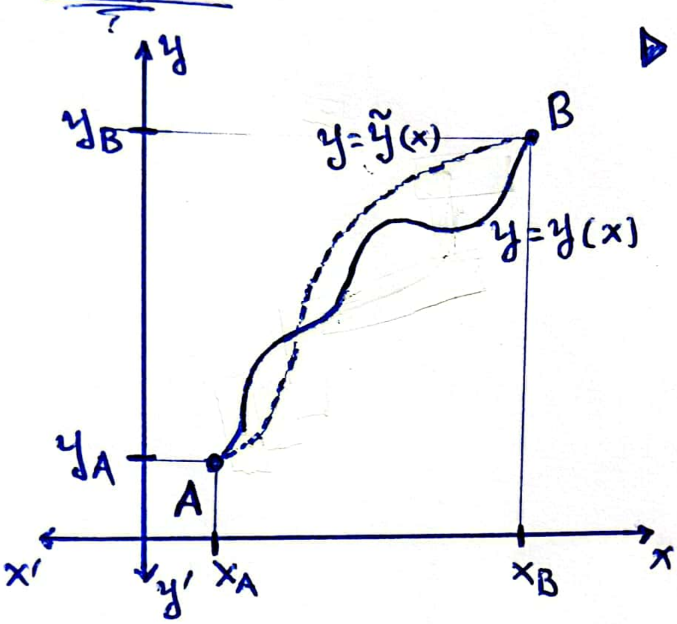
Ακρότατα συναρτησιακών

▶ Τα όσα ακολουθούν δεν αποσκοπούν στην αυστηρή θεμελίωση του λογισμού των μεταβολών αλλά στην ταχύτερη δυνατή εξοικείωση με την επίλυση προβλημάτων της Φυσικής που αφορούν στην μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση συναρτησιακών.

▶ Σχήμα 1



▶ Έστω επί του επιπέδου x-y δύο τυχαία σημεία $A = (x_A, y_A)$ κ' $B = (x_B, y_B)$ όπου $x_B > x_A$. Έστω τυχαία καμπύλη $y = y(x)$ που συνδέει τα A κ' B.

▶ Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y(x), y'(x))\, dx \quad (1)$$

όπου η έκφραση για την F είναι γνωστή.

▶ Για κάθε x που επιλέγω η $y(x)$ μου επιστρέφει έναν πραγματικό αριθμό. Το ίδιο κ' η $y'(x)$, το ίδιο κ' η $F(\cdots)$. Άρα οι y, y' κ' F είναι συναρτήσεις. Γενικότερα

$$\text{αριθμός} \xrightarrow{\text{συνάρτηση}} \text{αριθμός}$$

▶ Για κάθε καμπύλη, για κάθε συνάρτηση $y(x)$ που επιλέγω το ορισμένο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1) μου επιστρέφει έναν αριθμό. Τα μαθηματικά αντικείμενα που έχουν αυτή την ιδιότητα καλούνται <u>συναρτησιακά</u>. Γενικότερα

$$\text{συνάρτηση} \xrightarrow{\text{συναρτησιακό}} \text{αριθμός}$$

▶ <u>Πρόβλημα:</u> Ποια είναι η $y(x)$ που ελαχιστοποιεί το I;

▶ Έστω μια ελάχιστη, πρακτικά αμελητέα παραμόρφωση της καμπύλης $y=y(x)$ του Σχήματος 1. Τότε προκύπτει μια νέα καμπύλη $y=\tilde{y}(x)$ τέτοια ώστε $|\varepsilon_0(x)| <<< 1$ ② όπου $\varepsilon_0(x) \equiv \tilde{y}(x) - y(x)$ ③.

▶ Εφόσον κ' η νέα καμπύλη συνδέει τα A κ' B θα ισχύει

$$\left.\begin{aligned} y_A = y(x_A) = \tilde{y}(x_A) \\ y_B = y(x_B) = \tilde{y}(x_B) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{③} \varepsilon_0(x_A) = \varepsilon_0(x_B) = 0 \quad ④$$

▶ Η μικρή αυτή μεταβολή της $y(x)$ είναι λογικό ότι θα προκαλέσει μια μεταβολή (ίσως όχι αμελητέα) στην $y'(x)$. Ωστόσο εάν η παραμόρφωση της καμπύλης γίνει με «ομαλό» τρόπο (εξηγήθηκε στο μάθημα) θα ισχύει $|\varepsilon_1(x)| <<< 1$ ⑤ όπου $\varepsilon_1(x) \equiv \tilde{y}'(x) - y'(x)$ ⑥.

▶ Άμεσα προκύπτει ότι: $\varepsilon_0'(x) \overset{③}{\underset{⑥}{=}} \varepsilon_1(x)$ ⑦

▶ Στο εξής επιλέγω να συμβολίσω την ελάχιστη, πρακτικά αμελητέα (αλλά κ' «ομαλή») μεταβολή της $y(x)$ ως $\delta y(x)$. κ' την αντίστοιχη μεταβολή της $y'(x)$ ως $\delta y'(x)$. Πρακτικά θέτω $\varepsilon_0(x) \equiv \delta y(x)$ κ' $\varepsilon_1(x) \equiv \delta y'(x)$. Άρα $|\delta y(x)|, |\delta y'(x)| <<< 1$.

