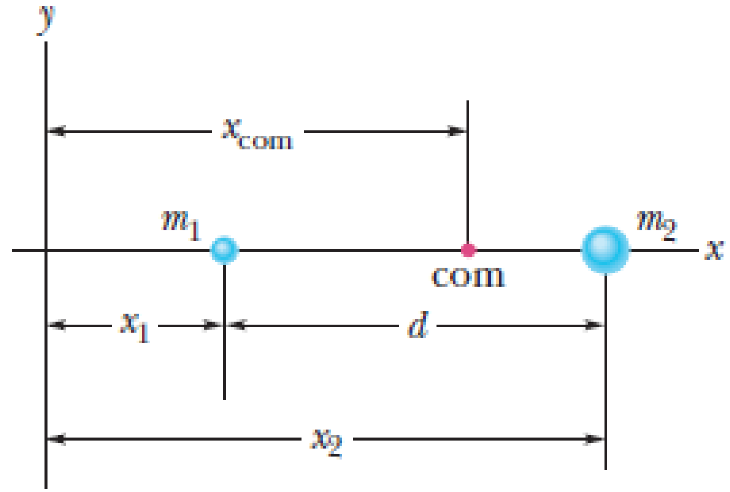
Ορμή

Κέντρο μάζας: Το σημείο το οποίο κινείται σαν όλη η μάζα του συστήματος να είναι συγκεντρωμένη εκεί και όλες οι εξωτερικές δυνάμεις να ασκούνται στο σημείο αυτό.

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$



Γραμμική ορμή: $\vec{p} = m\vec{v}$ $\qquad \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Η γραμμική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων είναι ίση με το γινόμενο της ολικής μάζας m του συστήματος και της ταχύτητας του κέντρου μάζας του.

Κρούση: Άσκηση δύναμης από ένα σώμα σε ένα άλλο για ελάχιστο χρόνο → μεταβολή της ορμής

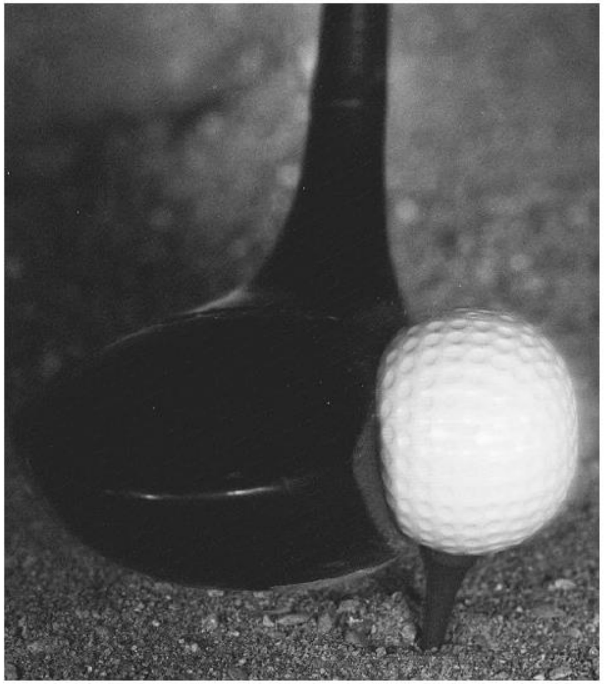
Ώθηση: μέτρο της δύναμης κρούσης ή το αποτέλεσμα της εξάσκησης δύναμης σε ένα σώμα

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt \quad \text{ή} \quad J = F_{\text{avg}}\, \Delta t$$

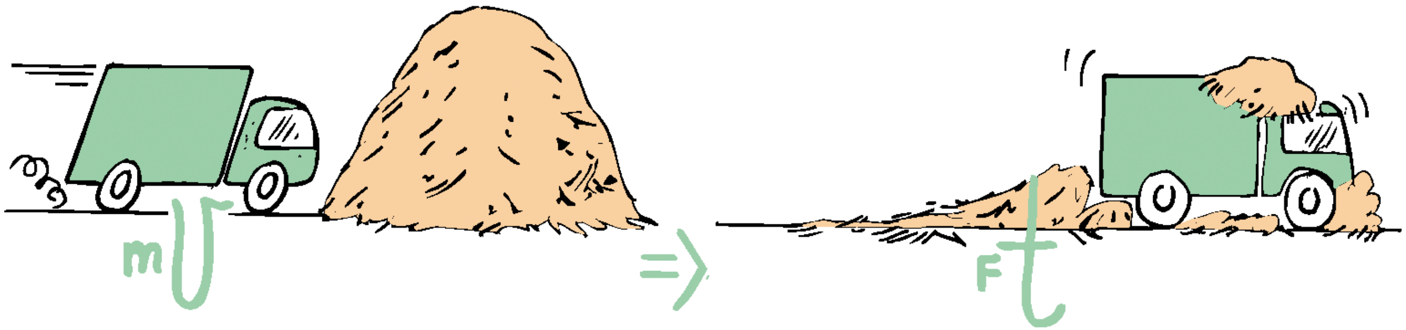
Θεώρημα της γραμμικής ορμής-ώθησης

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J}$$

Αν καμία συνισταμένη εξωτερική δύναμη δεν δρα πάνω σε ένα σύστημα σωματιδίων, η ολική γραμμική ορμή P του συστήματος δεν μπορεί να μεταβληθεί → $\mathbf{J = 0}$ και $\mathbf{P_i = P_f}$

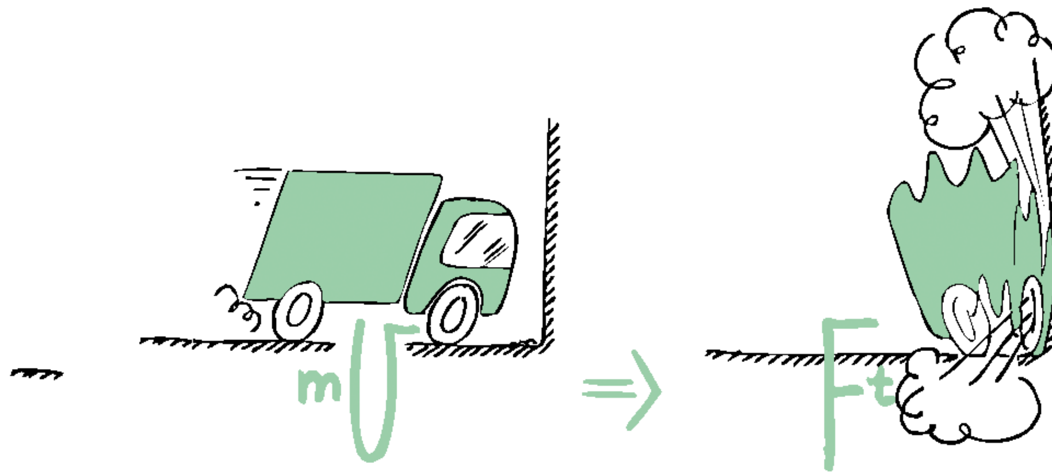


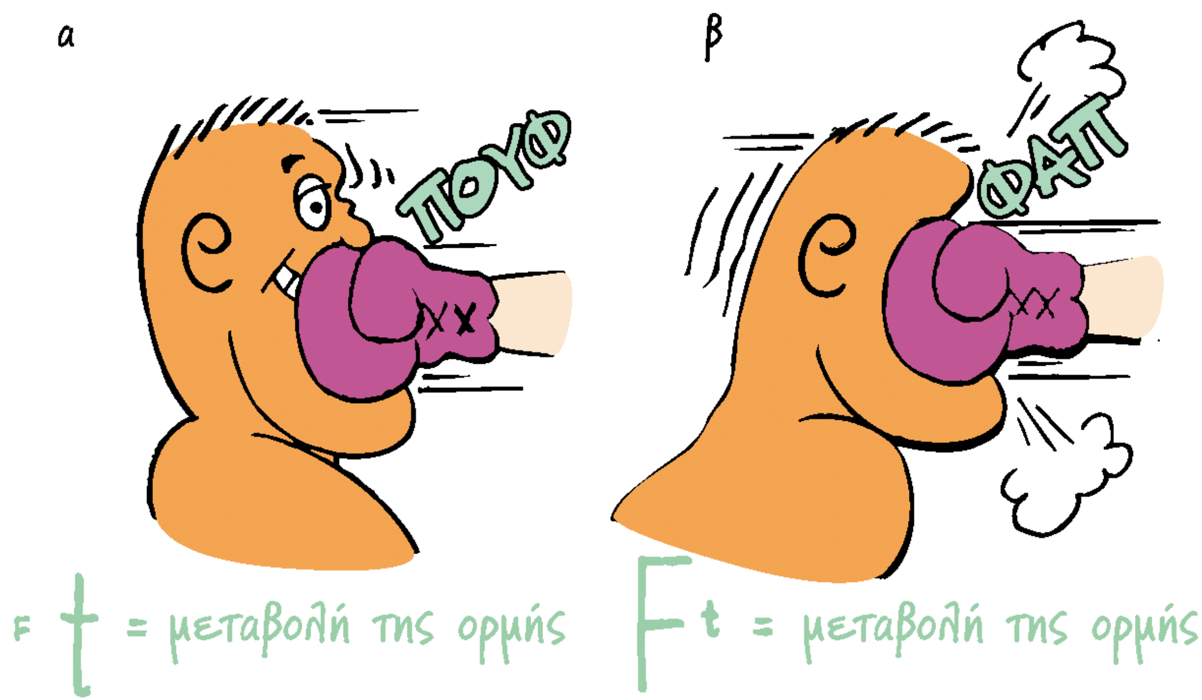
ΕΙΚΟΝΑ 6.2 Δύναμη κρούσης σε μια μπάλα του γκολφ.



ΕΙΚΟΝΑ 6.3 Μεγάλη μεταβολή της ορμής σε μεγάλο χρονικό διάστημα απαιτεί μικρή δύναμη.

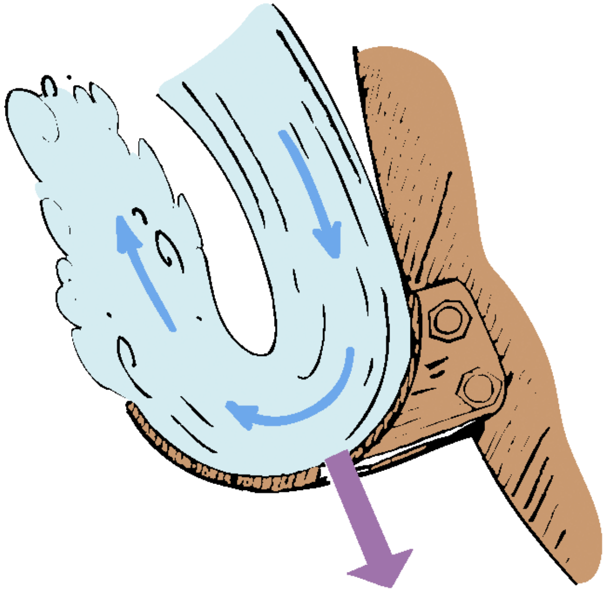
ΕΙΚΟΝΑ 6.4 Μεγάλη μεταβολή της ορμής σε μικρό χρονικό διάστημα απαιτεί μεγάλη δύναμη.

