Ασκήσεις Πιθανοτήτων

1). Ρίχνουμε 2 ζάρια. Τι πιθανότητες έχουμε να φέρουμε:

i) άθροισμα ενδείξεων 7

ii) άθροισμα τετραγώνων των ενδείξεων 4

Λύση

i) Σχηματίζουμε τον αντίστοιχο δειγματικό χώρο

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{άθροισμα ενδείξεων } 7) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$= 0,1667$$

ή 16,67%

ii).

	1	2	3	4	5	6
1	2	5	10	17	26	37
2	5	8	13	20	29	40
3	10	13	18	25	34	45
4	17	20	25	32	41	52
5	26	29	34	41	50	61
6	37	40	45	52	61	72

$$P(\text{αθρ. τετρ. } 4) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

$$= \frac{0}{36} = 0$$

<u>αδύνατο</u> γεγονός

2 Έναν νομό στο 16% των αντρογύνων και οι δυο σύζυγοι είναι φορείς κάποιας ασθένειας. Το 22% των έγγαμων ανδρών και το 20% των έγγαμων γυναικών είναι φορείς της ασθένειας. Παίρνουμε τυχαία ένα νεογέννητο παιδί. Τι πιθανότητα έχει να είναι φορέας της ασθένειας από κληρονομικότητα (Φορέας από κληρονομικότητα γίνεται ένα παιδί αν τουλάχιστον ένας από τους γονείς του είναι φορέας αυτής της ασθένειας).

<u>Λύση</u>

Π = { ο πατέρας του παιδιού είναι φορέας }
Μ = { η μητέρα του παιδιού είναι φορέας }

Από την εκφώνηση έχουμε

$P(\Pi) = 0.22$

$P(M) = 0.20$

$P(\Pi \cap M) = P(\Pi M) = 0.16$

B = { το νεογέννητο είναι φορέας }

$P(B) = P(\Pi \cup M) = P(\Pi) + P(M) - P(\Pi \cap M) = 0.26$

Να βρεθεί η πιθανότητα P(A), όπου A το ενδεχόμενο να έλθει μια φορά «γράμματα» σε ρίψεις τριών αμερόληπτων νομισμάτων.

<u>Λύση</u>

K = {κορώνα}

Γ = {γράμματα}

Ω = {ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΚΚΚ, ΓΓΓ}

A = {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}

το γεγονός είναι ισοπίθανο

$$P(A) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{3}{8}$$

1). Ας θεωρήσουμε τις στατιστικές γεννήσεων για τον πληθυσμό των ΗΠΑ το 1987. Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα, οι πιθανότητες για μια τυχαία επιλεγμένη γυναίκα που γέννησε το 1987, να ανήκει σε καθεμιά από τις ακόλουθες ηλικιακές ομάδες είναι:

Ηλικία	Πιθανότητα
<15	0,0027
15-19	0,1214
20-24	0,2824
25-29	0,3192
30-34	0,1997
35-39	0,0651
40-44	0,0091
45-49	0,0004
Σύνολο	1

Α. Ποια είναι η πιθ/τα μια γυναίκα που γέννησε το 1987 να είναι 24 ετών ή νεότερη;

Β. Ποια η πιθ/τα να είναι 40 ετών ή μεγαλύτερη;

Γ. Δεδομένου ότι η μητέρα ενός συγκεκριμένου βρέφους είναι νεότερη των 30 ετών, ποια η πιθ/τα να μην είναι ανώρα 20 ετών;

Λύση

Α. P(να είναι 24 ετών ή νεότερη) =
= P(να είναι < 15) + P(15-19) + P(20-24) =
= 0.0027 + 0,1214 + 0,2824 = 0,4065

Β. P(να είναι 40 ετών ή μεγαλύτερη) =
= P(40-44) + P(45-49) = 0,0091 + 0,0004 = 0,0095

Γ. $P(\underbrace{\text{να μην είναι ανώρα 20 ετών}}_{A} \mid \underbrace{\text{ότι είναι νεότερη των 30}}_{B}) =$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,0027 + 0,1214}{0,0027 + 0,1214 + 0,2824 + 0,3192} = 0,171$$

Στας εισαγωγικές εξετάσεις των Ανωτάτων Σχολών κάθε υποψήφιος κρίνεται "ικανός" ή "μη-ικανός" από το αν πέρασε ή δεν πέρασε το τεστ. Από τους πραγματικά ικανούς υποψήφιους, 80% περνούν το τεστ και από τους πραγματικά μη ικανούς 25% περνούν το τεστ. Γνωρίζοντας ότι 40% από τους υποψήφιους είναι πραγματικά ικανοί, ποιο είναι το ποσοστό των "ικανών" των Ανωτάτων Σχολών;