▶ Στον νέο αυτό συμβολισμό οι σχέσεις ④ κ' ⑦ γίνονται

$$\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0 \quad ⑧ \qquad \text{και} \qquad [\delta y(x)]' = \delta y'(x) \quad ⑨$$

▶ Είδαμε ότι η μεταβολή δy προκαλεί μια αντίστοιχη μεταβολή $\delta y'$. Είναι λογικό ότι προκαλείται -επομένως- μια αντίστοιχη μεταβολή δF της F όπου

$$\delta F = F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y') \quad ⑩$$

▶ Εφόσον $|\delta y|, |\delta y'| <<< 1$ αναπτύσσοντας κατά Taylor σε 1ης τάξη προκύπτει

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') = F(x,y,y') + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \quad ⑪$$

▶ (10) $\xRightarrow{(11)}$ $\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$ (12)

▶ Προσοχή!!! $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy'$ (13) όπου

$dy = \frac{dy}{dx}dx$ κ' $dy' = \frac{dy'}{dx}dx$ οι στοιχειώδεις «μεταβολές» που προκαλούνται από την dx. Στην (12) δεν υπάρχει κάποιος όρος $(\dots)\delta x$!

▶ Γενικότερα αν $F = F(\psi(x), \varphi(x), \psi'(x), \varphi'(x), x)$ τότε

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi'}\delta\varphi' + \frac{\partial F}{\partial \psi'}\delta\psi' \quad (14)$$

κ.ο.κ.

▶ Είδαμε ότι η δy προκαλεί την $\delta y'$ κ' εν συνεχεία την δF. Είναι λογικό ότι εν τέλει προκαλείται μια μεταβολή

$$\delta I = \delta\int F\,dx = \int F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int F(x,y,y')\,dx \overset{(10)}{=}$$

(*!)

$$= \int \delta F\,dx \overset{(12)}{=} \int \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,dx \overset{(9)}{=}$$

$$= \int \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\,dx =$$

$$= \int \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)'\delta y\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_{x_A}^{x_B}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)'dx + \int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)'\right]\delta y\,dx \quad (15)$$

▶ Παρατηρήστε (βλ. *!) ότι ουσιαστικά αποδείξαμε πως

$$\delta\int F\,dx = \int \delta F\,dx$$

δηλαδή ότι μπορούμε να εναλλάσσουμε το "δ" με το "$\int$".

▶ Στην απόδειξη της (15) χάριν συντομίας αντικαταστήσαμε το "$\int_{x=x_A}^{x=x_B}$" με το "$\int$".

▶ Έχουμε: $\int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x=x_A}^{x=x_B} \overset{(8)}{=} 0$ (16)

▶ (15), (16) $\Rightarrow$ $$\delta I = \int_{x=x_A}^{x=x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)'\right]\delta y \, dx \quad (17)$$

▶ Αναγκαία συνθήκη ελαχιστοποίησης:

Αν η $y(x)$ ελαχιστοποιεί το I τότε $\boxed{\delta I = 0}$ ανεξαρτήτως της επιλογής μας για το $\varepsilon_0(x)$, δηλαδή για κάθε μεταβολή $\delta y(x)$. Σχηματικά:

$$\boxed{y(x) \text{ ελαχιστοποιεί } I} \Longrightarrow \boxed{\delta I = 0 \ \forall \ \delta y} \quad (18)$$

▶ (17) $\overset{(18)}{\Longrightarrow}$ $$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad (19)$$

▶ Η (19) καλείται εξίσωση Euler-Lagrange. Από την λύση της, σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες $y(x_A) = y_A$ κ' $y(x_B) = y_B$ προκύπτει η $y(x)$ που συνδέει τα A κ' B προσδίδοντας στο I μια "στάσιμη" τιμή.

▶ Η "στάσιμη" αυτή τιμή μπορεί να είναι μέγιστο ή ελάχιστο ή κάτι αντίστοιχο με τα σαγματικά σημεία κ' σημεία ακροτάτων καμπύλης που προκύπτουν κατά την αναζήτηση των συναρτήσεων.

▶ Προσοχή!!! Ο όρος $\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x=x_A}^{x=x_B}$ μηδενίζεται εξαιτίας των ειδικών συνοριακών συνθηκών (4). Υπό άλλες συνοριακές συνθήκες ο όρος αυτός θα εμφανιζόταν στο δεξί μέλος της (17) ως ένας επιπλέον «συνοριακός» όρος. Τέτοιοι «συνοριακοί» όροι εμφανίζονται εν γένει στα αντίστοιχα προβλήματα της Κλασικής Θεωρίας Πεδίου κ' (ειδικότερα) της Γενικής Σχετικότητας και η εξάλειψή τους δεν θα πρέπει να θεωρείται πάντοτε δεδομένη.

▶ (13) $\Rightarrow \; dF = \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy + \dfrac{\partial F}{\partial y'} dy' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)' y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + (\ldots\ldots)' + \frac{dy}{dx}\cdot\Bigg[\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)'}_{\substack{0 \text{ εφόσον} \\ \text{ισχύει η (19)}}}\Bigg] \overset{(19)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'\right)} \quad (20)$$

▶ Ακολουθούν εφαρμογές σε συγκεκριμένα προβλήματα.