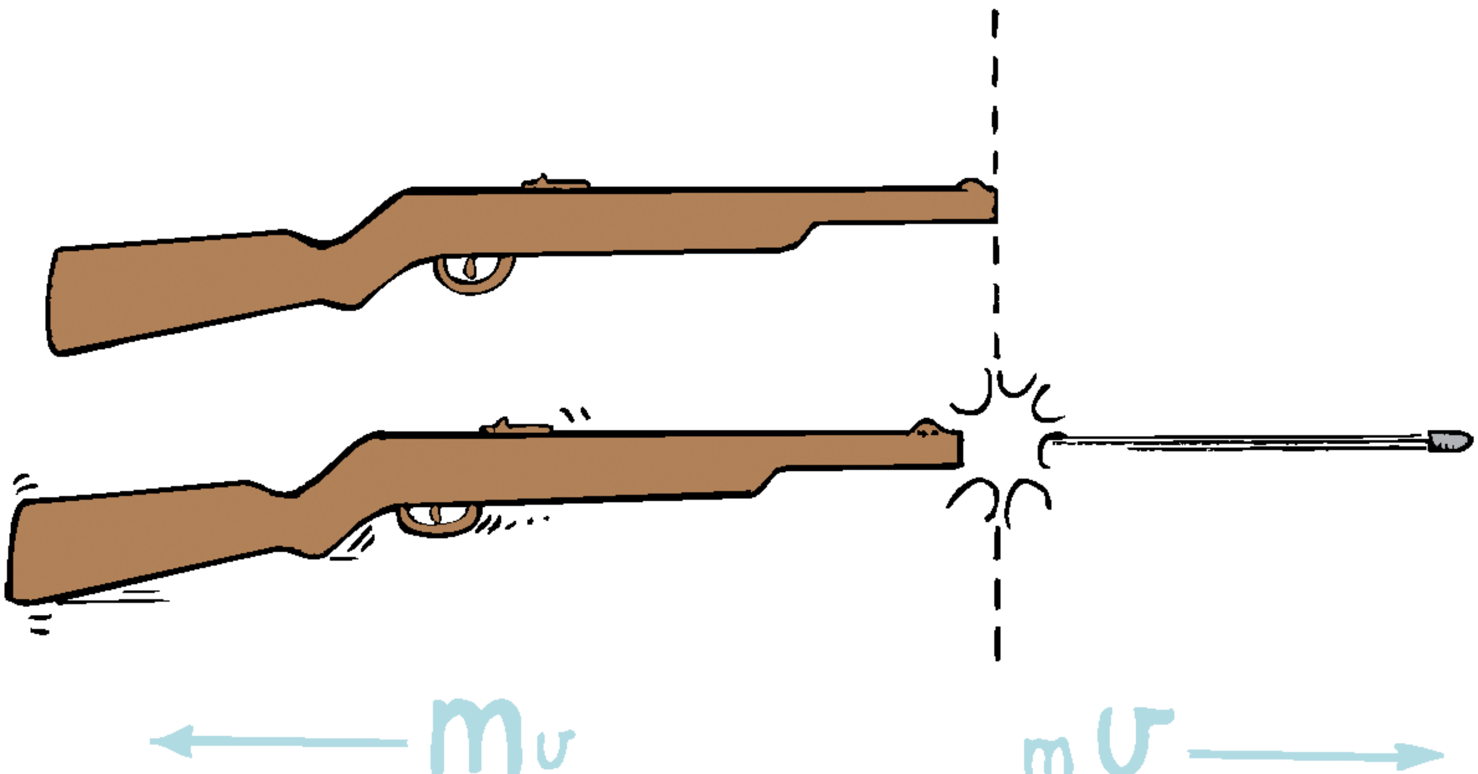




ΕΙΚΟΝΑ 6.6 Και στις δύο περιπτώσεις, η ώθηση η οποία ελαττώνει την ορμή της γροθιάς προέρχεται από το σαγόνι του πυγμάχου. (*α*) Ο πυγμάχος απομακρύνεται καθώς δέχεται το χτύπημα, παρατείνοντας με τον τρόπο αυτό τον χρόνο επαφής. (*β*) Ο πυγμάχος κινείται προς τη γροθιά, ελαττώνοντας με τον τρόπο αυτό τον χρόνο επαφής. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη είναι μεγαλύτερη από όση θα ήταν αν παρέμενε ακίνητος.

ΕΙΚΟΝΑ 6.8 Ο τροχός του Πέλτον. Τα καμπύλα πτερύγια αναγκάζουν το νερό να «αναπηδά», δηλαδή να αναστρέφει την πορεία του, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ώθηση η οποία περιστρέφει τον τροχό.





ΕΙΚΟΝΑ 6.9 Η ορμή πριν από την εκπυρσοκρότηση του όπλου είναι μηδέν. Μετά την εκπυρσοκρότηση, η ολική ορμή εξακολουθεί να είναι μηδέν, αφού η ορμή του όπλου είναι ίση και αντίθετη με αυτήν του βλήματος.

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}.$$

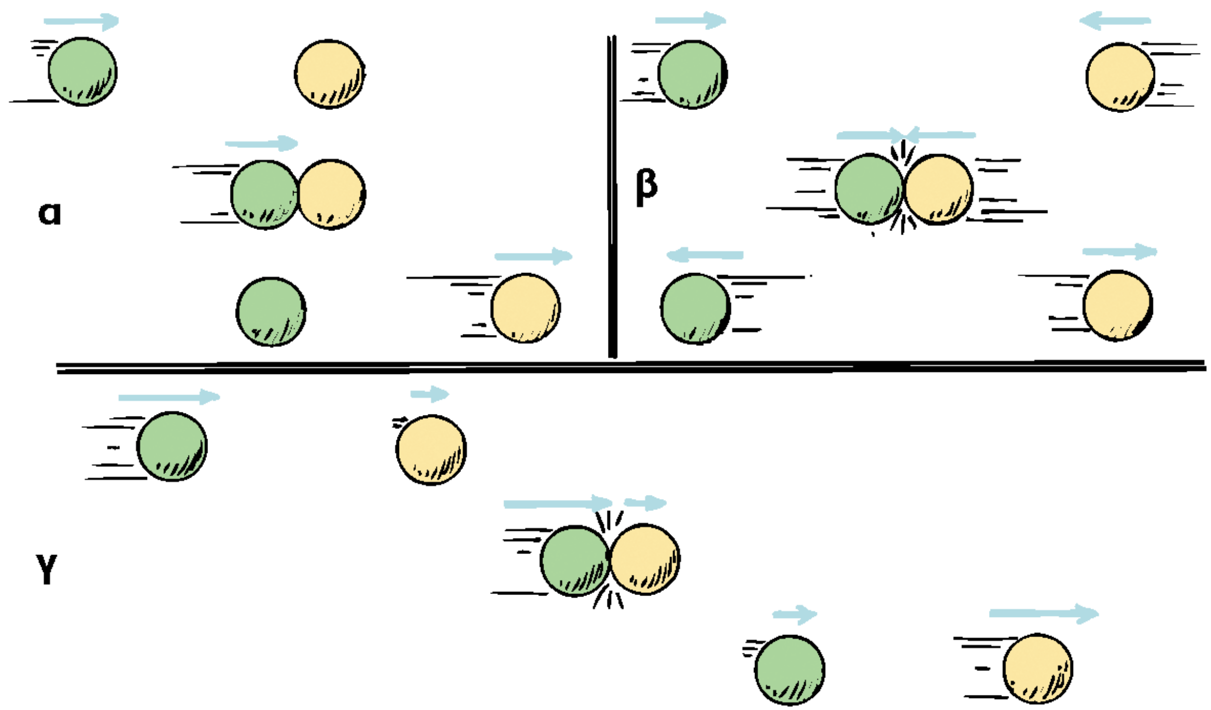
Ελαστική κρούση: Η κινητική ενέργεια διατηρείται

Ανελαστική κρούση: Η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται
(Μονοδιάστατη: Η ολική γραμμική ορμή πριν την κρούση είναι ίση με τη γραμμική ορμή μετά την κρούση)

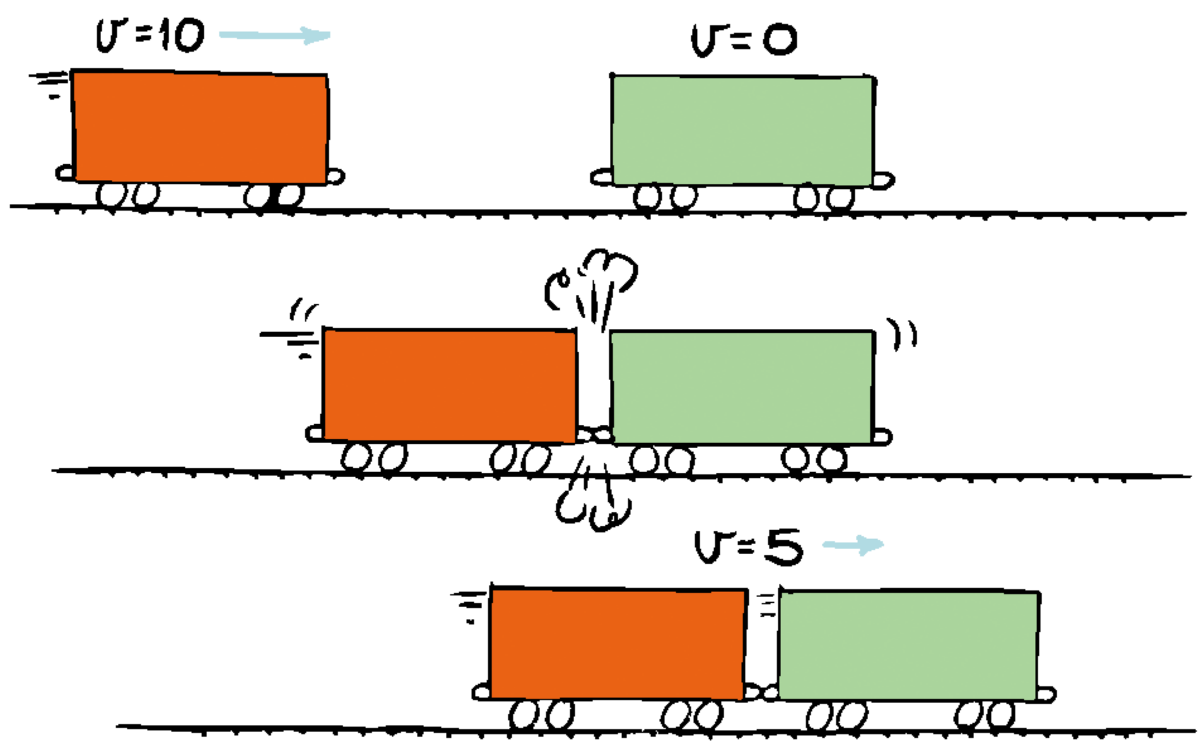
Τέλεια ανελαστική κρούση: Τα σώματα της κρούσης ενώνονται

