Ασκήσεις

1) Στο κατάστημα ενός αγροτοσυνεταιριστικού συνεταιρισμού, πωλείται μέλι τεσσάρων ειδών (ανθέων, ελάτης, θυμαρίσιο και ανάμεικτο) παραγωγής τριών ντόπιων μελισσοκόμων (Α, Β και Γ) σε γυάλινα βάζα τριών μεγεθών (μικρού, μεσαίου και μεγάλου). Επιλέγουμε τυχαία από τα ράφια του καταστήματος 25 βάζα μελιού και για καθένα καταγράφουμε τον παραγωγό του. Τα αποτελέσματα που πήραμε ήταν τα εξής:

Α Β Β Γ Α Α Α Γ Γ Γ Α Β Α Β Β

Α Β Γ Α Β Γ Γ Γ Β Α

α) Ποιας μεταβλητής καταγράφονται οι τιμές;

β) Είναι ποσοτική ή ποιοτική;

γ) Ποιο ποσοστό βάζων μελιού του δείγματος παράγεται από τον μελισσοκόμο Γ;

δ) Ποια είναι η κορυφή του δείγματος.

ε) Εάν για τα 25 από βάζα καταγράφουμε: 1) το είδος μελιού 2) το μέγεθος της συσκευασίας; 3) την περιεκτικότητα του μελιού σε ζάχαρα 4) το βάρος του περιεχομένου κάθε βάζου. Για κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις να χαρακτηρίσετε το είδος της μεταβλητής

Λύση

α) Χ = παραγωγός του κάθε βάζου

β) ποιοτική

γ) $\frac{8}{25} \cdot 100 = 32\%$

δ) Το Α που εμφανίζεται 9 φορές

ε). είδος μελιού → ποιοτική
μέγεθος μελιού → ποσοτική
περιεκτικότητα → ποσοτική
βάρος περιεχομένου → ποσοτική.

2). Η ποσοστιαία κατανομή των νοικοκυριών μιας πόλεως, σχετικά με τον αριθμό των εργαζόμενων μελών τους είναι:

Εργαζόμενα μέλη x_i	Νοικοκυριά $f_i\%$
0	2
1	50
2	20
3	15
4 και άνω	13
	100

Να υπολογιστεί ο αριθμητικός μέσος, αν γνωρίζουμε ότι είναι διπλάσιος από τη διάμεσο.

Λύση
Επειδή η τελευταία τιμή της τ.μ. δεν είναι γνωστή, δεν μπορεί να υπολογιστεί ο μέσος από τον γνωστό τύπο, γι' αυτό υπολογίζουμε τη διάμεσο ως εξής:
α. Κατασκευάζουμε τη στήλη F_i
β. Προσδιορίζουμε την τιμή $\frac{N}{2} = 50$
γ. Βρίσκουμε τις 2 διαδοχικές αθροιστικές συχνότητες F_{i-1} και F_i ανάμεσα στις οποίες περιέχεται το $\frac{N}{2}$
δ. $M = x_i$ που αντιστοιχεί στην F_i

x_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0	2	2
1	50	52
2	20	72
3	15	87
4 και άνω	13	100
Σύνολο	100	

$\frac{N}{2} = 50$

Άρα $x = 1 = M \Rightarrow \mu = 2M = 2$

3). Ο μέσος μισθός μιας κατηγορίας υπαλλήλων του δημοσίου είναι 1200€. Αν ο μισθός κάθε υπαλλήλου αυξηθεί κατά 10%, ποιά μεταβολή υπέρχεται στο μέσο μισθό;

Λύση

X: μισθός υπαλλήλου

x_i: μισθός ενός υπαλλήλου

Αν ο μισθός αυξηθεί κατά 10% θα γίνει:

$y_i = x_i + 0{,}1x_i = 1{,}1x_i$

Δηλ. η μεταβλητή X θα πολλ/σεί επί 1,1

$\mu_y = \frac{\Sigma y_i}{N} = \frac{\Sigma 1{,}1x_i}{N} = 1{,}1\frac{\Sigma x_i}{N} = 1{,}1\mu_x = 1320€$

ή θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε επιδιώνεμο.

4). Εάν ο συντελεστής μεταβλητότητας της μεταβλητής X είναι 0,50 υπολογίστε τον συντελεστή μεταβλητότητας της $Y = X + 2\sigma_x$, όπου σ_x παριστάνει την τυπική απόκλιση της X.

