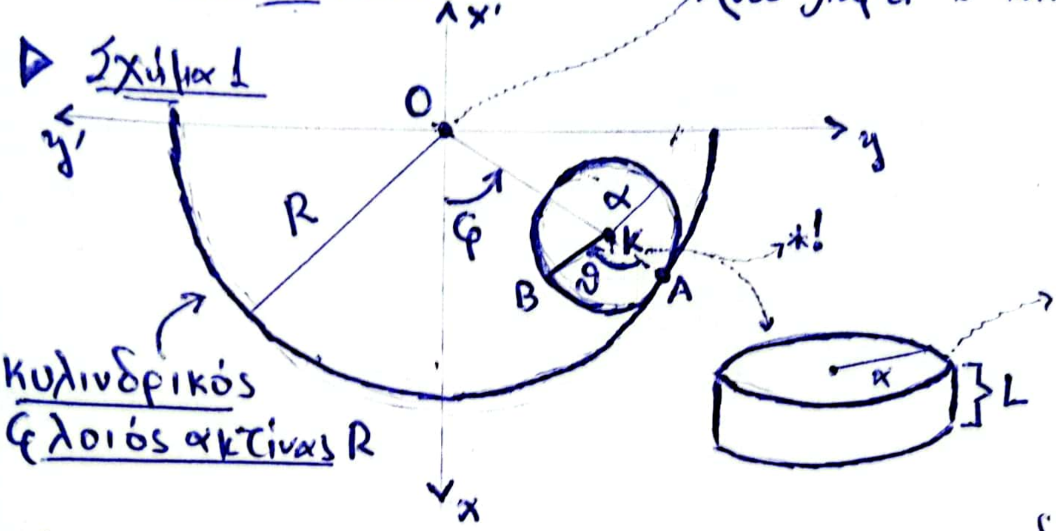
Ταλάντωση κυλίνδρου

(Ο άξονας z'z είναι κάθετος στο χαρτί κ' κατευθύνεται προς το μάτι σας.)

▶ Σχήμα 1

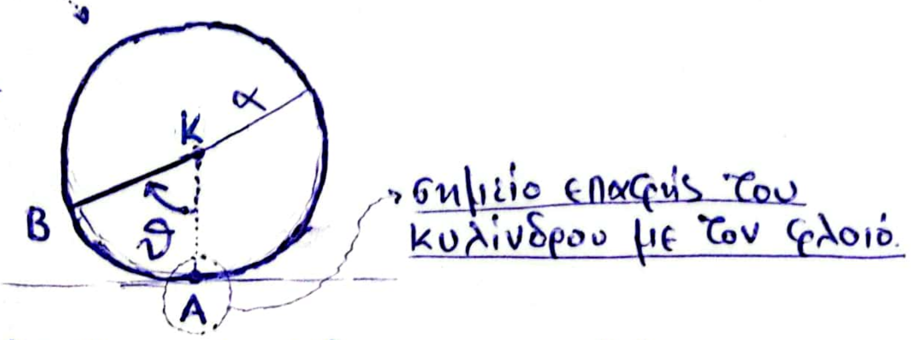


Συμπαγής ομογενής κύλινδρος ακτίνας α, πάχους L, πυκνότητας ρ και -άρα- όγκου

(1) $\begin{cases} V = \pi \alpha^2 L \text{ κ' μάζας} \\ m = \rho V = \rho \pi \alpha^2 L. \end{cases}$

*!