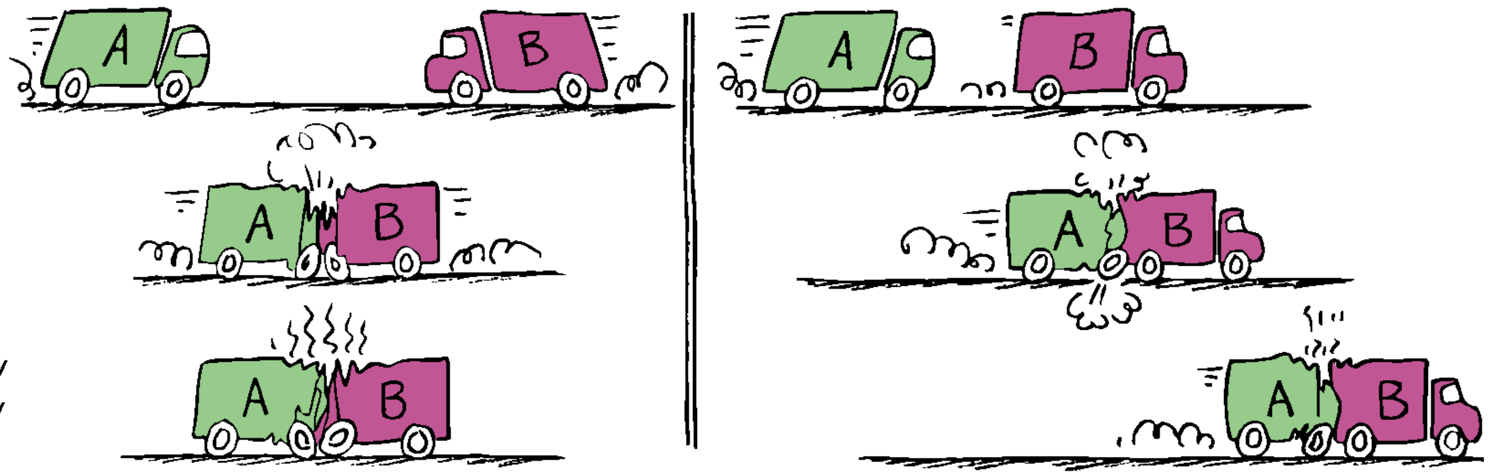
$$V = v_{1i}\, m_1/(m_1+m_2)$$

ΕΙΚΟΝΑ 6.10 Ελαστικές κρούσεις ανάμεσα σε μπάλες μπιλιάρδου ίδιας μάζας. (*α*) Η πράσινη μπάλα χτυπά την κίτρινη, η οποία ήταν αρχικά ακίνητη. (*β*) Μια μετωπική κρούση. (*γ*) Μια κρούση ανάμεσα σε δύο μπάλες που κινούνται στην ίδια κατεύθυνση. Σε όλες τις περιπτώσεις, έχουμε μεταβίβαση ορμής από τη μια μπάλα στην άλλη.



ΕΙΚΟΝΑ 6.11 Ανελαστική κρούση. Μετά τη σύγκρουση, ένα μέρος της ορμής του αριστερού βαγονιού έχει μεταβιβαστεί στο δεξί βαγόνι.





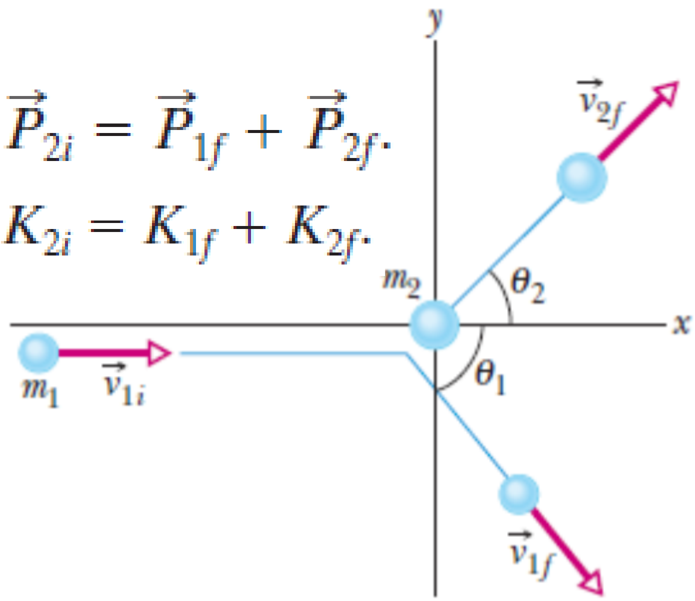
ΕΙΚΟΝΑ 6.12 Ανελαστικές κρούσεις. Η ολική ορμή των οχημάτων πριν και μετά την κρούση είναι η ίδια.

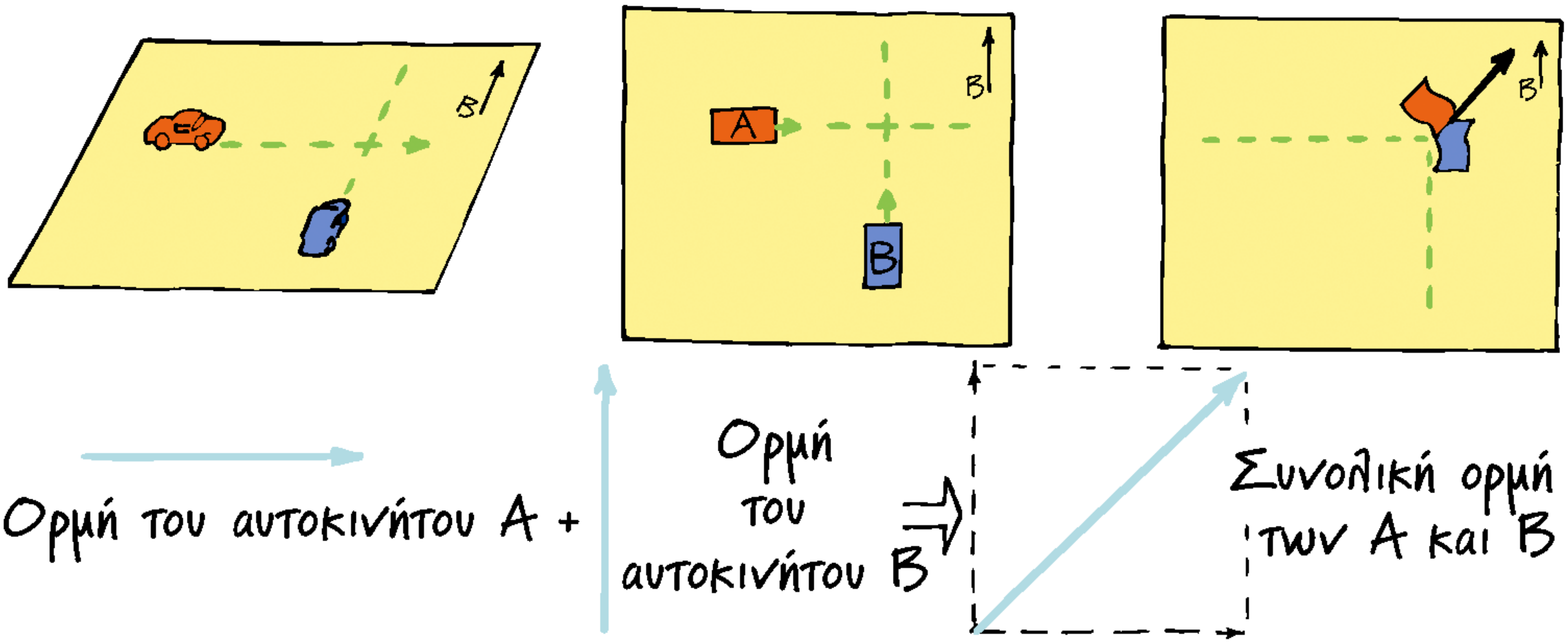
Κρούσεις σε δύο διαστάσεις

Διατήρηση διανυσματικής ορμής

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}.$$

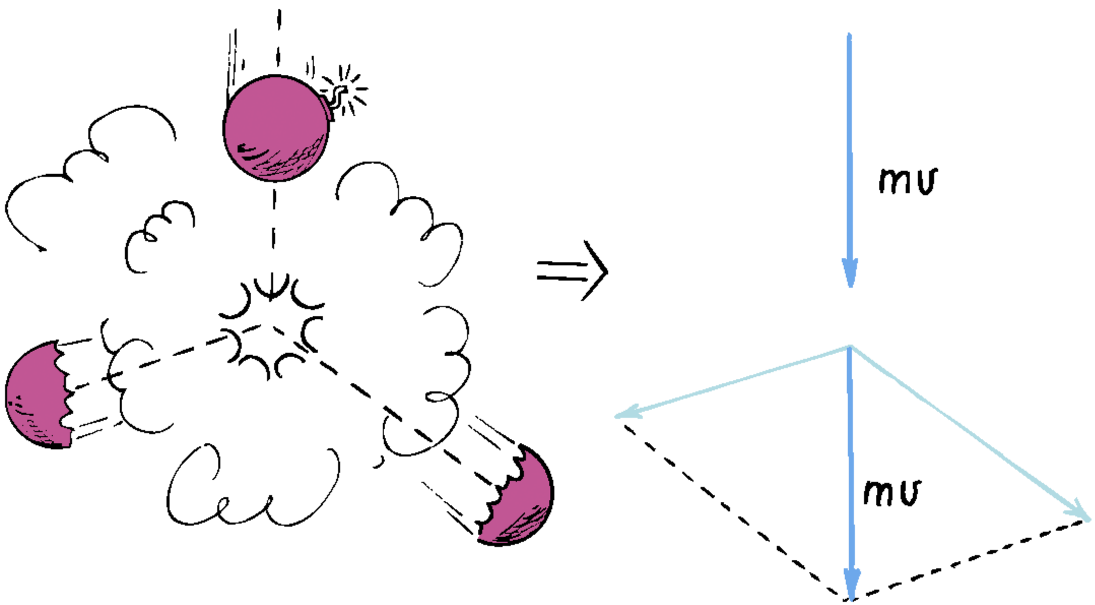
$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}.$$





ΕΙΚΟΝΑ 6.15 Η ορμή είναι διανυσματική ποσότητα.

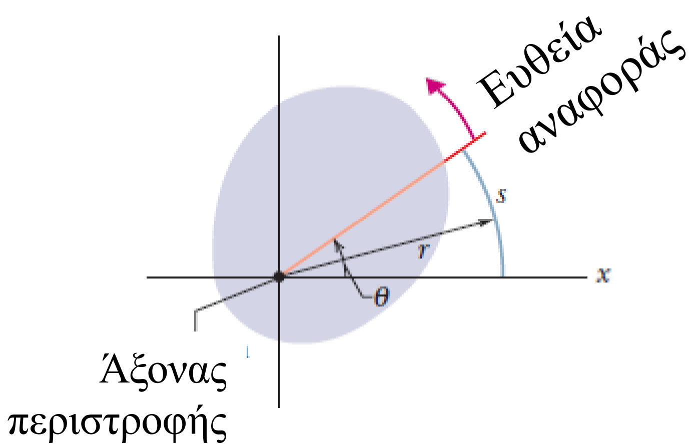
ΕΙΚΟΝΑ 6.16 Μετά την έκρηξη του πυροτεχνήματος, το (διανυσματικό) άθροισμα των ορμών των θραυσμάτων ισούται με την αρχική ορμή.

