαιτίας της περιόδου T επαναλαμβάνονται χρονικά. Για να δούμε τώρα και τα σχήματα που προέκυψαν:

```
In[34]:= BuildingImagesWithoutDamping =
  Table[Show[{LP0, LP1[t], LP2[t], LP3[t]}, PlotRange  $\rightarrow$  {{-0.3, 1.3}, {0., 1.1}},
    PlotLabel  $\rightarrow$  "ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ", DefaultFont  $\rightarrow$ 
      {"Arial-Bold", 11}, AspectRatio  $\rightarrow$  0.5, AxesOrigin  $\rightarrow$  {-0.25, 0}, ImageSize  $\rightarrow$  400,
    Ticks  $\rightarrow$  {{-0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2}, {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0}},
    DisplayFunction  $\rightarrow$  $DisplayFunction], {t, 0, 2\pi - \pi/8, \pi/8}];
```

Πήραμε συνολικά δεκαέξι σχήματα για το μονώροφο κτίριο σε ελεύθερη ταλάντωση, που για οικονομία χώρου δεν τα δείχνουμε εδώ ένα προς ένα, αν και παρουσιάζονται στην οθόνη. (Στο notebook, στη μορφή PDF καθώς και στην τυπωμένη μορφή του notebook τα σβήσαμε. Εντούτοις παρακάτω θα τα δείξουμε ανά δύο στη γραμμή με τη χρήση της εντολής **GraphicsArray**.) Ο αριθμός των σχημάτων πράγματι είναι:

```
In[35]:= NumberOfBuildingImagesWithNoDamping = Length[BuildingImagesWithoutDamping]
```

```
Out[35]= 16
```

Μαυρίζοντας τη δεξιά κατακόρυφη μπλε γραμμή που τα καλύπτει όλα τους και στη συνέχεια πατώντας **Ctrl Y**, παίρνουμε τη σχετική animation (κινούμενο σχήμα: εδώ κίνηση του μονώροφου κτιρίου: κινούμενο κτίριο, αλλά με το έδαφος και τις στηρίξεις του κτιρίου επάνω στο έδαφος σταθερά). Το σχήμα αυτό έχουμε τη δυνατότητα να το "εξαγάγουμε" (με χρήση της εντολής **Export**) σε μορφή αρχείου **animated gif**, ώστε να έχουμε διαθέσιμη τη χρήσιμη αυτή animation και έξω από τη *Mathematica*. Το αρχείο με τα σχήματα για την animation των ταλαντώσεων το ονομάζουμε **BuildingAnimationWithoutDamping.gif**. Και φυσικά δεν ξεχνάμε στο τέλος την επιλογή **ConversionOptions** \rightarrow **{Loop \rightarrow True}**. (Είναι αναγκαία!)

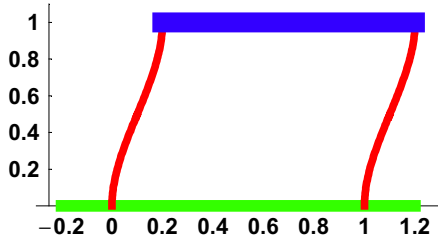
```
In[36]:= Export["D:\cemb\animations\BuildingAnimationWithoutDamping.gif",
  BuildingImagesWithoutDamping, ConversionOptions  $\rightarrow$  {Loop  $\rightarrow$  True}]
```

```
Out[36]= D:\cemb\animations\BuildingAnimationWithoutDamping.gif
```

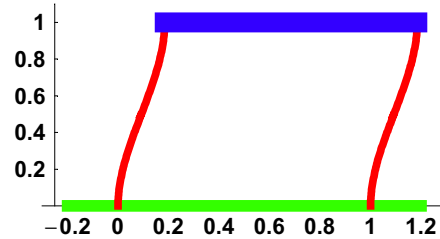

Και τώρα δείχνουμε (ανά δύο στην κάθε γραμμή με τη χρήση της εντολής **Partition**) τα δεκαέξι σχήματα τα οποία πήραμε για την animation. Αυτά επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο $T = 2\pi$. (Δηλαδή το δέκατο έβδομο σχήμα θα είναι το ίδιο με το πρώτο, το δέκατο όγδοο σχήμα το ίδιο με το δεύτερο, κλπ.)

```
In[37]:= Show[GraphicsArray[Partition[BuildingImagesWithoutDamping, 2]],
GraphicsSpacing -> {0.1, 0.1}, ImageSize -> 590];
```

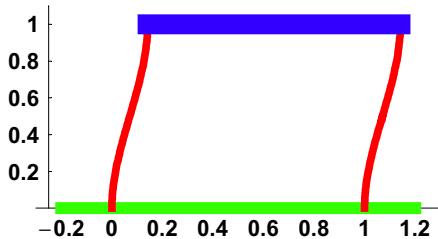
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



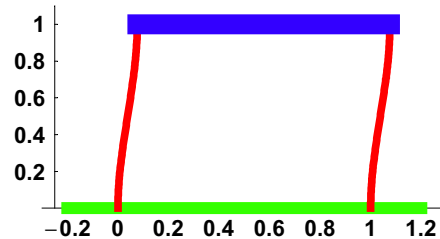
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



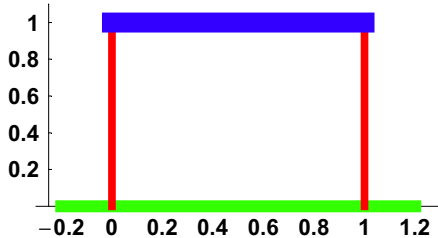
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



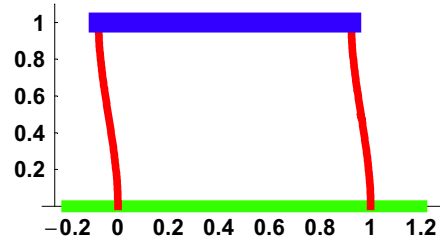
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



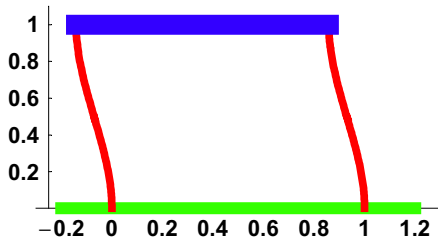
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



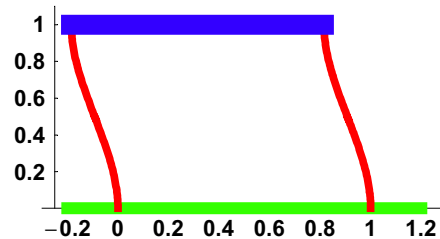
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



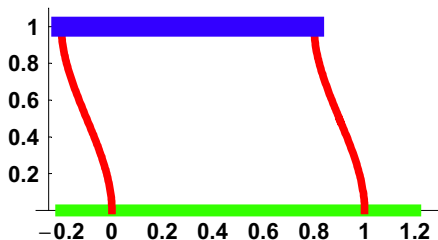
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



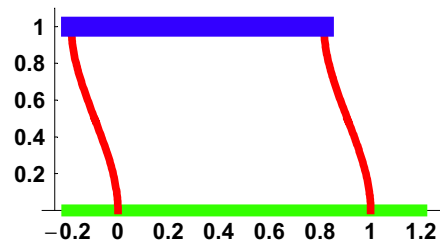
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