Λύση

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\mu_y}$$

άρα

$$\mu_y = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{\Sigma(x_i + 2\sigma_x)}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n} + 2\frac{\Sigma \sigma_x}{n} =$$

$$= \mu_x + 2\sigma_x$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y_i - \mu_y)^2}{n} = \frac{\Sigma(x_i + 2\sigma_x - \mu_x - 2\sigma_x)^2}{n} =$$

$$= \frac{\Sigma(x_i - \mu_x)^2}{n} = \sigma_x^2$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \Rightarrow \sigma_x = 0,5\mu_x$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\mu_y} = \frac{\sigma_x}{\mu_x + 2\sigma_x} = \frac{0.5\mu_x}{\mu_x + 2 \cdot 0,5\mu_x} = 0,25$$

Μπορεί να λυθεί και με χρήση ιδιοτήτων.

5). Η κατανομή των υπαλλήλων μιας επιχειρήσεως ως προς τις μηνιαίες αποδοχές τους έχει $\mu = 1400€$ και $\sigma^2 = 1600€$. Αν οι μηνιαίες αποδοχές κάθε υπαλλήλου αυξηθούν κατά 20% ποιό θα είναι η τιμή της διασποράς.

Λύση

Έστω x_i οι μηνιαίες αποδοχές των υπαλλήλων. Αν οι μηνιαίες αποδοχές αυξηθούν κατά 20% τότε οι αποδοχές των υπαλλήλων θα γίνουν

$$y_i = x_i + 0,20x_i = 1,2x_i$$

$$\mu_y = \frac{\Sigma y_i}{N} = \frac{1,2\Sigma x_i}{N} = 1,2\mu_x \Rightarrow \mu_y = 1680$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y_i - \mu_y)^2}{\nu} = \frac{\Sigma(1,2x_i - 1,2\mu_x)^2}{\nu} = 1,2^2\frac{\Sigma(x_i - \mu_x)^2}{\nu}$$

$$= 1,2^2 \cdot 1600 = 2304$$

ή με χρήση ιδιοτήτων

6). Σε ένα εργοστάσιο εργάζονται 100 ειδικευμένοι άνδρες με μέσο ημερομίσθιο $\mu_1 = 500€$, 70 ειδικευμένες γυναίκες με μέσο $\mu_2 = 380€$ και 40 μαθητευόμενα παιδιά με μέσο ημερομίσθιο $\mu_3 = 220€$. Να βρεθεί το μέσο ημερομίσθιο όλων των εργατών μαζί.

Λύση

Ο τύπος που θα μας δώσει το μέσο

ημερομίσθιο όλων των εργατών μαζί, θα είναι:

$$\mu = \frac{\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}$$

όπου

$\mu_1 = 550$ € με $\nu_1 = 100$

$\mu_2 = 380$ € με $\nu_2 = 70$

$\mu_3 = 220$ € με $\nu_3 = 40$

$$\mu = \frac{520 \cdot 100 + 380 \cdot 70 + 220 \cdot 40}{100 + 70 + 40} =$$

$$= \frac{52000 + 26600 + 8800}{210} = 416{,}19 \text{ €}$$

7) Δίνεται παρακάτω η κατανομή 100 υπαλλήλων μιας μεγάλης επιχείρησης

Τάξεις	350-360	360-370	370-380	380-390	390-4
f_i	8	28	44	16	4

Ζητείται:

α) Η διάμεσος και το τρίτο δεκατημόριο

β) Το ποσοστό των υπαλλήλων που παίρνει

i) 375 € και κάτω

ii) 365 € και άνω

iii) μεταξύ 368 και 395 €

Λύση

α) Όταν έχουμε κατανομή συχνοτήτων σε μορφή τάξεων, η διάμεσος υπολογίζεται με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)$$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Τάξεις	f_i	F_i
350-360	8	8
360-370	28	36
370-380	44	80
380-390	16	96
390-400	4	100
	100	

$$\frac{3n}{10} = 30 \qquad \frac{n}{2} = 50$$

Η τιμή της διαμέσου θα είναι:

$$M = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right) = 370 + \frac{10}{44}(50-30)$$

$$= 373,18$$

Το τρίτο δεκατημόριο δίνεται από τον τύπο:

$$D_k = a_{i-1} + \frac{\delta}{f_i}\left(\frac{kn}{10} - F_{i-1}\right)$$

άρα

$$D_3 = 360 + \frac{10}{28}(30-8) = 360 + \frac{220}{28} = 367,86$$

β). Το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει
i) 375 € και κάτω θα είναι:
Μέχρι 370€ έχουμε συνολικό ποσοστό 36

Σε πλάτος 10 αντιστοιχεί ποσοστό 44
5 ;

$$x = \frac{44 . 5}{100} = 22$$

Άρα το συνολικό ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει 375 € και κάτω θα είναι
36+22= 58%

ii) Το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει 365€ και άνω θα είναι:
Μέχρι 360 € έχουμε ποσοστό 8%
Σε πλάτος 10 αντιστοιχεί 28
5 ; = 14