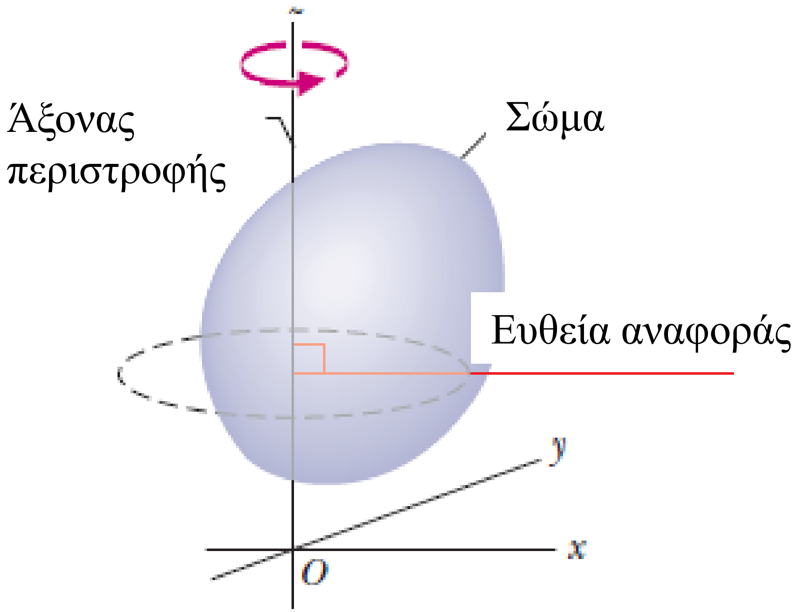


Περιστροφή

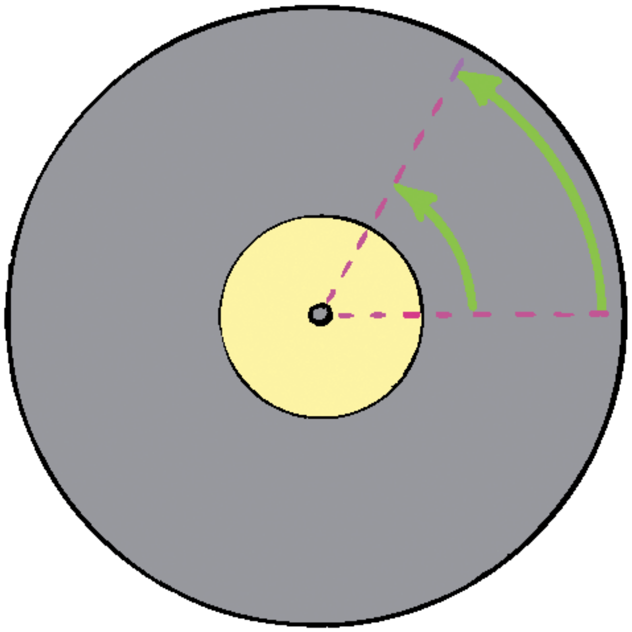
Στερεό σώμα: Μπορεί να περιστρέφεται με όλα τα τμήματά του συγκρατημένα μεταξύ τους και χωρίς καμία μεταβολή στο σχήμα του.

Γωνιακή Θέση: $\theta = s/r$ 1 rad=57.3°

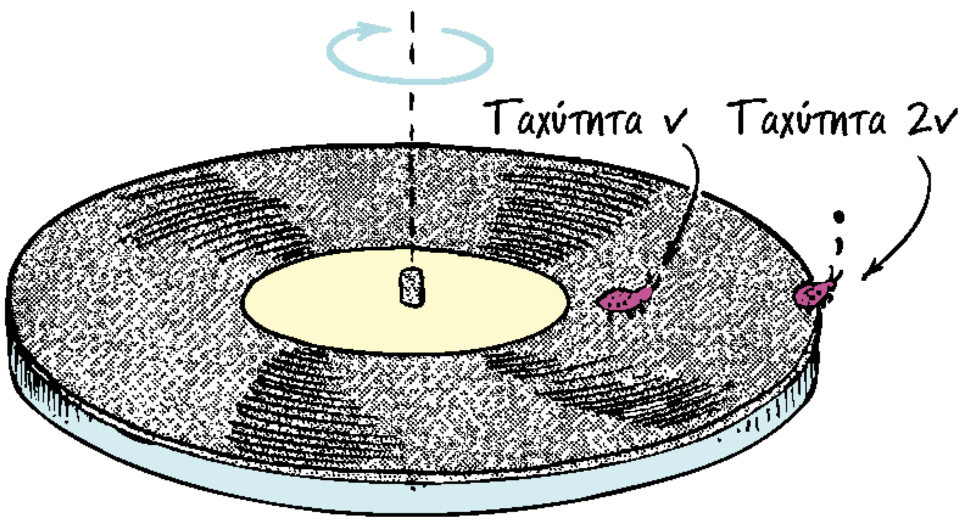




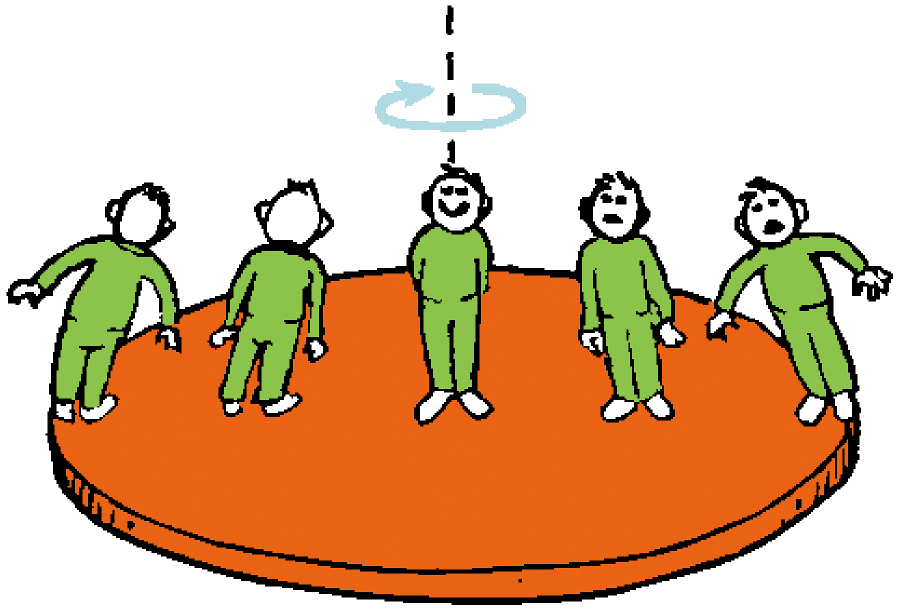
Γωνιακή μετατόπιση: $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$: δεξιόστροφη-θετική (αντίθετη φορά με δείκτες ρολογιού), αριστερόστροφη-αρνητική



ΕΙΚΟΝΑ 8.1 Όταν ένας δίσκος περιστρέφεται στο πικάπ, μια πασχαλίτσα που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο διανύει μεγαλύτερη απόσταση σε δεδομένο χρονικό διάστημα, και επομένως έχει μεγαλύτερη εφαπτομενική ταχύτητα.



ΕΙΚΟΝΑ 8.2 Αν και όλα τα μέρη του δίσκου περιστρέφονται με την ίδια περιστροφική ταχύτητα, οι πασχαλίτσες που βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από το κέντρο κινούνται με διαφορετικές εφαπτομενικές ταχύτητες. Μια πασχαλίτσα που βρίσκεται σε διπλάσια απόσταση από το κέντρο κινείται με διπλάσια ταχύτητα.

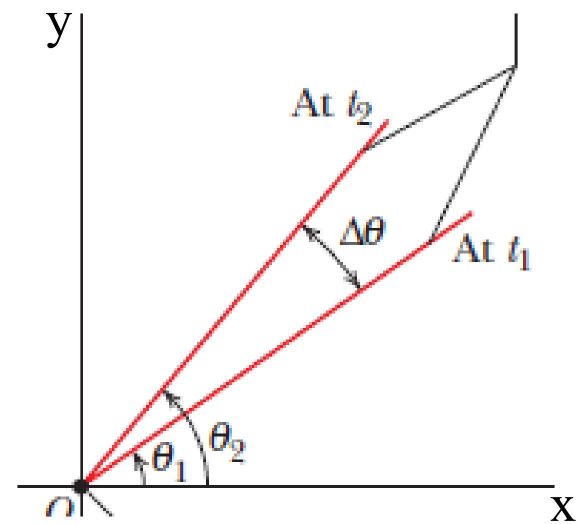


ΕΙΚΟΝΑ 8.3 Η εφαπτομενική ταχύτητα του καθενός είναι ανάλογη προς την περιστροφική ταχύτητα της πλατφόρμας και προς την απόσταση από τον κεντρικό άξονα.

Γωνιακή ταχύτητα: $\omega_{aver}=\Delta\theta/\Delta t$, $\omega_{στιγμ}=d\theta/dt$

Γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha_{aver}=\Delta\omega/\Delta t$, $\alpha_{στιγμ}=d\omega/dt$

Εξισώσεις Κίνησης για α=σταθερή



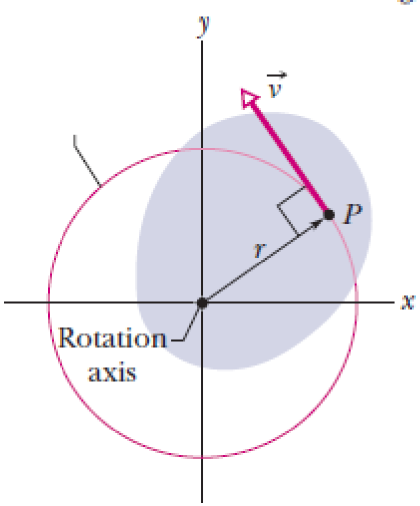
$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

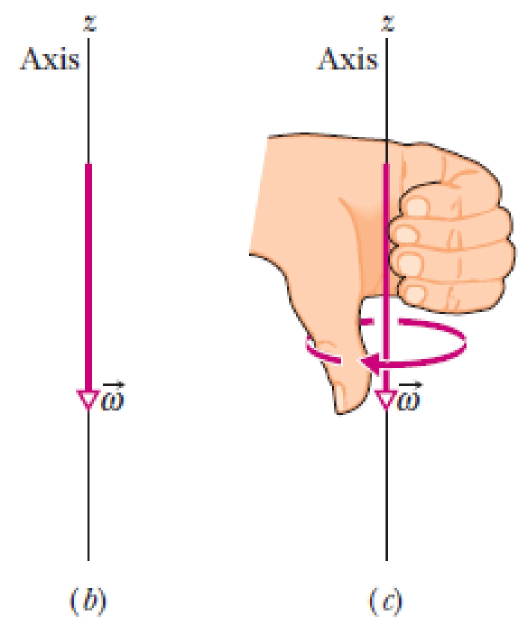
$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0),$$

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t,$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$





Συσχέτιση γραμμικής με γωνιακής μεταβολής

s=rθ ή ds/dt/=r dθ/dt ή

v = ωr

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Ακτινική συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης a

$$a_t = \alpha r$$

Εφαπτομενική συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης a όπου α η γωνιακή επιτάχυνση dω/dt