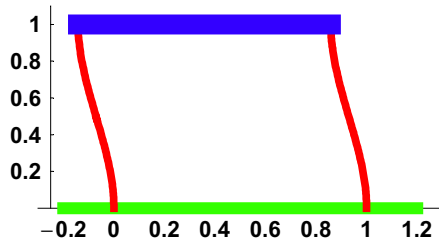
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



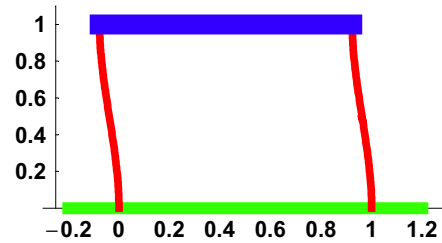
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



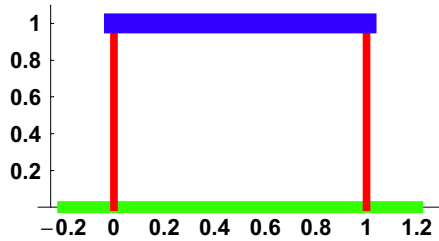
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



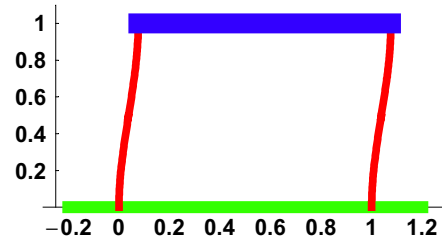
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



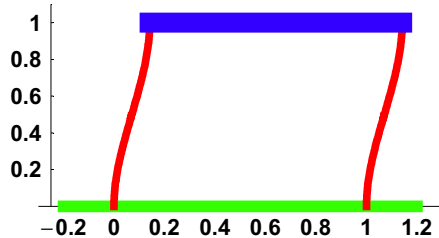
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



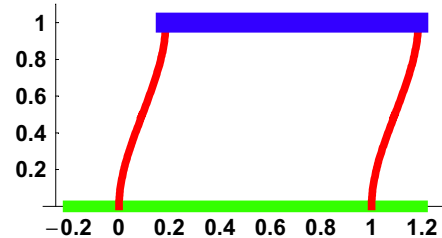
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



■ ANIMATION ΓΙΑ ΣΕΙΣΜΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Απόλυτα ανάλογα προχωράμε εδώ και στη δημιουργία της animation (του κινούμενου σχήματος) με την παρουσία σεισμικού φαινομένου: σεισμού. Με γνωστό από την αρχή το βέλος κάμψευς των υποστυλωμάτων κατά το ύψος τους y δημιουργούμε ξανά εύκολα την ελαστική γραμμή τους σε σεισμικές ταλαντώσεις (πάλι σε μορφή λίστας με 101 σημεία) τη χρονική στιγμή t πρώτα για το αριστερό υποστυλωμα (με στήριξη στο σημείο $x = 0$). Τώρα όμως η μετατόπιση στις πακτώσεις στο κάτω μέρος των υποστυλωμάτων είναι προφανώς ίση με την οριζόντια μετατόπιση $u_g(t)$ του εδάφους (ground) εξαιτίας του σεισμού που ήδη εμείς υποθέσαμε (ένας υπεραπλοποιημένος σεισμός με μία μόνο κυκλική συχνότητα: την ω). Αυτήν τη μετατόπιση $u_g(t)$ την έχουμε ήδη υποθέσει, την έχουμε διαθέσιμη και την επαναλαμβάνουμε

```
In[38] := ug[t]
```

```
Out[38] = u0 sin(t ω)
```

Για να προχωρήσουμε στην animation, που αποτελείται βέβαια από μια σειρά σχημάτων, θα πρέπει να έχουμε ορίσει αριθμητικές τιμές για όλα τα μεγέθη που επηρεάζονται σ' αυτήν. Άρα εδώ επιλέγουμε τιμές και για τα μεγέθη ω και u_0 : $\omega = 2$ και $u_0 = 0.2$. Συνεπώς όλες μαζί οι αντικαταστάσεις μας θα είναι:

```
In[39] := subs2 = Flatten[{subs1, ω → 2, u0 → 0.2, v0 → ug[t]}]
```

```
Out[39] = {h → 1, d → 1, v0 → 0, v1 → 0.2, ω0 → 1, ω → 2, u0 → 0.2, v0 → u0 sin(t ω)}
```

Έχουμε ήδη υπολογίσει τη σχετική μετατόπιση $u_e(t)$ της πλάκας ως προς το έδαφος στον παρόντα υπεραπλοποιημένο σεισμό. Τώρα οι μετατοπίσεις στις πακτώσεις των υποστυλωμάτων (κάτω πάκτωση στο έδαφος και επάνω πάκτωση στην πλάκα) θα είναι:

```
In[40] := ColumnEndsDisplacements = {v0 → ug[t], v1 → ug[t] + ue[t]}
```

```
Out[40] = {v0 → u0 sin(t ω), v1 → u0 sin(t ω) +  $\frac{u0 \omega^2 \omega0 \sin(t \omega) - u0 \omega^3 \sin(t \omega0)}{\omega0^3 - \omega^2 \omega0}$ }
```

Επομένως με αυτές τις μετατοπίσεις και την υπόθεση αβαρών υποστυλωμάτων, την οποία ήδη κάναμε στο παρόν κτίριο, το βέλος κάμψης των υποστυλωμάτων (η ελαστική γραμμή που σχηματίζουν) θα είναι

```
In[41] := uet[y_, t_] = vs[y] /. ColumnEndsDisplacements // FullSimplify
```

```
Out[41] =  $\frac{u0 y^2 (2 y - 3 h) \sin(t \omega0) \omega^3 + u0 \omega0 (h^3 \omega0^2 - (h - y)^2 (h + 2 y) \omega^2) \sin(t \omega)}{h^3 (\omega0^3 - \omega^2 \omega0)}$ 
```

Σαν επαλήθευση στις πακτώσεις διαπιστώνουμε ότι

```
In[42] := {uet[0, t] == ug[t], uet[h, t] == ug[t] + ue[t]} // Simplify
```

```
Out[42] = {True, True}
```

Ακολουθούμε τώρα ακριβώς την ίδια με πριν (χωρίς το σεισμό) διαδικασία υπολογίζοντας κατά σειρά τα δύο ακραία σημεία του εδάφους που θα σχεδιάσουμε, μετά τα σημεία του αριστερού υποστυλώματος, έπειτα τα σημεία του δεξιού υποστυλώματος και στο τέλος τα ακραία σημεία της πλάκας, όπου έχουμε τις επάνω πακτώσεις των δύο υποστυλωμάτων. (Σημειώνουμε πως εδώ λόγω του σεισμού το έδαφος κινείται. Άρα ακόμη και τα πρώτα σημεία, τα σημεία του εδάφους όπου στηρίζεται το κτίριο θα είναι και αυτά συναρτήσεις του χρόνου t .) Τα σημεία τα οποία προαναφέραμε είναι κατά σειρά τα ακόλουθα:

```
In[43] := valuesg[t_] = {{-0.2 + ug[t], 0}, {d + 0.2 + ug[t], 0}} /. subs2
```

```
Out[43] =  $\begin{pmatrix} 0.2 \sin(2t) - 0.2 & 0 \\ 0.2 \sin(2t) + 1.2 & 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
In[44] := values1[t_] = Table[{uet[y, t] /. subs2, y}, {y, 0, 1, 0.01}] // TrigReduce;
```

```
In[45] := values2[t_] = Table[{d + uet[y, t] /. subs2, y}, {y, 0, 1, 0.01}] // TrigReduce;
```

```
In[46] := values3[t_] = {values1[t] [[101]], values2[t] [[101]]}
```

```
Out[46] =  $\begin{pmatrix} 0.533333 \sin(t) - 0.0666667 \sin(2t) & 1. \\ 0.533333 \sin(t) - 0.0666667 \sin(2t) + 1 & 1. \end{pmatrix}$ 
```