▶



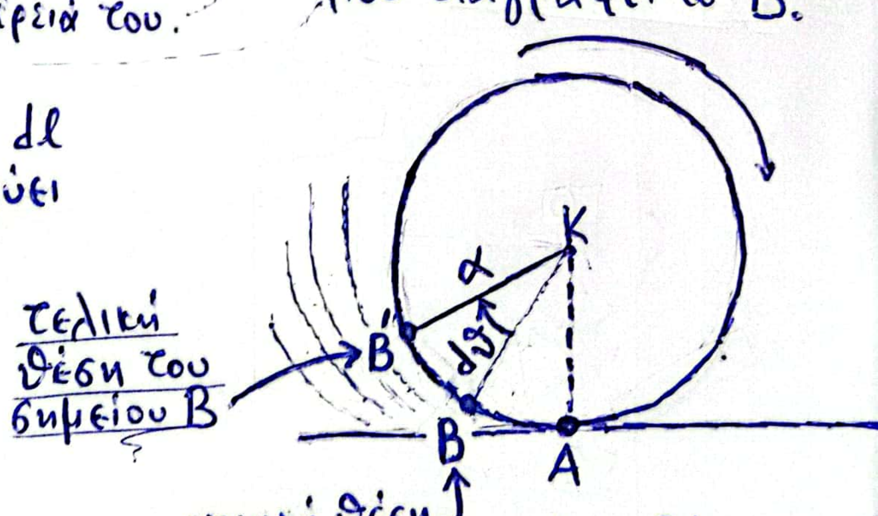
KA: Η νοερή κάθετος που συνδέει το κέντρο (μάζας αφού είναι ομογενής) του κυλίνδρου με την επιφάνεια επί της οποίας κυλίεται.

KB: Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχουμε ζωγραφίσει πάνω στον κύλινδρο κ' συνδέει το κέντρο του με την περιφέρειά του.

▶ Εφόσον ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η στοιχειώδης μετατόπιση (dl) του κέντρου μάζας K θα ισούται με το αντίστοιχο στοιχειώδες τόξο ($\alpha\, d\vartheta$) που διαγράφει το B.

▶ Για την στοιχειώδη μετατόπιση dl του κέντρου μάζας K θα ισχύει επίσης:

$$\boxed{dl = (R-\alpha)\,d\varphi} \quad (3)$$



Δηλαδή:

$$\boxed{\alpha\, d\vartheta = dl} \quad (2)$$

▶ Άρα στην περίπτωση της κύλισης χωρίς ολίσθηση

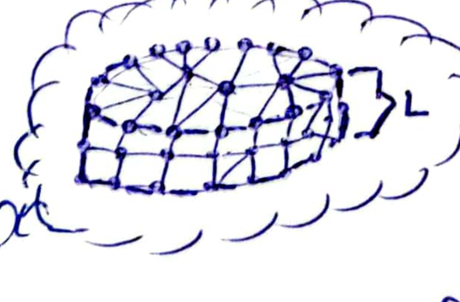
$$(3) \xRightarrow{(2)} \boxed{(R-\alpha)\,d\varphi = \alpha\, d\vartheta} \quad (4)$$

▶ Είναι ο κύλινδρος που μελετούμε ένα ΚΔΣΣ (κλειστό διατηρητικό σύστημα σωματιδίων); Κατ'αρχάς είναι σύστημα σωματιδίων αφού κάθε σύστημα της κλασικής μηχανικής μπορεί να θεωρηθεί ως αποτελούμενο από σωματίδια. Επίσης εφόσον απουσιάζει η τριβή ολίσθησης η συνολική ενέργεια του κυλίνδρου δεν διαχέεται στο περιβάλλον αλλά διατηρείται σταθερή. Τέλος είναι διατηρητικό αφού σε ένα στερεό σώμα μπορούμε πάντοτε να θεωρούμε ότι τα σωμάτια συνδέονται με αβαρείς άκαμπτες ράβδους, ένα είδος αλληλεπίδρασης που επιτρέπει την μεταφορά μηχανικής ενέργειας από το ένα σωμάτιο στο άλλο αλλά όχι την θερμοποίησή της (δηλ. την μετατροπή σε θερμική ενέργεια). [Ρωτήστε με στο μάθημα αν θέλετε διευκρινίσεις για το παραπάνω επιχείρημα. Είναι σημαντικό να το καταλάβετε διότι...]

▶ ... Τελικά βλέπουμε ότι κάθε στερεό σώμα που δεν ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον είναι ένα ΚΔΣΣ. Και το αυτό ισχύει για κάθε ελαστικό σώμα όπου θεωρώ τα σωμάτια να αλληλεπιδρούν με αβαρή ελατήρια (που δεν υπόκεινται στην κόπωση των μετάλλων, κ.ο.κ.).

▶ Άρα: Κάθε σύστημα της κλασικής μηχανικής μπορεί να αντιμετωπισθεί ως ένα ΚΔΣΣ (κ' άρα να εφαρμόσουμε σε αυτό την «ειδική» περίπτωση της Αρχής του Χάμιλτον) αρκεί να μην ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον.