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Περίοδος για κυκλική κίνηση

Κινητική ενέργεια περιστροφής

Δίσκος κοπής: κινητική ενέργεια κέντρου μάζας μηδέν αλλά πρόσθεση κινητικής ενέργειας όλων των σημείων που αποτελούν το δίσκο

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots$$
$$= \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2,$$

ή

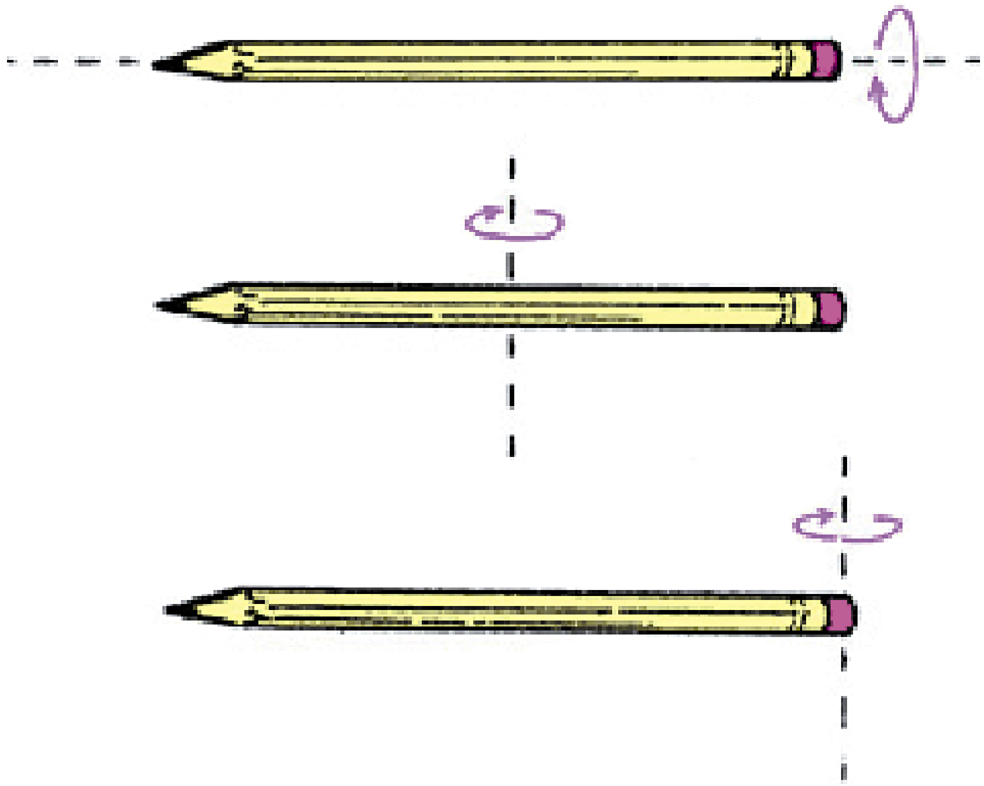
$$K = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2,$$

Διακριτές μάζες $I = \sum m_i r_i^2$ **Ροπή αδράνειας** $I = \int r^2\, dm$ Συνεχής μάζα

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2}I\omega^2}$$

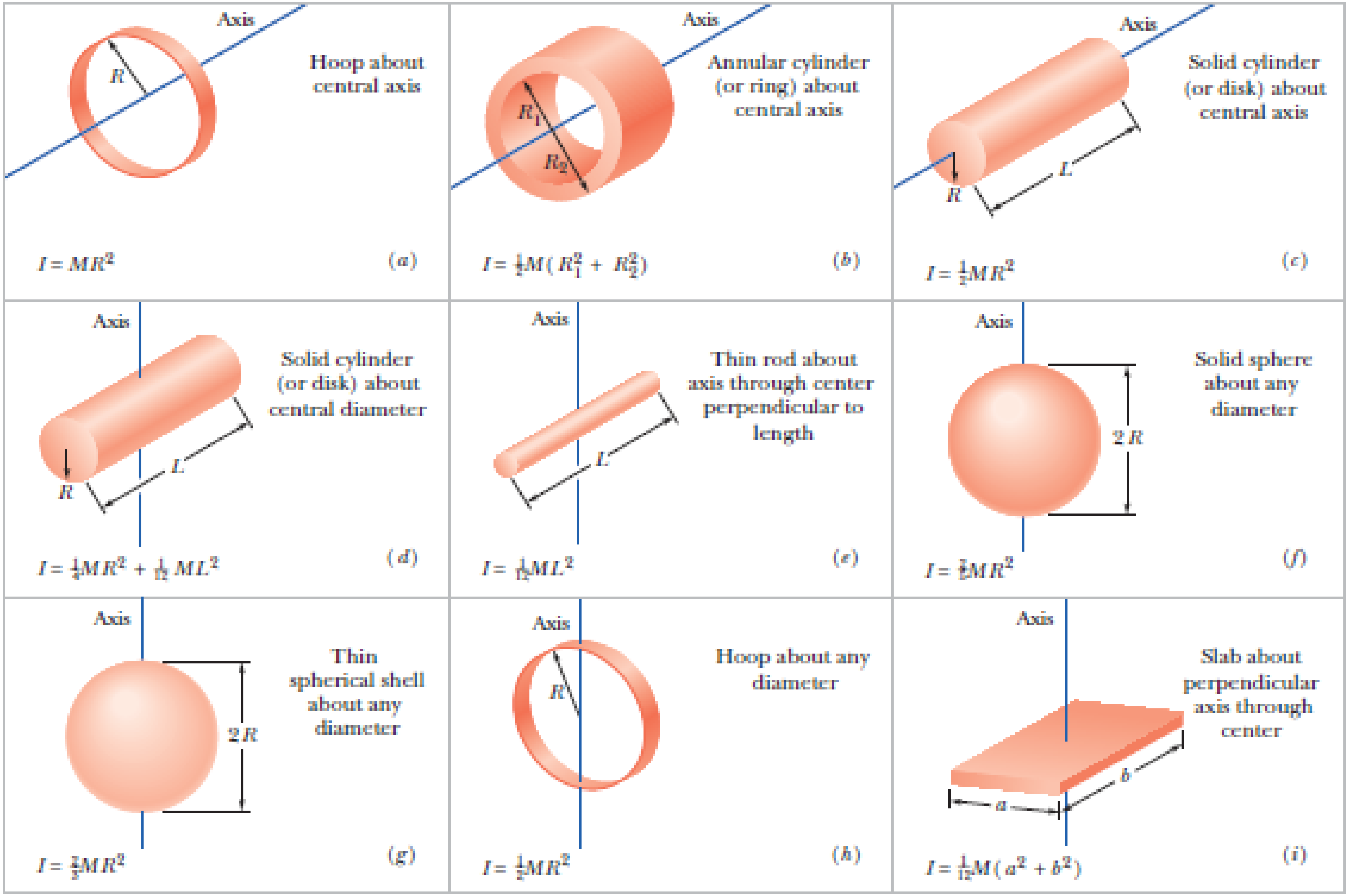
Μικρότερη ροπή αδράνειας (μάζα κατανεμημένη κοντά στον άξονα περιστροφής) σημαίνει ευκολότερη περιστροφή

ΕΙΚΟΝΑ 8.8 Η ροπή αδρανείας εξαρτάται από την κατανομή της μάζας ως προς τον άξονα περιστροφής.

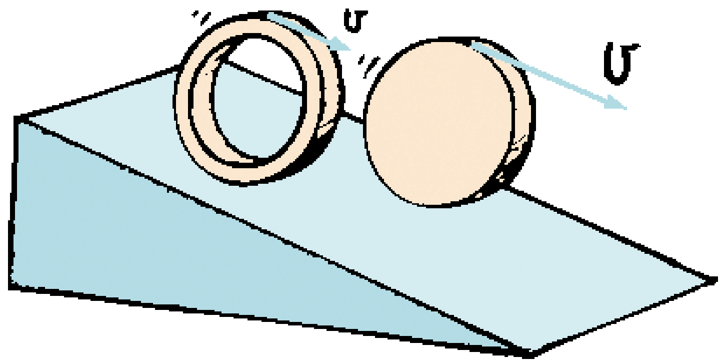


ΕΙΚΟΝΑ 8.10 Το μολύβι έχει διαφορετικές ροπές αδρανείας ως προς τους διάφορους άξονες περιστροφής.

ΕΙΚΟΝΑ 8.12 Όταν τρέχετε λυγίζετε τα πόδια σας, ώστε να ελαττώσετε τη ροπή αδρανείας.


Axis
R
Hoop about central axis
$I = MR^2$
(a)
Axis
R_1
R_2
Annular cylinder (or ring) about central axis
$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
(b)
Axis
R
L
Solid cylinder (or disk) about central axis
$I = \frac{1}{2}MR^2$
(c)
Axis
R
L
Solid cylinder (or disk) about central diameter
$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
(d)
Axis
L
Thin rod about axis through center perpendicular to length
$I = \frac{1}{12}ML^2$
(e)
Axis
2 R
Solid sphere about any diameter
$I = \frac{2}{5}MR^2$
(f)
Axis
2 R
Thin spherical shell about any diameter
$I = \frac{2}{3}MR^2$
(g)
Axis
R
Hoop about any diameter
$I = \frac{1}{2}MR^2$
(h)
Axis
a
b
Slab about perpendicular axis through center
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
(i)

Ροπή



ΕΙΚΟΝΑ 8.13 Ένας συμπαγής κύλινδρος κυλά σε ένα κεκλιμένο επίπεδο ταχύτερα από έναν δακτύλιο, ανεξάρτητα από τις μάζες ή τις εξωτερικές διαμέτρους των δύο σωμάτων. Ο δακτύλιος έχει μεγαλύτερη ροπή αδρανείας σε σχέση με τη μάζα του απ' ό,τι ο κύλινδρος.