Άρα το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει 365 και κάτω θα είναι 8+14= 22 και κατά συνέπεια το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει 365€ και άνω θα είναι:
100 - 22 = 78%

iii) Το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει μεταξύ 368 και 395€ υπολογίζεται ως εξής:
Υπολογίζουμε πρώτα το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει 368 και κάτω και μετά το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει 395€ και κάτω. Η διαφορά αυτών μας

Είναι το ζητούμενο ποσοστό, δηλ. το ποσοστό των υπαλλήλων που παίρνει 368€ και κάτω θα είναι:

Μέχρι 360 € αντιστοιχεί ποσοστό 8%

Σε πλάτος 10 έχουμε ποσοστό 28

8 ; = 22,4

Άρα, το ποσοστό των υπαλλήλων που παίρνει 368€ και κάτω θα είναι

$8 + 22,4 = 30,4\%$

Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το ποσοστό των υπαλλήλων που παίρνει 395€ και κάτω θα είναι:

Μέχρι 390 € αντιστοιχεί ποσοστό 96

Σε πλάτος 10 έχουμε ποσοστό 4

5 ; = 2

Άρα, το ποσοστό των υπαλλήλων που παίρνει 395€ και κάτω θα είναι $96+2=98\%$

Κατά συνέπεια το ζητούμενο ποσοστό των υπαλλήλων που παίρνει μεταξύ 368 και 395 θα είναι:

$98 - 30,4 = 67,6\%$

α κοινοπραξία των δημοσίων υπαλλήλων
ς πόλεως έχουν κατά μέσο όρο $\mu=2,63$
ωμάτια. Από τον πίνακα συχνοτήτων
ν της μεταβλητής X = αριθμός δωματίων
ου σβήστηκαν οι συχνότητες των τιμών
2 και $x=3$.

Αριθμός δωματίων x_i	Ποσοστό $f_i\%$
1	16
2	–
3	–
4	26
	100

α υπολογίσετε η διάμεσος και το Q_3.

Λύση
έστω α και β οι συχνότητες που έχουν σβηστεί.
Από τα δεδομένα μπορούμε να σχηματίσουμε το παρακάτω
σύστημα, από το οποίο θα υπολογίσουμε
το α και το β.

$$16+\alpha+\beta+26=100 \Rightarrow \alpha+\beta=58 \quad (1)$$

Χρειαζόμαστε και μια δεύτερη εξίσωση.
Γνωρίζουμε την τιμή του μ άρα έχουμε:

$$\mu = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} \Rightarrow 2{,}63 = \frac{16 + 2\alpha + 3\beta + 4 \cdot 26}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 263 = 120 + 2\alpha + 3\beta \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 143 \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 58 \\ 2\alpha + 3\beta = 143 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 58 - \beta \\ 2(58-\beta) + 3\beta = 143 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \beta = 27 \\ \alpha = 31 \end{matrix}}$$

Για τον υπολογισμό της M και Q_3
σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	f_i	F_i
1	16	16
2	31	47
3	27	74
4	26	100
	100	

$M = 3$
$Q_3 = 4$

2). Ο διευθυντής προσωπικού μιας εταιρείας έχει στην διάθεσή του έναν πίνακα που δείχνει τον αριθμό των απόντων υπαλλήλων κάθε μέρα. Ο μέσος αριθμός των απόντων είναι 5,5 και η τυπική απόκλιση είναι 2,5. Επειδή υπάρχουν πολλές μέρες με απόντες 0, 1 ή 2 υπαλλήλους και μόνο μερικές μέρες με περισσότερους από 10 απόντες, η κατανομή των δεδομένων είναι ασύμμετρη. Ο διευθυντής προσωπικού θέλει να δημιουργήσει ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκονται τουλάχιστον 75% των αριθμών των απόντων υπαλλήλων. Να βρεθεί ένα τέτοιο διάστημα με τη χρήση του θεωρήματος Chebyshev.

Λύση

$\bar{x} = 5,5 \qquad s = 2,5$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Chebyshev στο διάστημα $(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks)$ θα πρέπει να βρίσκεται τουλάχιστον ένα ποσοστό $1 - \frac{1}{k^2}$ των παρατηρήσεων.

Έχουμε: $1 - \frac{1}{k^2} = 0,75 \Rightarrow \frac{1}{k^2} = 0,25 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ γιατί $k \geq 1$

Συνεπώς το διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) =$
$= (5,5 - 2 \cdot 2,5 \;,\; 5,5 + 2 \cdot 2,5) = (0,5 \;,\; 10,5)$
βρίσκονται 75% τουλάχιστον από τις παρατηρήσεις που είναι αριθμοί των απόντων των υπαλλ. της εταιρείας