Σχεδιάζουμε τώρα (ακριβώς όπως και πριν) και τις τέσσερις πιο πάνω λίστες σαν λίστες σημείων:

```
In[47] := LPg[t_] = ListPlot[valuesg[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.03], Hue[0.3]}, DisplayFunction → Identity];
```

```
In[48] := LP1[t_] = ListPlot[values1[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction → Identity];
```

```
In[49] := LP2[t_] = ListPlot[values2[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction → Identity];
```

```
In[50] := LP3[t_] = ListPlot[values3[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.05], Hue[0.7]}, DisplayFunction → Identity];
```

Τώρα μπορούμε (ακριβώς όπως και πριν) να ενώσουμε τις τέσσερις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις και να δημιουργήσουμε την εικόνα του κτιρίου μας κάθε χρονική στιγμή t . Εδώ έχουμε (κυκλική) συχνότητα $\omega_0 = 1$ για το κτίριο, άρα περίοδο $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$, και κυκλική συχνότητα $\omega = 2$ για το σεισμό, άρα περίοδο $T_e = 2\pi/\omega = \pi$. Επιλέγουμε χρονικές στιγμές t από $t = 0$ μέχρι και $t = 2\pi$ ανά $\pi/16$ (με εξαίρεση την τελευταία χρονική στιγμή $t = 2\pi$). Αυξάνουμε έτσι (συγκεκριμένα διπλασιάζουμε) σχετικά με πριν την ακρίβεια της animation διαθέτοντάς της 32 εικόνες. Δημιουργούμε έτσι μια λίστα με 32 εικόνες του κτιρίου μας. Αυτές οι εικόνες μάλιστα εξαιτίας της συνολικής περιόδου $T_0 = 2\pi$ των ταλαντώσεων θα επαναλαμβάνονται χρονικά:

```
In[51]:= EarthquakeBuildingImages =
Table[Show[{LPg[t], LP1[t], LP2[t], LP3[t]}, PlotRange -> {{-0.7, 1.7}, {0., 1.1}},
PlotLabel -> "ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ", DefaultFont ->
{"Arial-Bold", 11}, AspectRatio -> 0.5, AxesOrigin -> {-0.7, 0}, ImageSize -> 400,
Ticks -> {{-0.4, 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6}, {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0}},
DisplayFunction -> $DisplayFunction], {t, 0, 2π - π/16, π/16}];
```

```
In[52]:= Length[EarthquakeBuildingImages]
```

```
Out[52]= 32
```

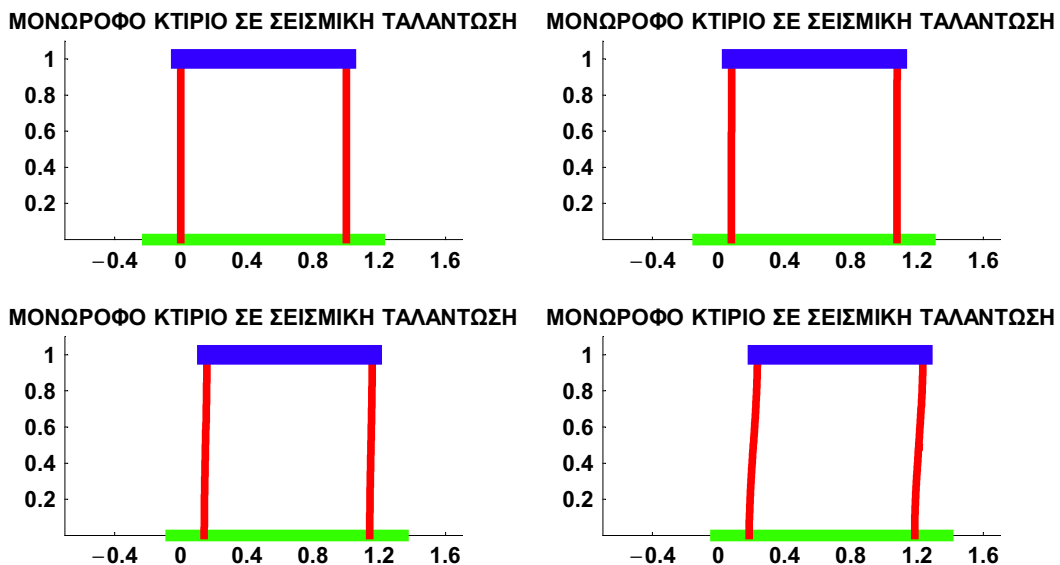
Η animation αποθηκεύεται και πάλι σε αρχείο **animated gif** με τη χρήση της εντολής **Export**:

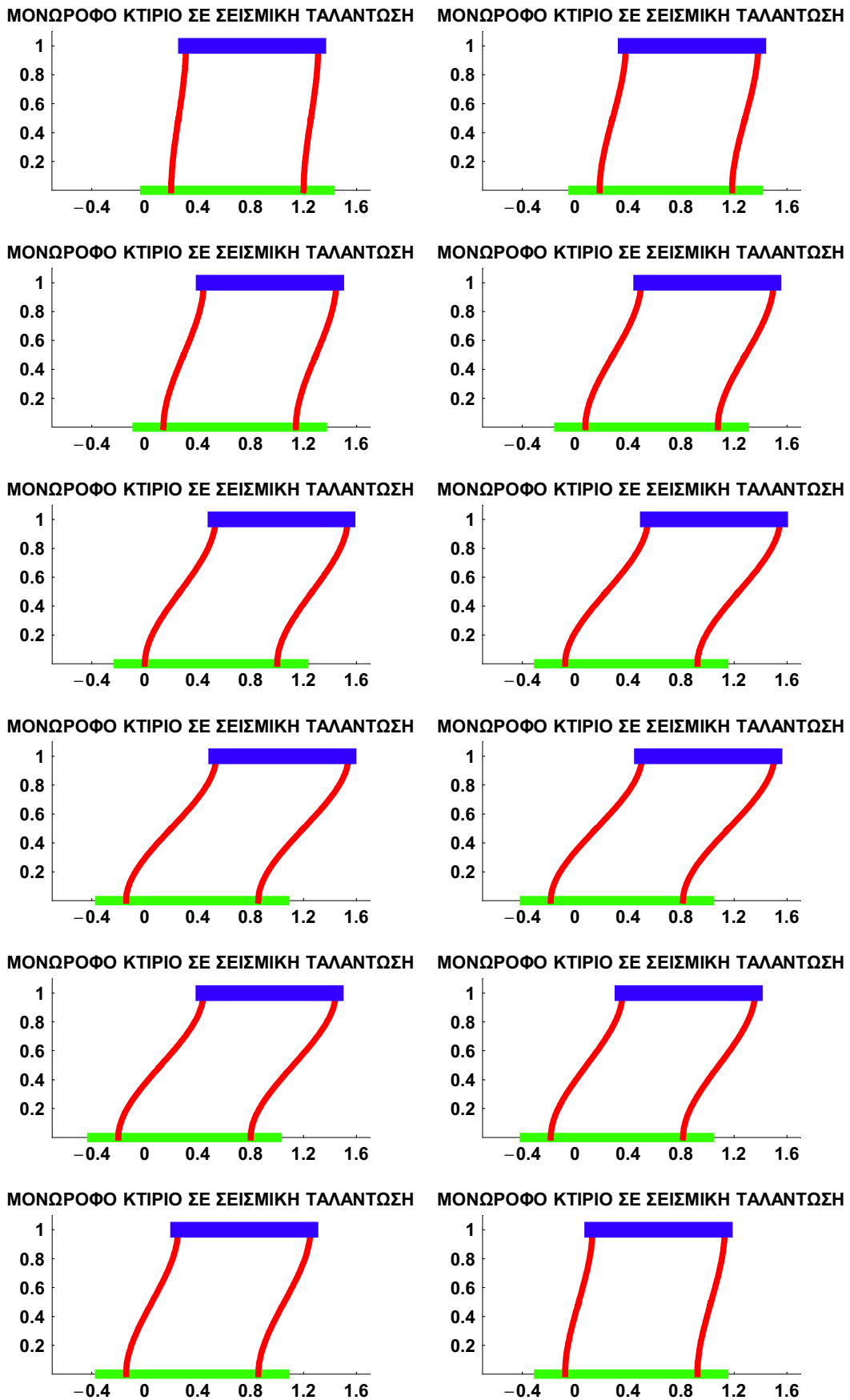
```
In[53]:= Export["D:\cemb\animations\EarthquakeBuildingAnimation.gif",
EarthquakeBuildingImages, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[53]= D:\cemb\animations\EarthquakeBuildingAnimation.gif
```