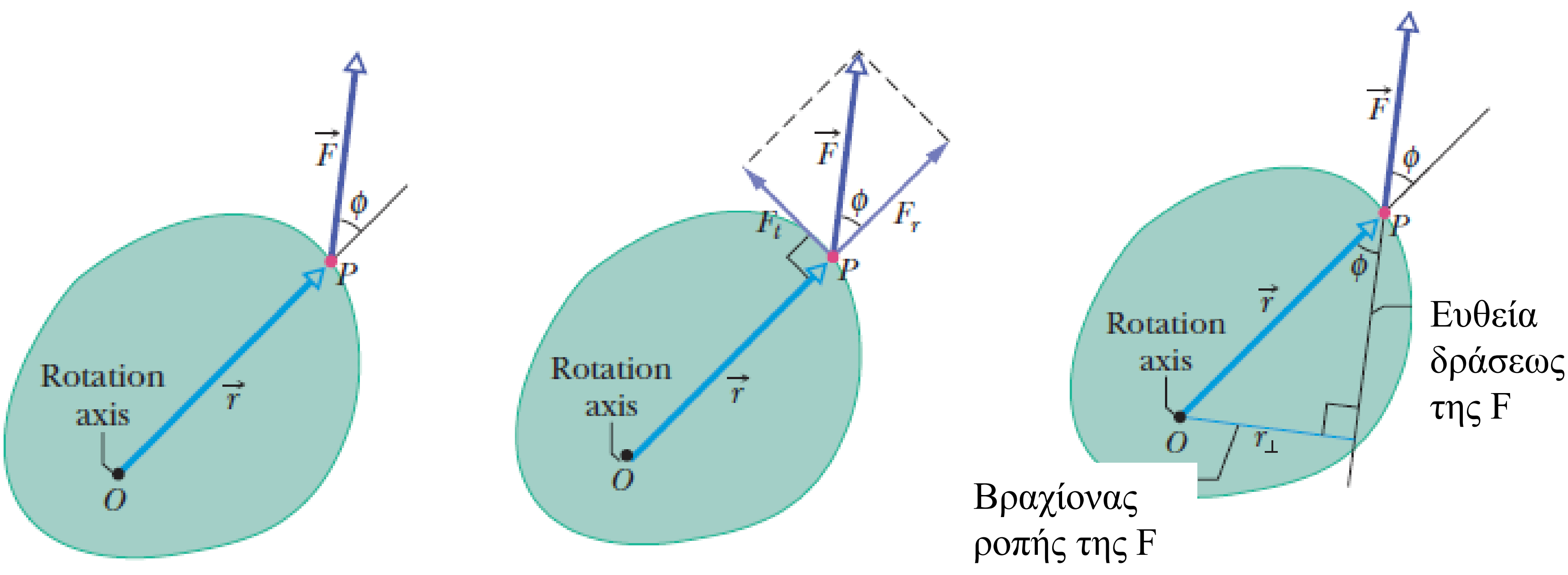
Ροπή

Ικανότητα μιας δύναμης να περιστρέψει ένα στερεό σώμα

$$\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_t$$

$$\tau = (r \sin \phi)(F) = r_{\perp} F,$$

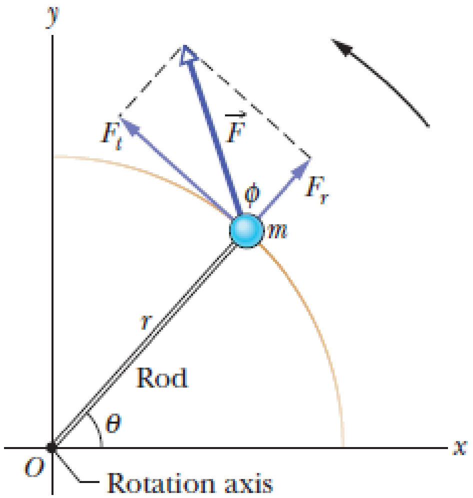
Μονάδα Μέτρησης της ροπής: N· m (δεν γίνεται αντικατάσταση σε J)
Δεξιόστροφη Κίνηση→Θετική , Αριστερόστροφη Κίνηση → Αρνητική



Δεύτερος νόμος Newton για την περιστροφή

$$\boldsymbol{\tau_{net}=I\ \alpha}$$

όπου I η ροπή αδράνειας και α η γωνιακή επιτάχυνση
α=a/R για δίσκο ακτίνας R με a τη γραμμική επιτάχυνση

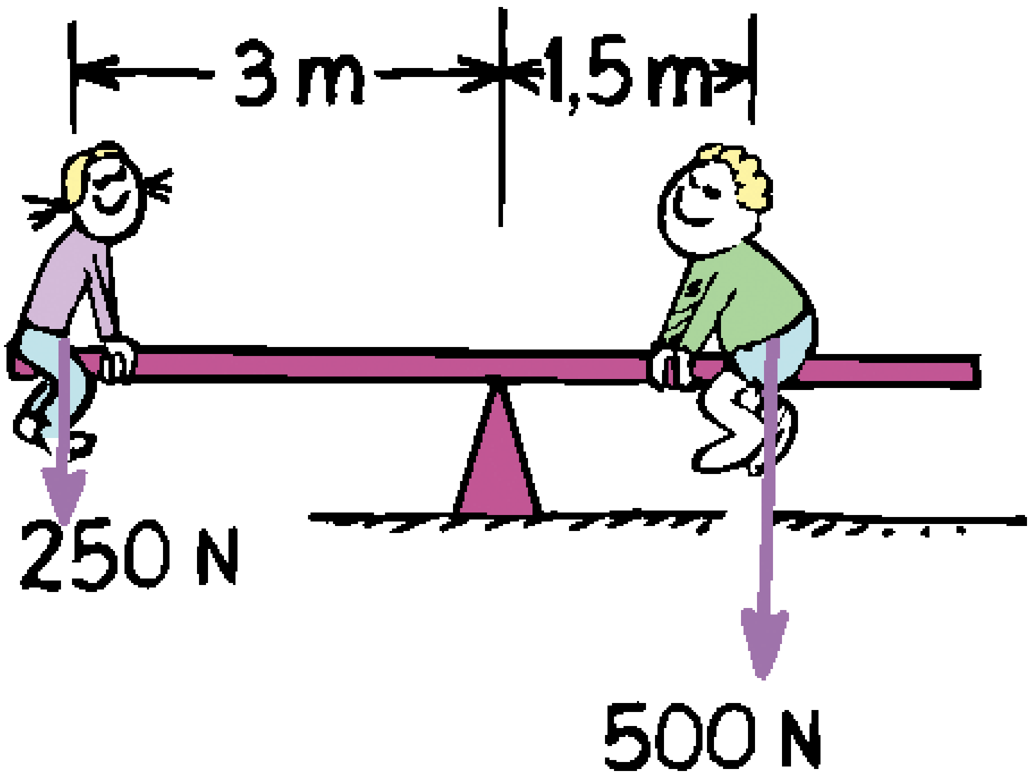


Διατήρηση της περιστροφικής ενέργειας

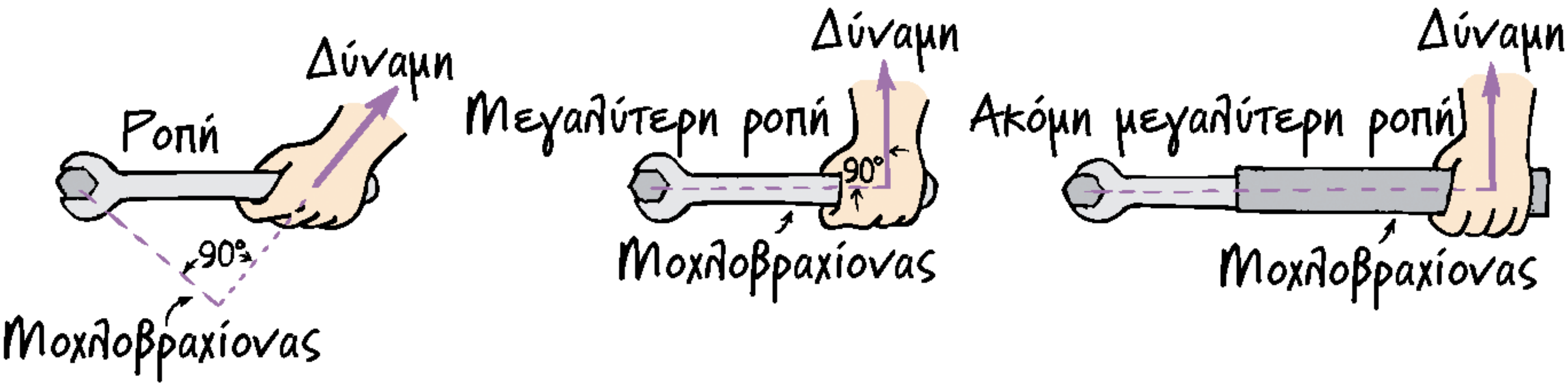
$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$$ ή $$W = \tau(\theta_f - \theta_i)$$ για σταθερή ροπή

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$

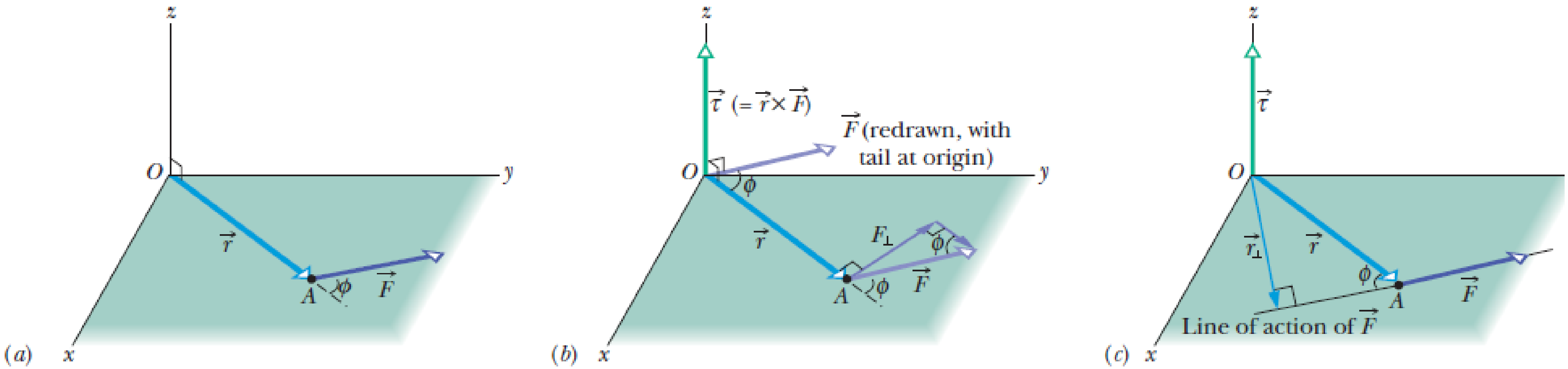


ΕΙΚΟΝΑ 8.18 Όταν οι ροπές αντισταθμίζουν η μία την άλλη, δεν προκαλείται περιστροφή.



ΕΙΚΟΝΑ 8.20 Παρ' όλο που οι δυνάμεις έχουν ίδιο μέτρο και στις τρεις περιπτώσεις, οι ροπές είναι διαφορετικές.