<u>Λύση</u>

A = {ο υποψήφιος είναι πραγματικά ικανός}

B = {ο υποψήφιος περνά το τεστ}
= {κρίνεται "ικανός"}

$P(B|A) = 0,8$, $P(B|A') = 0.25$, $P(A) = 0.4$

$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') = 0.47$

Ασκήσεις

1. Υποθέστε ότι έχετε 40% πιθ/τα να δεχθείτε πρόταση πρόσληψης από την επιχείρηση που έρχεται πρώτη στις προτιμήσεις σας, 40% πιθ/τα να δεχθείτε πρόταση πρόσληψης από την επιχείρηση που έχετε τοποθετήσει στη δεύτερη θέση των προτιμήσεών σας και 16% πιθ/τα να δεχθείτε πρόταση και από τις δύο εταιρείες. Ποια η πιθ/τα να δεχθείτε πρόταση πρόσληψης από οποιαδήποτε από τις 2 εταιρείες;

<u>Λύση</u>

$A = \{$πρόσληψη από την 1η εταιρεία$\}$
$B = \{$ » » » 2η » $\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,40 + 0,40 - 0,16 = 0,64$$

2. Αν υπάρχει πιθ/τα 0,25 η εταιρεία Α να κτίσει το νέο της εργοστάσιο στην πόλη σας και πιθ/τα 0,25 να κτίσει το νέο της εργοστάσιο στη διπλανή πόλη, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πιθ/τα 0.5 να κτίσει η εταιρεία Α το νέο της εργοστάσιο σε μια από τις 2 πόλεις;

<u>Λύση</u>

Με την προϋπόθεση ότι η εταιρεία δεν

επιτρέπει να κτίσει εργοστάσιο και στις 2 πόλεις (πρόγραμμα που σημαίνει ότι το ενδεχόμενο να κτίσει το νέο εργοστάσιο στην πόλη Α και το ενδεχόμενο να κτίσει στην άλλη πόλη αλληλοαποκλείονται) είναι σωστό να προσθέσετε τις πιθανότητες και να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα να κτίσει το εργοστάσιο σε οποιαδήποτε από τις δύο πόλεις είναι 0,5.

3. Πότε προσθέτουμε τις πιθανότητες των δύο ενδεχομένων;

Προσθέτουμε τις πιθανότητες των 2 ενδεχομένων όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβεί οποιοδήποτε από αυτά, με την προϋπόθεση ότι τα 2 ενδεχόμενα είναι αλληλοαποκλειόμενα.

4. Ποια είναι η $P(A|B)$ αν το A και B είναι (αλληλοαποκλειόμενα)

Αν είναι αλληλοαποκλειόμενα τότε το A δεν μπορεί να συμβεί αν το B έχει συμβεί, άρα $P(A|B)=0$

5. Αν η πιθ/τα να πάρετε μια παραγγελία από την εταιρεία Α είναι 0,3 και η πιθ/τα να πάρετε μια παραγγελία από την εταιρεία Β είναι 0,4 μήπως αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πιθ/τα 0,12 να πάρετε μια παραγγελία και από τις δύο εταιρείες;

Ο συλλογισμός αυτός ισχύει αν τα δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα με άλλα λόγια αν η πιθ/τα να πάρετε μια παραγγελία από την εταιρεία Β δεν επηρεάζεται από το αν θα πάρετε ή όχι παραγγελία από την εταιρεία Α

Σημείωση

Τα αλληλοαποκλειόμενα γεγονότα δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα.

3. Μια τάξη Μαθ/κών σε ένα Λύκειο έχει 35 σπουδαστές, από τους οποίους 12 είναι άνδρες και 23 γυναίκες. Έξι γυναίκες και 2 άνδρες κάνουν Πληροφορική. Αν επιλέξει κάποιος μαθητής, να βρεθεί
α) Η πιθ/τα να κάνει Πληροφορική
β) Η πιθ/τα να είναι άνδρας και να κάνει Πληροφορική

Λύση

Δημιουργούμε τον εξής πίνακα

	Κάνουν Πληρ.	Δεν κάνουν Πληροφορική	Σύνολο
Άνδρες	2	10	12
Γυναίκες	6	17	23
Σύνολο	8	27	35