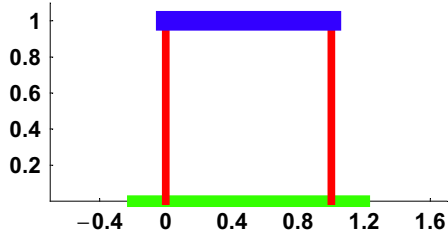
Και τώρα δείχνουμε ξανά (ανά δύο στην κάθε γραμμή με τη χρήση της εντολής **Partition**) τα δεκαέξι σχήματα τα οποία πήραμε για την animation. Αυτά επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο $T = 2\pi$. (Δηλαδή το τριακοστό τρίτο σχήμα θα είναι ίδιο με το πρώτο, το τριακοστό τέταρτο με το δεύτερο, κλπ.)

```
In[54]:= Show[GraphicsArray[Partition[EarthquakeBuildingImages, 2]],
GraphicsSpacing -> {0, 0.1}, ImageSize -> 554];
```

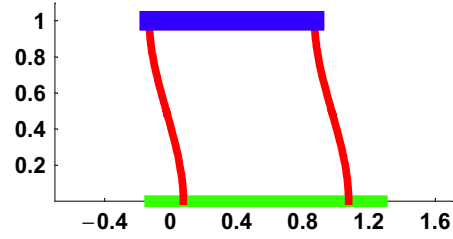




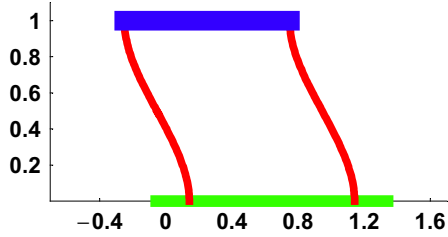
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



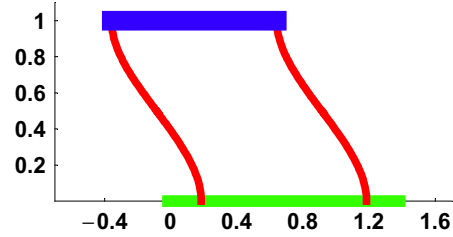
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



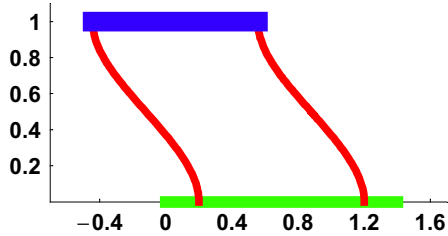
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



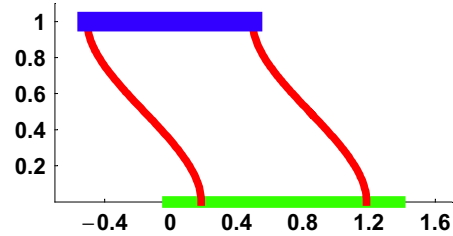
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



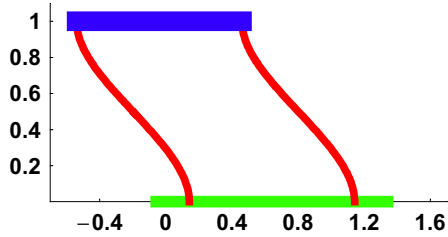
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



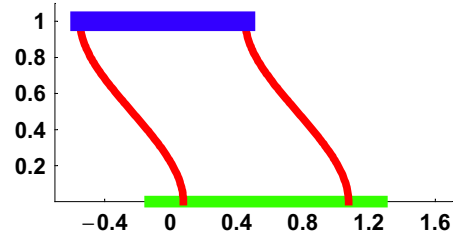
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



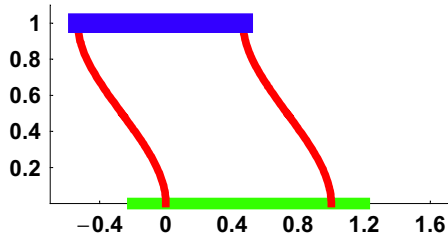
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



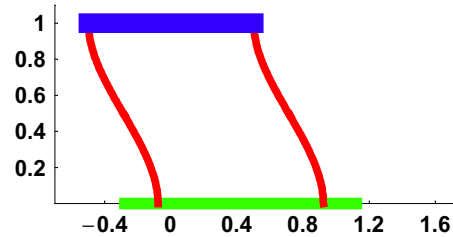
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



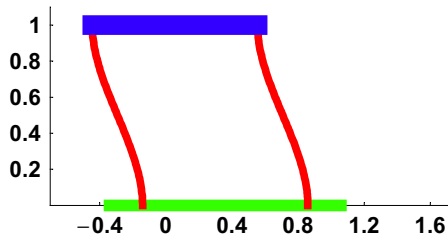
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



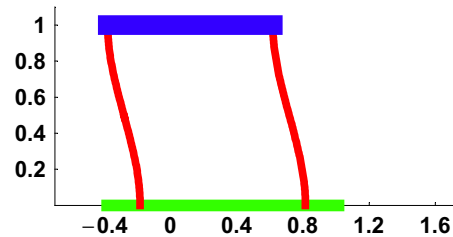
ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