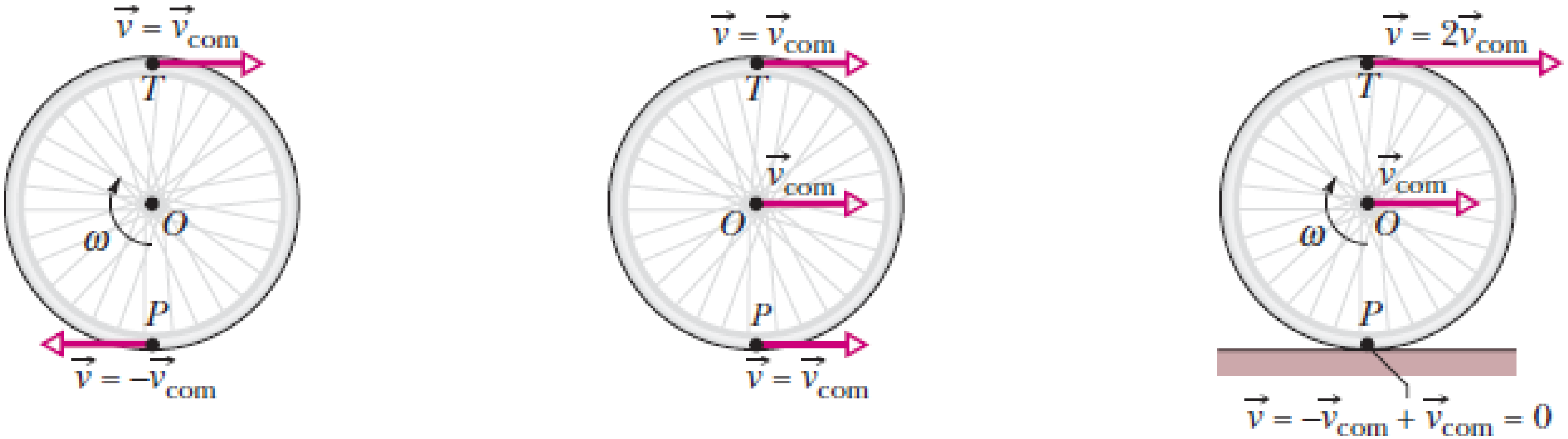
Ροπή $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$ $\tau = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F,$



Αμιγής Μεταφορά (σταθερή κατεύθυνση)	Αμιγής Περιστροφή (σταθερός άξονας)
x	θ
$v = dx/dt$	$\omega = d\theta/dt$
$a = dv/dt$	$\alpha = d\omega/dt$
m	I
$F_{\text{net}} = ma$	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
$W = \int F\,dx$	$W = \int \tau\,d\theta$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$P = Fv$	$P = \tau\omega$
$W = \Delta K$	$W = \Delta K$

Κύλιση

Αμιγής Περιστροφή + Αμιγής Μεταφορά = Κύλιση



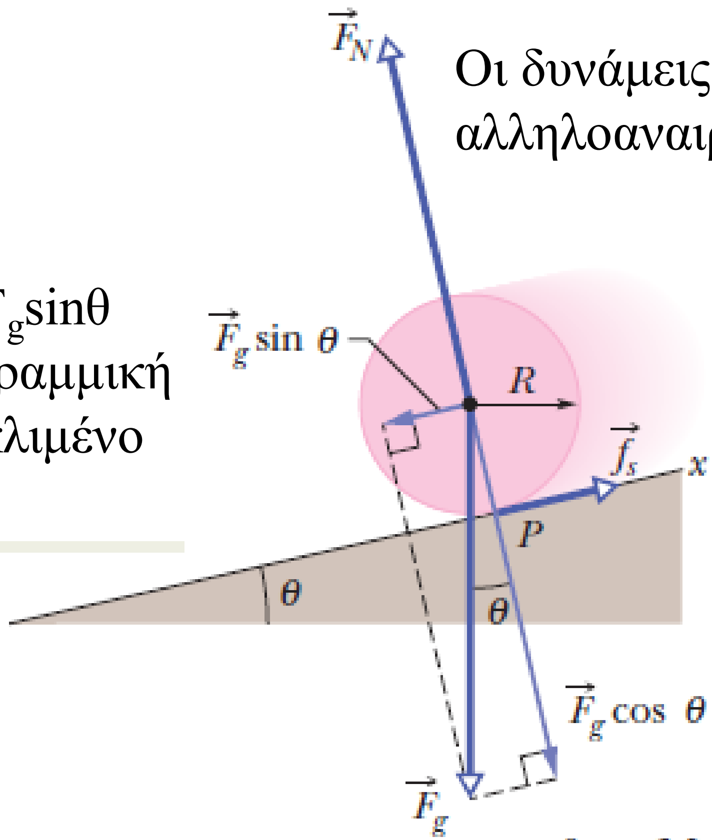
$$v_{cm} = \omega \cdot R$$

$$K = \frac{1}{2} I_{com} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2$$

Κύλιση σε Κεκλιμένο Επίπεδο

Οι δυνάμεις F_N και $F_g\cos\theta$ αλληλοαναιρούνται

Οι δυνάμεις f_s και $F_g\sin\theta$ προσδιορίζουν τη γραμμική επιτάχυνση στο κεκλιμένο επίπεδο



Η ροπή της f_s προσδιορίζει τη γωνιακή επιτάχυνση του CM

2ος Νόμος Newton για μεταφορική κίνηση: $f_s - Mg\sin\theta = Ma_{com,x}.$

2ος Νόμος Newton για περιστροφική κίνηση: $\tau_{net} = I\alpha \Longrightarrow Rf_s = I_{com}\alpha.$

$$a_{com} = \alpha R \Longrightarrow f_s = -I_{com}\frac{a_{com,x}}{R^2}. \Longrightarrow \boxed{a_{com,x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{com}/MR^2}.}$$

όπου το – εισάγεται λόγω κίνησης στον -x ενώ α=θετικό (δεξιόστροφο)

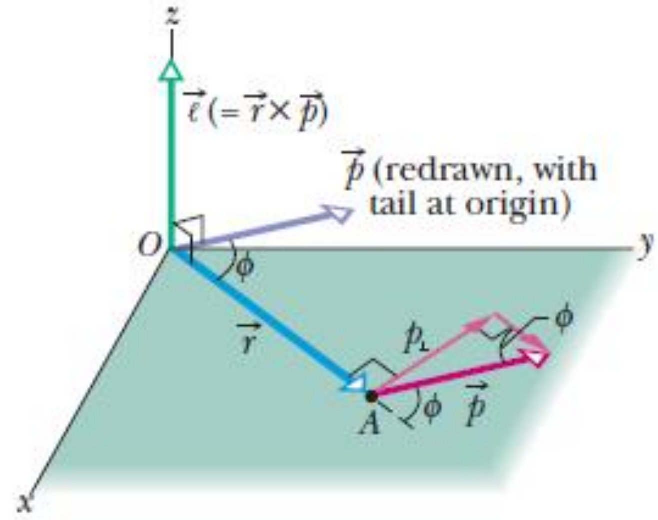
Στροφορμή

$$\boxed{\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})}$$

$$\ell = rmv \sin \phi,$$

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$$

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$$



(a)