▶ Θεωρούμε λοιπόν τον κύλινδρο σαν ένα σύστημα $N \to \infty$ σωματιδίων που συνδέονται μεταξύ τους με αβαρείς ράβδους. Δηλαδή κάπως έτσι:



▶ Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός εκάστου των σωματιδίων αρκεί ο προσδιορισμός των γωνιών θ κ' φ. (Στην πραγματικότητα δεδομένης της φ η θ μπορεί να προσδιοριστεί από την (4).)

▶ Το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της αρχής του Χάμιλτον στο υπό μελέτη σύστημα είναι ο υπολογισμός της κινητικής κ' δυναμικής του ενέργειας, K κ' U αντίστοιχα, ως συνάρτηση των γωνιών ϑ κ' φ.

▶ Σε ότι αφορά την U επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικού υψομέτρου $h=0$ (εφεξής με h συμβολίζεται το υψόμετρο) το επίπεδο $x=0$ του σχήματος 1. Συνεπώς $\boxed{h=-x}$ (5).

▶ Θεωρώντας τον κύλινδρο ως ένα σύστημα N σωματίων προκύπτει $U=\sum_{i=1}^{N} m_i g h_i$ (6) όπου m_i κ' h_i αντίστοιχα η μάζα κ' το υψόμετρο του i-οστού σωματίου. (6) =>

$$\Rightarrow U = g\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i} \overset{(5)}{\underset{(1)}{=}} -g\cdot m\cdot \frac{\sum m_i x_i}{m} = -gm x_{\kappa.\mu.} \quad (7)$$

όπου $x_{\kappa.\mu.} \equiv \dfrac{\sum m_i x_i}{m}$ η τιμή της συντεταγμένης x για το κέντρο μάζας του στερεού σώματος. βλ. σχ.1

▶ λόγω ομογένειας κ' η κυλινδρικής συμμετρίας $x_{\kappa.\mu.}=x_K$ =>

$$\Rightarrow x_{\kappa.\mu.} = (R-\alpha)\,\text{συν}\varphi \overset{(7)}{\Rightarrow} \boxed{U = -mg\,(R-\alpha)\,\text{συν}\varphi} \quad (8)$$

▶ Επίσης $K = K_\mu + K_\pi$ όπου K_μ η κινητική ενέργεια της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας κ' K_π η κινητική ενέργεια λόγω της (ιδιο) περιστροφής του σώματος γύρω από τον άξονα συμμετρίας του.

▶ Η θέση του κέντρου μάζας προσδιορίζεται ως

$$\left.\begin{aligned} x_{\kappa\mu} &= (R-\alpha)\,\text{συν}\varphi \\ y_{\kappa\mu} &= (-//-)\,\text{ημ}\varphi \\ z_{\kappa\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_{\kappa\mu} &= (-//-)(-\text{ημ}\varphi)\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}_{\kappa\mu} &= (-//-)\,\text{συν}\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{z}_{\kappa\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (v_{\kappa\mu})^2 = (\dot{x}_{\kappa\mu})^2 + (\dot{y}_{\kappa\mu})^2 + (\dot{z}_{\kappa\mu})^2 = (R-\alpha)^2(\dot{\varphi})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K_\mu = \frac{1}{2} m (R-\alpha)^2 (\dot{\varphi})^2} \quad (9)$$

▶ Σε ό,τι αφορά το όρο K_π χωρίζουμε νοερά τον κύλινδρο σε κυλινδρικά στοιχεία ακτίνας β κ' εύρους $d\beta$. Κάθε στοιχείο μπορεί να θεωρηθεί ως αποτελούμενο από σωμάτια ταχύτητας μέτρου $\beta\dot{\vartheta}$ κ' συνολικής μάζας $(2\pi\beta)\, d\beta \cdot L \cdot \rho = dm$. Επομένως