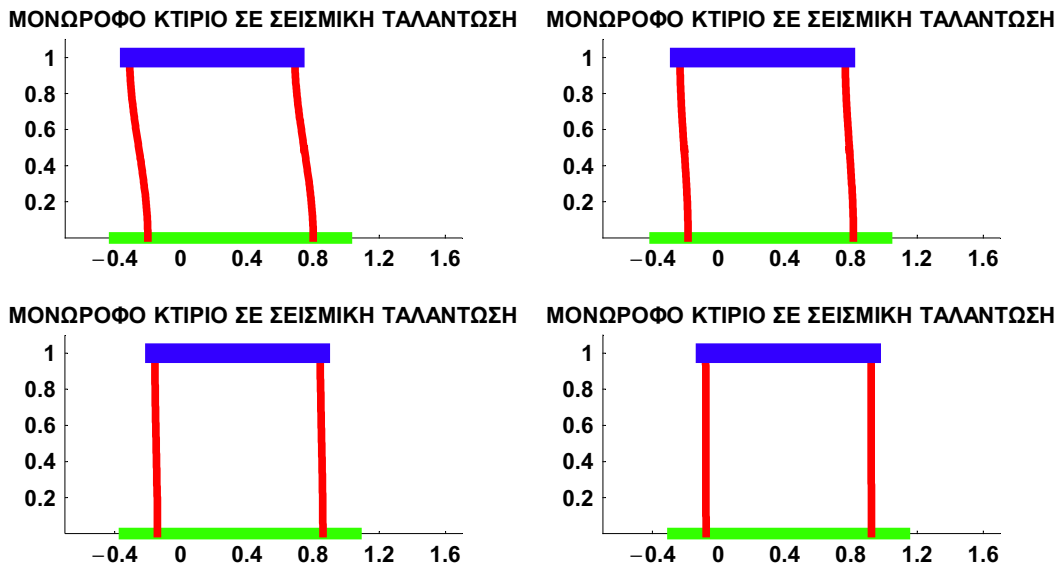


ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ



ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΚΤΙΡΙΟ ΣΕ ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ





■ ANIMATION ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

Προχωράμε τώρα στην περίπτωση του συντονισμού μεταξύ του σεισμικού φαινομένου και των ταλαντώσεων του κτιρίου. Δηλαδή τώρα η συχνότητα του σεισμού ω και η ιδιοσυχνότητα του κτιρίου ω_0 συμπίπτουν: $\omega = \omega_0$. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης έχει ήδη υπολογισθεί για συντονισμό και είναι η εξής:

```
In[55] := ures[t]
```

$$\text{Out}[55] = \frac{1}{2} (u_0 \sin(t \omega_0) - t u_0 \omega_0 \cos(t \omega_0))$$

με το χρόνο t επαναλαμβάνεται, να οδηγεί σε όλο και μεγαλύτερο εύρος ταλαντώσεων καθώς αυξάνει. Επίσης η οριζόντια μετατόπιση των σημείων του εδάφους συνεχίζει να έχει τη μορφή που υποθέσαμε:

```
In[56] := ug[t]
```

$$\text{Out}[56] = u_0 \sin(t \omega)$$

Οι αντικαταστάσεις μας παραμένουν και τώρα οι **subs2**, αλλά με $\omega = \omega_0 = 1$. Αυτές είναι οι

```
In[57] := subs3 = ReplacePart[subs2, \omega \to 1, 6]
```

$$\text{Out}[57] = \{h \to 1, d \to 1, v_0 \to 0, v_1 \to 0.2, \omega_0 \to 1, \omega \to 1, u_0 \to 0.2, v_0 \to u_0 \sin(t \omega)\}$$

Η μετατοπίσεις στις πακτώσεις (κάτω πάκτωση στο έδαφος και επάνω πάκτωση στην πλάκα) θα είναι:

```
In[58] := ColumnEndsDisplacements = {v_0 \to ug[t], v_1 \to ug[t] + ures[t]}
```

$$\text{Out}[58] = \{v_0 \to u_0 \sin(t \omega), v_1 \to u_0 \sin(t \omega) + \frac{1}{2} (u_0 \sin(t \omega_0) - t u_0 \omega_0 \cos(t \omega_0))\}$$

Άρα με αυτές τις μετατοπίσεις το βέλος κάμψης των υποστυλωμάτων θα είναι τώρα σε συντονισμό

```
In[59] := uet[y_, t_] = vs[y] /. ColumnEndsDisplacements // FullSimplify
```

$$\text{Out [59]} = \frac{2 u_0 \sin(t \omega) h^3 + u_0 (3 h - 2 y) y^2 (\sin(t \omega_0) - t \omega_0 \cos(t \omega_0))}{2 h^3}$$

Σαν επαλήθευση στις πακτώσεις διαπιστώνουμε πάλι ότι

```
In[60] := {uet[0, t] == ug[t], uet[h, t] == ug[t] + ures[t]} // Simplify
```

```
Out [60] = {True, True}
```

Ακολουθούμε τώρα ακριβώς–ακριβώς την ίδια με προηγουμένως διαδικασία. Υπολογίζουμε κατά σειρά τα δύο ακραία σημεία του εδάφους που θα σχεδιάσουμε, ύστερα τα σημεία του αριστερού υποστυλώματος, μετά τα σημεία του δεξιού υποστυλώματος και στο τέλος και τα ακραία σημεία της πλάκας (όπου έχουμε τις πακτώσεις των δύο υποστυλωμάτων). Τα σημεία αυτά είναι κατά σειρά τα ακόλουθα:

```
In[61] := valuesg[t_] = {{-0.2 + ug[t], 0}, {d + 0.2 + ug[t], 0}} /. subs3
```

$$\text{Out [61]} = \begin{pmatrix} 0.2 \sin(t) - 0.2 & 0 \\ 0.2 \sin(t) + 1.2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[62] := values1[t_] = Table[{uet[y, t] /. subs3, y}, {y, 0, 1, 0.01}] // TrigReduce;
```

```
In[63] := values2[t_] = Table[{d + uet[y, t] /. subs3, y}, {y, 0, 1, 0.01}] // TrigReduce;
```

```
In[64] := values3[t_] = {values1[t][[101]], values2[t][[101]]}
```

$$\text{Out [64]} = \begin{pmatrix} 0.3 \sin(t) - 0.1 t \cos(t) & 1. \\ -0.1 t \cos(t) + 0.3 \sin(t) + 1 & 1. \end{pmatrix}$$

Σχεδιάζουμε τώρα ξανά (ακριβώς όπως και πριν) και τις τέσσερις πιο πάνω λίστες σαν λίστες σημείων:

```
In[65] := LPg[t_] = ListPlot[valuesg[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.03], Hue[0.3]}, DisplayFunction → Identity];
```

```
In[66] := LP1[t_] = ListPlot[values1[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction → Identity];
```

```
In[67] := LP2[t_] = ListPlot[values2[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction → Identity];
```

```
In[68] := LP3[t_] = ListPlot[values3[t], PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.05], Hue[0.7]}, DisplayFunction → Identity];
```

Τώρα μπορούμε ξανά να ενώσουμε τις τέσσερις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις και να δημιουργήσουμε την εικόνα του κτιρίου μας κάθε χρονική στιγμή t . Εδώ έχουμε (κυκλική) συχνότητα $\omega_0 = 1$ για το κτίριο, επομένως περίοδο $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$ και την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega = 1$ για το σεισμό με περίοδο $T_e = 2\pi/\omega = 2\pi$. Δηλαδή $\omega = \omega_0 = 1$ και ισοδύναμα $T_e = T = 2\pi$, άρα συντονισμός. Επιλέγουμε χρονικές στιγμές t από $t = 0$ μέχρι $t = 15\pi$ ανά $\pi/8$. (Σε συντονισμό δεν υπάρχει περιοδικότητα στην ταλάντωση του κτιρίου.) Δημιουργούμε έτσι μια λίστα 121 εικόνων του κτιρίου μας, που όμως δεν επαναλαμβάνονται:

```
In[69] := EarthquakeBuildingImagesWithResonance =
  Table[Show[{LPg[t], LP1[t], LP2[t], LP3[t]}, PlotRange → {{-6.2, 6.2}, {0., 1.1}},
    PlotLabel → "ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ",
    DefaultFont → {"Arial-Bold", 11}, AspectRatio → 0.5, AxesOrigin → {-6.2, 0},
    ImageSize → 400, Ticks → {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0}},
    DisplayFunction → $DisplayFunction], {t, 0, 15\pi, \pi/8}];
```


Πραγματικά χρησιμοποιήσαμε εδώ 121 εικόνες για την animation:

```
In[70]:= Length[EarthquakeBuildingImagesWithResonance]
```

```
Out[70]= 121
```

Πήραμε, σχεδιάσαμε πάρα πολλές εικόνες. Σ' αυτό εφταίξε ότι δεν έχουμε περιοδικό φαινόμενο. Έχουμε συντονισμό, ένα μη περιοδικό φαινόμενο. Είναι προφανές από τα πιο πάνω σχήματα και την αντίστοιχη animation που δημιουργούν ότι το κτίριο σύντομα δε θα αντέξει το συντονισμό και θα καταρρεύσει από το σεισμό. Βέβαια να μη λησμονούμε ότι στο κτίριο αυτό υποθέσαμε πως δεν υπάρχει καθόλου απόσβεση των ταλαντώσεων. (Στην πραγματικότητα πάντοτε υπάρχει στα κτίρια μια μικρή απόσβεση με λόγο αποσβέσεως ξ περίπου από 0.03 έως 0.06 έστω και δίχως τη χρήση ειδικών αποσβεστήρων.) Επίσης έτυχε εδώ η συχνότητα ω του σεισμού να συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του κτιρίου: άρα προκύπτει συντονισμός.

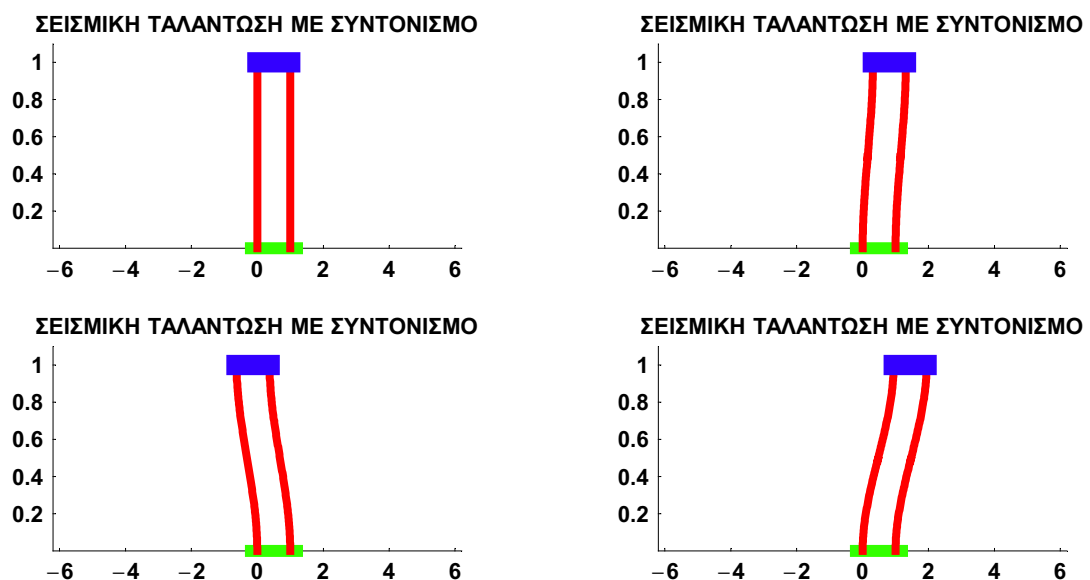
Κατά τα γνωστά με την εντολή **Export** δημιουργούμε την animation και σε αρχείο **animated gif**. Εδώ το αρχείο αυτό είναι πάρα πολύ μεγάλο, επειδή περιέχει 121 σχήματα λόγω της ελλείψεως περιοδικότητας.

```
In[71]:= Export["D:\cemb\animations\EarthquakeBuildingAnimationWithResonance.gif",
  EarthquakeBuildingImagesWithResonance, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[71]= D:\cemb\animations\EarthquakeBuildingAnimationWithResonance.gif
```

Και τώρα δείχνουμε (ανά δύο στην κάθε γραμμή με τη χρήση της εντολής **Partition**) μερικά σχήματα (όχι όλα τα σχήματα!) τα οποία πήραμε για την animation, συγκεκριμένα το 1ο, το 9ο, κλπ. (ανά 8) μέχρι το 121ο (16 σχήματα συνολικά). Από τα σχήματα αυτά φαίνεται καθαρά ο συντονισμός καθώς μεγαλώνει ο χρόνος t . (Όλο κι αυξάνει το εύρος των ταλαντώσεων!) Η *Mathematica* αναγκάστηκε μάλιστα να χρησιμοποιήσει πολύ διαφορετική κλίμακα κατά τον οριζόντιο άξονα του εδάφους στην παρούσα animation, επειδή το κτίριο ξεφεύγει πολύ από την αρχική του θέση (εφόσον δεν έχει ενδιάμεσως καταρρεύσει):

```
In[72]:= Show[GraphicsArray[Partition[
  Table[EarthquakeBuildingImagesWithResonance[[k]], {k, 1, 121, 8}], 2],
  GraphicsSpacing -> {0.1, 0.1}, ImageSize -> 595]];
```



■ ANIMATION ΓΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Σαν τέταρτο και τελευταίο παράδειγμα animation (κινούμενου σχήματος) θα αναφέρουμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις του μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατηρήσεως που εξετάζουμε χωρίς σεισμό, αλλ' εδώ με απόσβεση. Η σχετική διαφορική εξίσωση είναι η εξής:

```
In[73] := FreeVibrationsWithDampingODE = u''[t] + 2 ξ ω0 u'[t] + ω0^2 u[t] == 0;
```

εδώ με ξ το λόγο αποσβέσεως των ταλαντώσεων και ω_0 την ιδιοσυχνότητα του κτιρίου σε περίπτωση ελλείψεως αποσβέσεως: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Σαν αρχικές συνθήκες θεωρούμε και πάλι τις συνθήκες

```
In[74] := InitialConditions = {u[0] == 1, u'[0] == 0};
```

Η μερική λύση του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών (διαφορική εξίσωση και δύο αρχικές συνθήκες) προσδιορίζεται εύκολα ξανά με την εντολή **DSolve** για διαφορικές εξισώσεις:

```
In[75] := ufd[t_] =
  DSolve[{FreeVibrationsWithDampingODE, InitialConditions}, u[t], t][[1, 1, 2]] //
  FullSimplify
```