2^{ος} Νόμος Newton σε γωνιακή μορφή

$$\boxed{\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}}$$

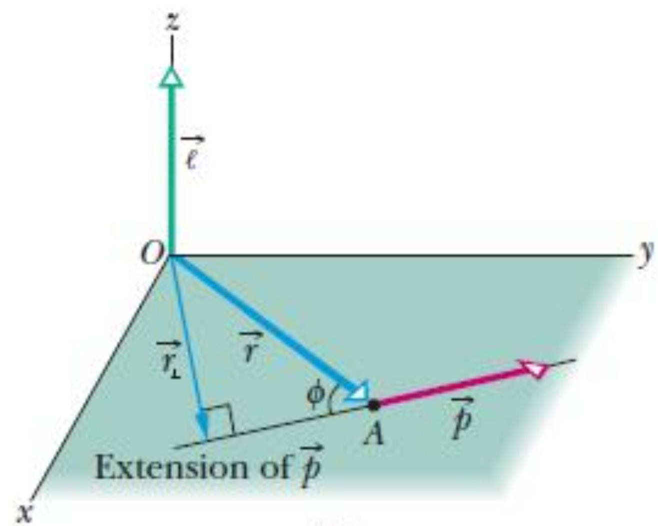
Μεμονωμένο σωματίδιο

$$\boxed{\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

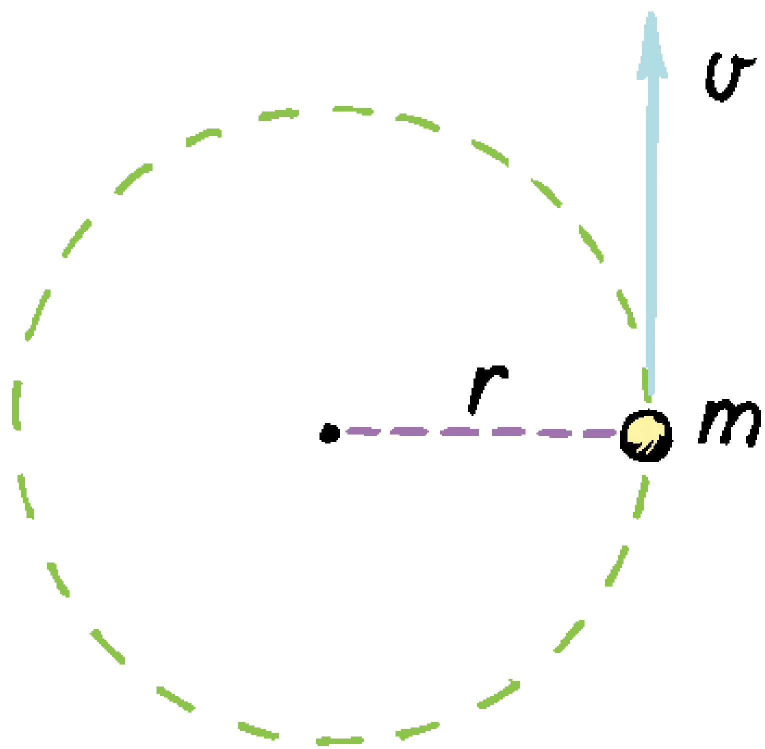
Σύστημα σωματιδίων

$$L = I \cdot \omega$$

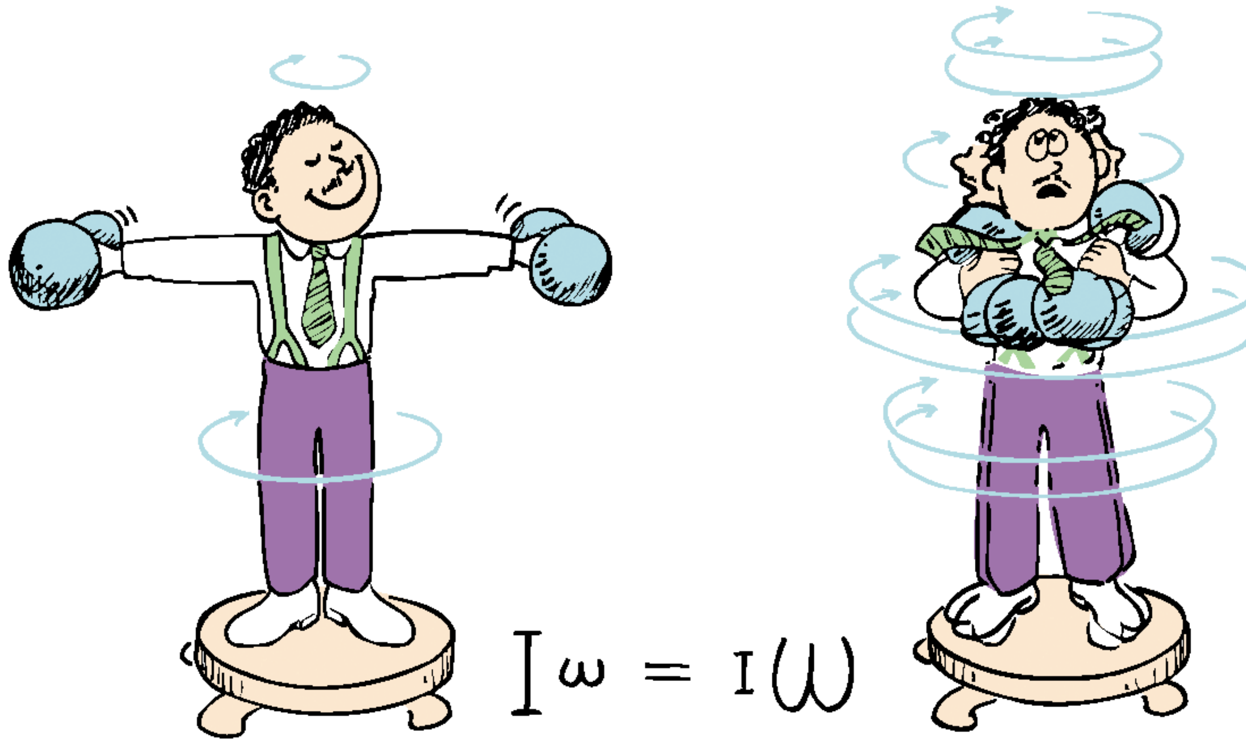
Άκαμπτο στερεό σώμα, σταθερός άξονας



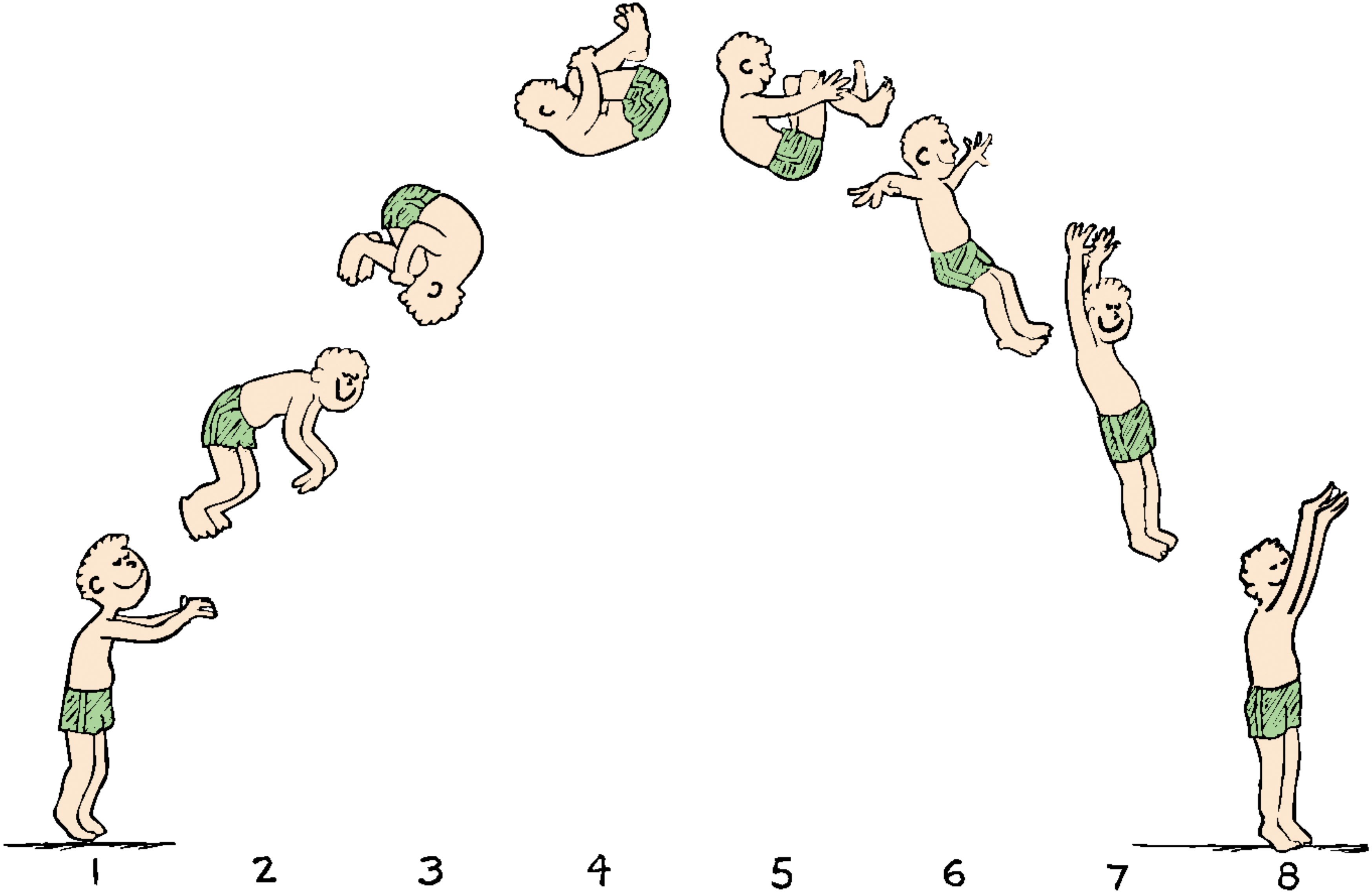
Αν η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα είναι μηδέν, η συνολική στροφορμή διατηρείται, ανεξάρτητα από τις μεταβολές που συμβαίνουν στο εσωτερικό του συστήματος



ΕΙΚΟΝΑ 8.51 Ένα μικρό αντικείμενο μάζας *m* που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας *r* με ταχύτητα *υ* έχει στροφορμή *mυr*.



ΕΙΚΟΝΑ 8.52 Διατήρηση της στροφορμής. Όταν ο άνδρας μαζεύει τα χέρια του και τα βάρη προς τα μέσα, η ροπή αδρανείας του, *I*, ελαττώνεται, οπότε η περιστροφική του ταχύτητα, ω, αυξάνεται.



ΕΙΚΟΝΑ 8.53 Η περιστροφική ταχύτητα ρυθμίζεται με μεταβολή της ροπής αδρανείας του σώματος, καθώς η στροφορμή διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της τούμπας.

ΕΙΚΟΝΑ 8.54 Διαδοχικά στιγμιότυπα της πτώσης μιας γάτας, στην ίδια φωτογραφική πλάκα.

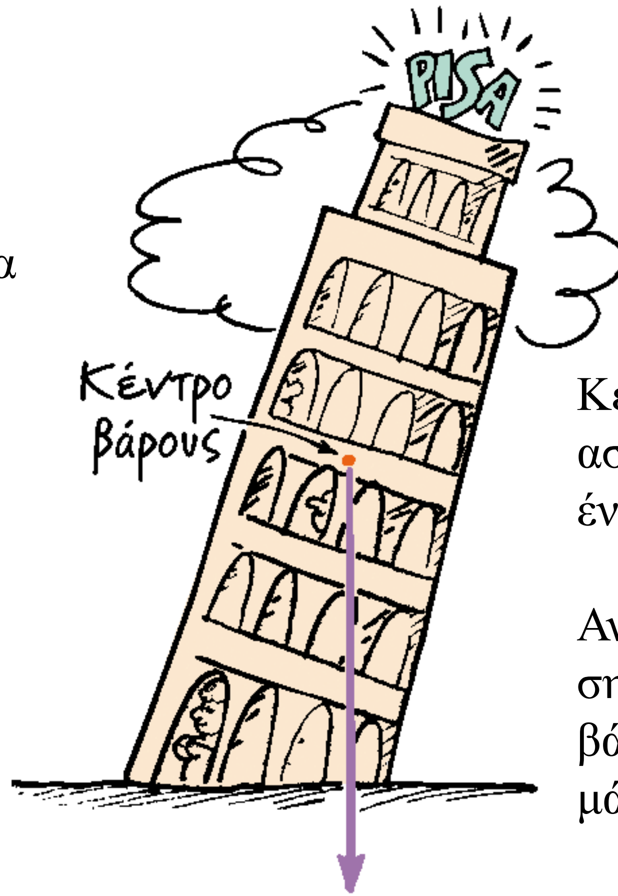
Στατική ισορροπία

Ισορροπία Δυνάμεων

$$F_{\mathrm{net},x} = 0$$
$$F_{\mathrm{net},y} = 0$$
$$F_{\mathrm{net},z} = 0$$

Ισορροπία Ροπών

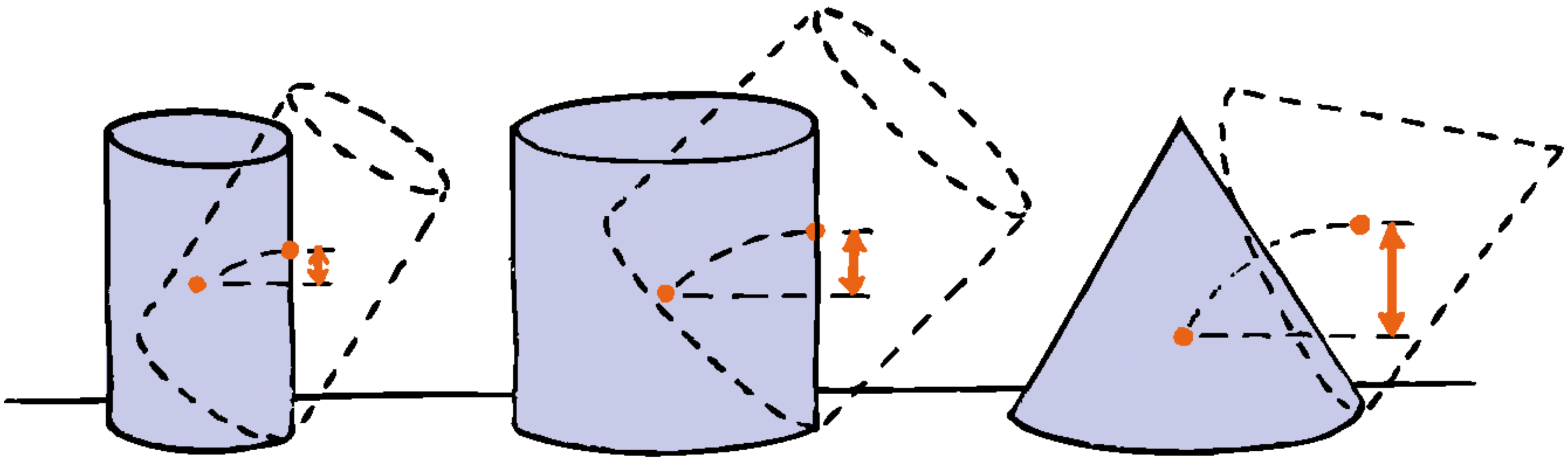
$$\tau_{\mathrm{net},x} = 0$$
$$\tau_{\mathrm{net},y} = 0$$
$$\tau_{\mathrm{net},z} = 0$$



ΕΙΚΟΝΑ 8.30 Το κέντρο βάρους του Κεκλιμένου Πύργου της Πίζας κείται πάνω από τη βάση στήριξης, και επομένως ο πύργος βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία.

Κέντρο βάρους: Το σημείο που ασκείται η βαρυτική δύναμη σε ένα σώμα.

Αν το g είναι το ίδιο για όλα τα σημεία ενός σώματος, το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας



ΕΙΚΟΝΑ 8.31 Η ευστάθεια ενός σώματος καθορίζεται από την κατακόρυφη απόσταση κατά την οποία θα πρέπει να ανυψωθεί το κέντρο βάρους για να ανατραπεί το σώμα. Ένα αντικείμενο με πλατιά βάση και χαμηλό κέντρο βάρους είναι περισσότερο ευσταθές.