Ιδιότητες μέσου

1) X μεταβλητή, x_i τιμές της, μ_x
$i=1,\dots,\nu$

$$Y = X + a, \quad y_i = x_i + a \Longrightarrow \mu_y = \mu_x + a$$

Απόδειξη

$$\mu_y = \frac{\Sigma y_i}{\nu} = \frac{\Sigma(x_i+a)}{\nu} = \frac{\Sigma x_i + \Sigma a}{\nu} = \frac{\Sigma x_i}{\nu} + \frac{\nu a}{\nu}$$

$$= \mu_x + a$$

Άσκηση

Η μέση βαθμολογία στα μαθηματικά σε μια τάξη Λυκείου είναι 12. Αν ο καθηγητής αποφασίσει να αυξήσει τη βαθμολογία κάθε μαθητή κατά 2 μονάδες, ποιά μεταβολή επέρχεται στη μέση βαθμολογία;

Λύση

X η βαθμολογία στο μάθημα

$x_i \quad i=1,\dots,\nu$

$\mu_x = 12$

$Y = X + 2, \quad y_i = x_i + 2$

$$\mu_y = \frac{\Sigma y_i}{\nu} = \frac{\Sigma(x_i+2)}{\nu} = \frac{\Sigma x_i + \Sigma 2}{\nu} = \frac{\Sigma x_i}{\nu} + \frac{2\cancel{\nu}}{\cancel{\nu}} = 12+2 = 14$$

2) X, $x_1 = x_2 = \dots = x_i = \dots = x_N = a \Rightarrow \mu = a$

<u>Απόδειξη</u>

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a}{N} = \frac{a+a+\dots+a}{N} = \frac{\cancel{N}a}{\cancel{N}} = a$$

3) X, x_i, μ_x

$Y = \lambda X$, $y_i = \lambda x_i \Rightarrow \mu_y = \lambda \mu_x$

<u>Απόδειξη</u>

$$\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda x_i}{N} = \lambda \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \lambda \cdot \mu_x$$

4) $\sum (x_i - \mu) = \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} \mu = \sum_{i=1}^{N} x_i - N\mu$ *

από τον τύπο της μέσης τιμής $\mu = \frac{\sum x_i}{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum x_i = \mu N$

* $N\mu - N\mu = 0$

Ιδιότητες της διασποράς

1) $X,\ x_1 = x_2 = \dots = x_i \dots a \Rightarrow \sigma^2 = 0$

Απόδειξη

$$\sigma^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma (a - a)^2 = 0$$

2) $X,\ x_i,\ \mu,\ \sigma^2 \Rightarrow Y = X + a,\ y_i = x_i + a,\ \mu_y = \mu_x + a$

$\Rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2$

Απόδειξη

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma (y_i - \mu_y)^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma \left[(x_i + a) - (\mu_x + a)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\nu} \Sigma (x_i + \cancel{a} - \mu_x - \cancel{a})^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma (x_i - \mu_x)^2 = \sigma_x^2$$

3) $X,\ x_i,\ \mu_x,\ \sigma_x^2 \Rightarrow Y = \lambda X,\ y_i = \lambda x_i,\ \mu_y = \lambda \mu_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_y^2 = \lambda^2 \sigma_x^2$ και $\sigma_y = \lambda \sigma_x$

Απόδειξη

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma (y_i - \mu_y)^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma (\lambda x_i - \lambda \mu_x)^2 = \lambda^2 \frac{1}{\nu} \Sigma (x_i - \mu_x)^2$$

$$= \lambda^2 \sigma_x^2$$

$$\sigma_y = \lambda \sigma_x$$