$$dK_\pi = \frac{1}{2} dm (\beta\dot{\vartheta})^2 = \frac{1}{2} 2\pi \beta\, d\beta\, L \cdot \rho\, \beta^2 \dot{\vartheta}^2 = \pi \rho L \dot{\vartheta}^2 \beta^3 d\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_\pi = \pi L \rho \dot{\vartheta}^2 \int_0^\alpha \beta^3 d\beta = \pi L \rho \dot{\vartheta}^2 \frac{\alpha^4}{4} = \pi L \rho (R-\alpha)^2 \frac{\alpha^2}{4} (\dot{\varphi})^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{(4) \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{(R-\alpha)}{\alpha}\frac{d\varphi}{dt}}$$

$$\Rightarrow K_\pi = \frac{1}{4} m (R-\alpha)^2 (\dot{\varphi})^2 \quad (10)$$

▶ Στο σημείο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε την λαγκρανζιανή

$$L \equiv K - U \Rightarrow$$

$$\overset{(8,9,10)}{\Rightarrow} L = \frac{3}{4} m (R-\alpha)^2 (\dot{\varphi})^2 + m g (R-\alpha)\, \text{συν}\varphi \quad (11)$$

▶ Έστω μονάδες $\boxed{m = R-\alpha = g = 1}$ (12)

▶ $$(11) \overset{(12)}{\Longrightarrow} \boxed{L = \frac{3}{4} \dot{\varphi}^2 + \text{συν}\varphi} \quad (13)$$

▶ $$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi} = \frac{3}{2}\dot{\varphi}\,\delta\dot{\varphi} - \eta\mu\varphi\,\delta\varphi =$$

$$\boxed{(\delta\dot{\varphi}) \equiv (\delta\varphi)^{\cdot} \Rightarrow \dot{\varphi}\,\delta\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}\,\delta\varphi)^{\cdot} - (\dot{\varphi})^{\cdot}\delta\varphi}$$

$$= (\dot{\varphi}\,\delta\varphi)^{\cdot} - \left(\frac{3}{2}\ddot{\varphi} + \eta\mu\varphi\right)\delta\varphi \quad (14)$$

▶ Σύμφωνα με την αρχή του Χάμιλτον $\boxed{\delta I = 0}$ όπου

$$I \equiv \int_{t=t_1}^{t=t_2} L(\varphi,\dot\varphi)\, dt$$ κ' δI η μεταβολή της I

οφείλεται σε μια τυχαία μεταβολή $\delta\varphi$ της φ για τυχαίες χρονικές στιγμές t_1 κ' $t_2 > t_1$ όπου $\delta\varphi(t_1) = \delta\varphi(t_2) = 0$.

▶ $$0 = \delta I = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} dt \{L(\varphi,\dot\varphi)\} =$$ $$\boxed{\int \ldots \equiv \int_{t=t_1}^{t=t_2} dt \{\ldots\}}$$

$$= \delta \int L = \int \delta L \overset{(14)}{=} \Big[\dot\varphi\, \delta\varphi\Big]_{t=t_1}^{t=t_2}$$

$$- \int \left(\tfrac{3}{2}\ddot\varphi + \eta\mu\varphi\right)\delta\varphi \quad (15)$$

▶ Ο πρώτος όρος της (15) είναι μηδέν αφού $\delta\varphi(t_1) = \delta\varphi(t_2) = 0$. Προκειμένου να μηδενίζεται κ' ο β' όρος για τυχαίο $\delta\varphi$ θα πρέπει $\boxed{\ddot\varphi + \frac{2}{3}\eta\mu\varphi = 0}$ ή $\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{3}\eta\mu\varphi = 0}$ (16)

▶ Όταν θέσαμε $m = R - \alpha = g = 1$ ουσιαστικά κάναμε τον μετασχηματισμό μεταβλητών $t = \sqrt{\frac{R-\alpha}{g}}\,\tilde t$, $L = mg(R-\alpha)\tilde L$ κ' $I = mg(R-\alpha)\tilde I$ παραλείποντας ωστόσο τον τόνο ~ πάνω από τις νέες μεταβλητές.

▶ Για να επανέλθουμε στις αρχικές μεταβλητές αρκεί επομένως να κάνουμε την αντικατάσταση

$$t \to t \Big/ \sqrt{\frac{R-\alpha}{g}}$$

ώστε η (16) γίνεται $$\boxed{\ddot\varphi + \frac{2}{3}\left(\frac{g}{R-\alpha}\right)\eta\mu\varphi = 0} \quad (17)$$