α) 8/35 β) 2/35

4. Ένας πωλητής προσωπικών υπολογιστών (PC) συναντά είτε ένα είτε 2 υποψήφιους πελάτες κάθε μέρα, με πιθ/τες να αγοράσουν υπολ. 0,6 και 0,4 αντίστοιχα. Αν ο πωλητής συναντήσει μόνο έναν πελάτη η πιθ/τα είναι 0,2 ότι θα αγοράσει ένας υπολ/στή και 0,8 ότι δεν θα αγοράσει. Αν ο πωλητής συναντήσει 2 πελάτες, κάθε ένας από αυτούς θα αγοράσει υπολ/στή με πιθ/τα 0,2 ανεξ. από την επιλογή του άλλου. Ποια είναι η πιθ/τα ο πωλητής να κάνει 2 πωλήσεις στο τέλος της μέρας.

Λύση

Έχουμε:

P(2 πωλήσεις) = P(2 κινητ. τηλ. και 2 αγορ.)

= P[και 2 αγορ | 2 κινητ. τηλ.) · P(2 κινητ. τηλ)

$= (0.2)^{(0.2)}(0.24) = 0,01$

γιατί οι 2 αγοραστές είναι ανεξάρτητοι

P(και οι 2 αγορ. | 2 κιν. τηλ) $= (0,2)(0,2) = 0,04$

Ασκήσεις
(άλυτες ασκήσεις και σημειώσεις)

2. <u>Λύση</u>

Ορίζουμε τα γεγονότα

A = {το άτομο που πάσχει για εξέταση πάσχει από καρκίνο}

B = {η ακτινογραφία είναι θετική}

$p(A) = 0.30 \Longrightarrow p(A') = 0.70$

$p(B/A) = 0.85 \Rightarrow p(B'/A) = 0.15$

$p(B'/A') = 0.95 \Rightarrow p(B/A') = 0.05$

I. $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap A') =$

$= p(A)p(B/A) + p(A')p(B/A') = 0.29$

II. $p(A/B') = \dfrac{p(A)p(B'/A)}{p(B')} = \dfrac{0.045}{1 - 0.29} = 0.063$

Δηλ. στο I ερώτημα η απάντηση είναι 29% και στο II 6.3%

Να Τυπώσω

3. α) Για να είναι ανεξάρτητα τα Α΄, Β θα πρέπει:

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B) \quad \text{ή}$$

$$P(A'|B) = P(A')$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A'|B) + P(A|B) = 1 \Rightarrow P(A'|B) + P(A) = 1$$

$$\Rightarrow P(A'|B) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A'|B) = P(A')$$

Άρα A', B ανεξάρτητα

β) Ομοίως για να είναι ανεξάρτητα τα Α και Β΄ θα πρέπει:

$$P(B'|A) = P(B')$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$P(B'|A) + P(B|A) = 1 \Rightarrow P(B'|A) + P(B) = 1$$

$$\Rightarrow P(B'|A) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B'|A) = P(B')$$

γ) Ομοίως για τα A', B' θα πρέπει $P(A'|B') = P(A')$

$$P(A'|B') + P(A|B') = 1 \Rightarrow P(A'|B') = 1 - P(A|B') = P(A')$$

Θα έχουμε:

$$p(\Lambda_1)=\frac{5}{12}, \quad p(\Lambda_2)=\frac{5}{18}$$

$$p(K_1)=\frac{1}{3}, \quad p(K_2)=\frac{1}{3}$$

$$p(M_1)=\frac{1}{4}, \quad p(M_2)=\frac{7}{18}$$

Επειδή οι εξαγωγές των 2 σφαιριδίων από τα δύο κάλπες είναι <u>ανεξάρτητα</u> γεγονότα θα έχουμε:

$$p(\Lambda_1\cap\Lambda_2)=p(\Lambda_1)\,p(\Lambda_2)=\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{18}=\frac{25}{216}$$

$$p(K_1\cap K_2)=p(K_1)\,p(K_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$p(M_1\cap M_2)=p(M_1)\,p(M_2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{18}=\frac{7}{72}$$

Επειδή $(\Lambda_1\cap\Lambda_2)\cap(K_1\cap K_2)\cap(M_1\cap M_2)=\varnothing$ τα 3 γεγονότα είναι ασυμβίβαστα ανά 2 μεταξύ

$$p(E)=p(\Lambda_1\cap\Lambda_2)+p(K_1\cap K_2)+p(M_1\cap M_2)=\frac{25}{216}+\frac{1}{9}+\frac{7}{72}=\frac{35}{108}$$

Το ζητούμενο π.θ./το