```
Out[75] = e^{-t ξ ω0} \left( \cosh(t \sqrt{\xi^2 - 1} \omega0) + \frac{\xi \sinh(t \sqrt{\xi^2 - 1} \omega0)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right)
```

(Υποτίθεται ότι ο δείκτης f αναφέρεται σε ελεύθερες ταλαντώσεις, free vibrations, ενώ ο δείκτης d στην απόσβεση, damping.) Θα προχωρήσουμε τώρα στην animation (κινούμενο σχήμα) στο παρόν πρόβλημα μονώροφου ιδεατού κτιρίου σε ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση. Όπως και στο πρώτο παράδειγμα animation, θεωρούμε το έδαφος ακίνητο, επομένως $v_0 = 0$, και δίνουμε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στις ποσότητες h (το ύψος των υποστυλωμάτων) και v_1 (την οριζόντια μετατόπιση της πλάκας), αλλά και στην κυκλική συχνότητα των ιδιοταλαντώσεων $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (με k τη συνολική δυσκαμψία και των δύο υποστυλωμάτων). Επισημαίνουμε ξανά ότι η οριζόντια μετατόπιση v_1 της πλάκας (και των δύο υποστυλωμάτων στα επάνω άκρα τους) είναι αυτή που προκαλεί τις ταλαντώσεις του κτιρίου. Δεν υπάρχει εδώ ούτε σεισμός που να προκαλέσει σεισμική αδρανειακή φόρτιση ούτε κάποια άλλη φόρτιση. Το ύψος του κτιρίου είναι h και το πλάτος του είναι d . Τις τιμές που προαναφέραμε τις δίνουμε εδώ υπό τη μορφή κανόνων αντικατάστασης **subs4**, ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να τις αλλάζουμε εύκολα, εφόσον χρειασθεί, ακριβώς όπως κάναμε και στο πρώτο παράδειγμα.

Τώρα με τις παρακάτω αντικαταστάσεις **subs4** το βέλος κάμψεως $v(y)$ (με $0 \leq y \leq h$) των δύο υποστυλωμάτων παίρνει τη μορφή μιας καθαρά αριθμητικής συναρτήσεως:

```
In[76] := subs4 = {h → 1, d → 1, v0 → 0, v1 → 1, ω0 → 1, ξ → 0.05};
```

```
In[77] := usd[y_] = vs[y] /. subs4
```

```
Out[77] = 3y^2 - 2y^3
```

Όπως και πριν, αναφέρουμε πρώτα δύο σημεία της επιφάνειας του εδάφους που να περιλαμβάνουν ανάμεσά τους τις κάτω πακτώσεις των υποστυλωμάτων και γενικά τη στήριξη και τη θεμελίωση του κτιρίου:

```
In[78] := values0 = {{-0.2, 0}, {d + 0.2, 0}} /. subs4;
```

Με γνωστό το βέλος κάμψεως $u_{sd}(y)$ των υποστυλωμάτων κατά το ύψος τους y δημιουργούμε εύκολα την ελαστική γραμμή τους σε ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση (εδώ σε μορφή λίστας με 101 σημεία) τη χρονική στιγμή t πρώτα του αριστερού υποστυλώματος (με στήριξη στο σημείο $x = 0$). Για χρονική συνάρτηση παίρνουμε τη συνάρτηση

```
In[79] := ufd1[t_] = ufd[t] /. subs4 // Chop
Out[79] = e-0.05t (cos(0.998749 t) + 0.0500626 sin(0.998749 t))
```

που είχαμε βρει προηγουμένως. Για τις πιο πάνω αριθμητικές τιμές **subs4** θα προσδιορίσουμε παρακάτω τα σημεία των δύο υποστυλωμάτων, όπως προκύπτουν με τη μορφή της ελαστικής γραμμής τους $u_{sd}(y)$ (που ήδη προσδιορίσθηκε) και της πιο πάνω χρονικής συναρτήσεως $u_{fd1}(t)$ (για τις αρχικές συνθήκες).

Όπως και πριν, ορίζουμε πρώτα το έδαφος με σημεία **values0**, μετά το αριστερό υποστυλώμα **values1** και μάλιστα σαν συνάρτηση του χρόνου t . Αυτό θα μας φανεί πολύ χρήσιμο παρακάτω στην animation. Ανάλογα υπολογίζουμε και τα σημεία **values2** του δεξιού υποστυλώματος (ξανά λίστα με 101 σημεία). Αυτό είναι ολόιδιο με το αριστερό, απλά μετατοπισμένο προς τα δεξιά κατά το πλάτος d του κτιρίου:

```
In[80] := values0 = {{-0.2, 0}, {d + 0.2, 0}} /. subs4;
In[81] := values1[t_] = Table[{usd[y] ufd1[t], y}, {y, 0, 1, 0.01}];
In[82] := values2[t_] = Table[{d + usd[y] ufd1[t] /. d -> 1, y}, {y, 0, 1, 0.01}];
```

Τέλος δημιουργούμε και τη λίστα **values3** των δύο σημείων πακτώσεως των υποστυλωμάτων στην απαράμορφωτη πλάκα του μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατηρήσεως που έχουμε σε ελεύθερες ταλαντώσεις:

```
In[83] := values3[t_] = {values1[t] [[101], values2[t] [[101]]}
Out[83] = ( 1. e-0.05t (cos(0.998749 t) + 0.0500626 sin(0.998749 t)) 1. )
( 1. e-0.05t (cos(0.998749 t) + 0.0500626 sin(0.998749 t)) + 1 1. )
```

Ξανά όπως και πριν σχεδιάζουμε και τώρα και τις τέσσερις πιο πάνω λίστες σαν λίστες σημείων, αλλά ενωμένων το ένα με το άλλο με τη χρήση της γνωστής εντολής **ListPlot** και επιπλέον και της επιλογής της **PlotJoined** → **True**. Δεν τις εμφανίζουμε όμως. Απλά τις δηλώνουμε και μάλιστα σαν συναρτήσεις του χρόνου t (εκτός από την πρώτη στο έδαφος, η οποία είναι σταθερή, επειδή εδώ δεν έχουμε σεισμό):

```
In[84] := LP0 = ListPlot[values0, PlotJoined -> True,
PlotStyle -> {Thickness[0.03], Hue[0.3]}, DisplayFunction -> Identity];
In[85] := LP1[t_] = ListPlot[values1[t], PlotJoined -> True,
PlotStyle -> {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction -> Identity];
In[86] := LP2[t_] = ListPlot[values2[t], PlotJoined -> True,
PlotStyle -> {Thickness[0.02], Hue[0]}, DisplayFunction -> Identity];
In[87] := LP3[t_] = ListPlot[values3[t], PlotJoined -> True,
PlotStyle -> {Thickness[0.05], Hue[0.7]}, DisplayFunction -> Identity];
```

Τώρα έχουμε πλέον τη δυνατότητα να ενώσουμε τις τέσσερις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις και να δημιουργήσουμε την εικόνα του κτιρίου μας κάθε χρονική στιγμή t . Επιλέγουμε σαν χρονικό διάστημα όπου θα παρουσιάσουμε την animation το διάστημα $[0, 20\pi]$ με εικόνες ανά $\pi/8$. (Δυστυχώς το πρόβλημα δεν είναι περιοδικό!) Δημιουργούμε έτσι μια λίστα από 161 εικόνες του κτιρίου μας. Αυτές οι εικόνες δεν επαναλαμβάνονται χρονικά, δεν υπάρχει περίοδος T . Για να δούμε τώρα τα σχήματα που προέκυψαν:

```
In[88]:= BuildingImagesWithDamping =
  Table[Show[{LP0, LP1[t], LP2[t], LP3[t]}, PlotRange -> {{-1.3, 2.3}, {0., 1.1}},
    PlotLabel -> "ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ", DefaultFont -> {"Arial-Bold", 11},
    AspectRatio -> 0.5, AxesOrigin -> {-1.1, 0}, ImageSize -> 500,
    Ticks -> {{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0}},
    DisplayFunction -> $DisplayFunction], {t, 0, 20 π, π/8}];
```

Πήραμε συνολικά 161 σχήματα για το μονώροφο κτίριό μας σε ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση, που για οικονομία χώρου δεν τα δείχνουμε εδώ ένα προς ένα, αν και παρουσιάζονται στην οθόνη. (Στο notebook, στη μορφή PDF καθώς και στην τυπωμένη μορφή του notebook τα σβήσαμε. Εντούτοις παρακάτω θα δείξουμε μερικά από αυτά με τη χρήση της εντολής **GraphicsArray**.)

Για να πάρουμε την animation, όπως ήδη ξέρουμε, μαυρίζουμε τη δεξιά κατακόρυφη μπλε γραμμή και πατάμε **Ctrl Y**. Το κινούμενο αυτό σχήμα μπορούμε να το "εξαγάγουμε" (χρησιμοποιώντας την εντολή **Export**) σε μορφή αρχείου **animated gif**, όπως γνωρίζουμε. Το αρχείο με τα σχήματα για την animation αυτών των ταλαντώσεων με απόσβεση το ονομάζουμε **BuildingAnimationWithDamping.gif**. Και φυσικά δεν ξεχνάμε στο τέλος την επιλογή **ConversionOptions -> {Loop -> True}**. Αυτή είναι απόλυτα αναγκαία!

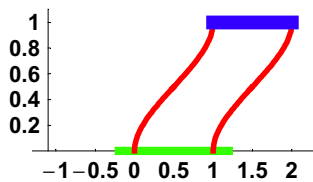
```
In[89]:= Export["D:\cemb\animations\BuildingAnimationWithDamping.gif",
  BuildingImagesWithDamping, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[89]= D:\cemb\animations\BuildingAnimationWithDamping.gif
```

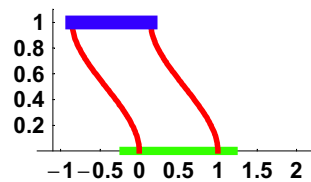
Και τώρα δείχνουμε (ανά δύο στην κάθε γραμμή με τη χρήση της εντολής **Partition**) το 1ο, το 9ο, κλπ. ανά 8 (όχι όλα) τα σχήματα τα οποία πήραμε για την animation. Αυτά δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά. Από τα παρακάτω σχήματα παρατηρούμε ότι λόγω της αποσβέσεως η ταλάντωση φθίνει με το χρόνο.

```
In[90]:= Show[GraphicsArray[
  Partition[Table[BuildingImagesWithDamping[[k]], {k, 1, 161, 8}], 2],
  GraphicsSpacing -> {0.2, 0.12}, ImageSize -> 474]];
```

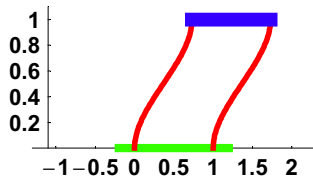
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



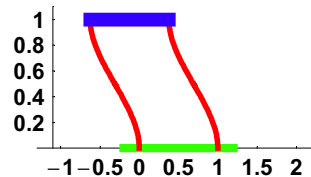
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



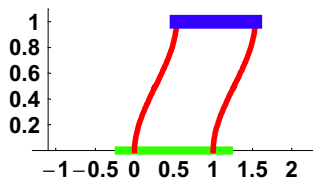
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



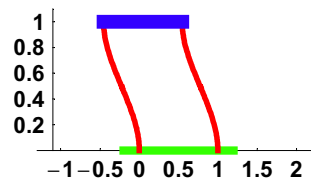
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



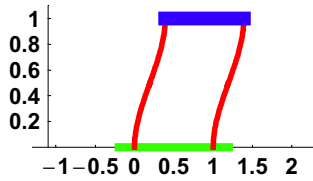
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



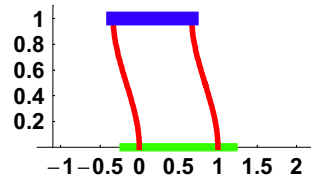
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



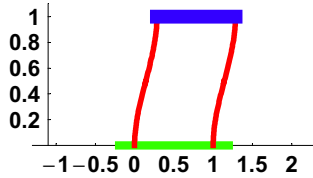
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



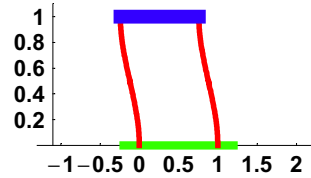
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



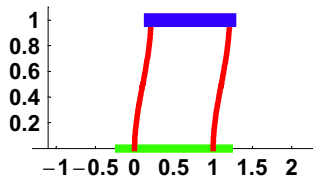
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



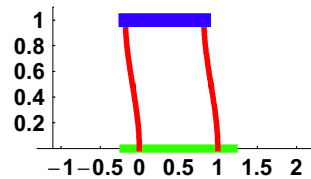
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



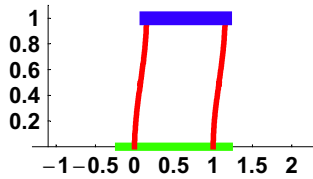
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



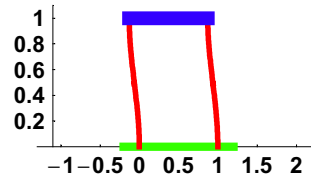
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



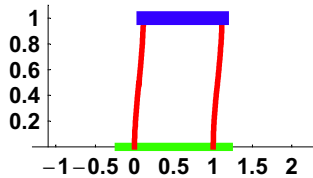
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



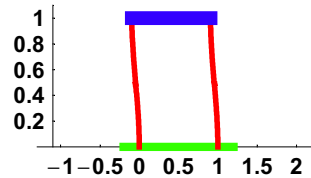
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



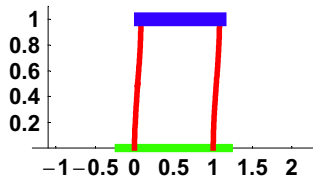
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



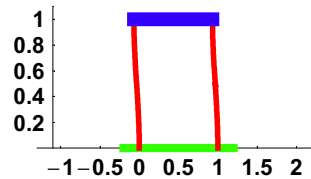
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



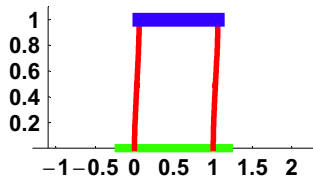
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



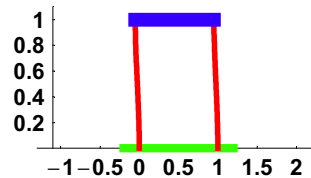
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ



Επαναλαμβάνουμε την παρατήρηση ότι εξαιτίας της αποσβέσεως η ταλάντωση φθίνει με το χρόνο αντίθετα με ό,τι συνέβαινε στην πρώτη animation του notebook, όπου δεν υπήρχε καθόλου απόσβεση.

