Μέθοδος Fourier (Κεφ. 10 Pain)

▶ Έστω περιοδική συνάρτηση $f(x)$ με περίοδο λ δηλαδή

$$f(\underset{\text{τυχαίο } x}{x}) = f(x+\lambda) \Rightarrow \ldots(\text{επαγωγικά})\ldots \Rightarrow f(x) = f(x \pm \underset{\text{φυσικός αριθμός}}{\nu}\cdot\lambda).$$

▶ Τότε (*!) υπάρχουν συντελεστές α_ν κ' β_ν τέτοιοι ώστε

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\alpha_\nu\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right) + \beta_\nu\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right)\right\} \quad (1)$$

▶ (*!) Η πρόταση αυτή ισχύει υπό προϋποθέσεις οι οποίες πληρούνται εν γένει από τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην Φυσική. Υφίστανται ωστόσο εξαιρέσεις.

▶ $$(1) \overset{\boxed{\sin\left(\frac{2\pi\cdot 0\cdot x}{\lambda}\right)=0}}{\Longrightarrow} f(x) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\alpha_\nu\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right) + \beta_\nu\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right)\right\} \quad (2)$$

▶ Ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών $\alpha_\nu, \beta_\nu \ \forall \nu$.

▶ $$\int_0^\lambda f(x)\,dx = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,d\left(\frac{2\pi\cdot x}{\lambda}\right) = \quad \boxed{y \equiv \frac{2\pi\cdot x}{\lambda}}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\alpha_0 + \sum\left\{\alpha_\nu\cdot\cos(\nu y) + \beta_\nu\cdot\sin(\nu y)\right\}\right)dy \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{\lambda}{\cancel{2\pi}}\cdot\cancel{2\pi}\cdot\alpha_0 \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\,dx} \quad (3)$$

▶ $$\int_0^{2\pi}\cos(\nu y)\,dy = \int_0^{2\pi}\sin(\nu y)\,dy = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^{\lambda} f(x)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot\mu\cdot x}{\lambda}\right)dx \overset{(2)}{=}$$

(*! όπου μ τυχαίος φυσικός αριθμός)

$$= \alpha_0\cdot\int_0^{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi\cdot\overset{*!}{\mu}\cdot x}{\lambda}\right)dx + \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\cdot\int_0^{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot\mu\cdot x}{\lambda}\right)dx$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\int_0^{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot\mu\cdot x}{\lambda}\right)dx = \quad \boxed{y\equiv\frac{2\pi\cdot x}{\lambda}}$$

$$=\frac{\alpha_0\cdot\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\mu y)\,dy + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu\cdot\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\nu y)\cos(\mu y)\,dy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu\cdot\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\nu y)\cos(\mu y)\,dy \overset{(6)}{=} \frac{\alpha_\mu\cdot\lambda}{2\pi}\cdot\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_\mu = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot\mu\cdot x}{\lambda}\right)dx} \quad (5)$$

- $\int_0^{2\pi}\cos(\nu y)\cdot\sin(\mu y)\,dy = 0 \quad \forall\ \mu,\nu = 1,2,3,\dots$ (6α)
- $\int_0^{2\pi}\cos(\nu y)\cdot\cos(\mu y)\,dy = \int_0^{2\pi}\sin(\nu y)\sin(\mu y)\,dy = 0 \quad \forall\ \mu\neq\nu$ (6β)
- $\int_0^{2\pi}\cos^2(\nu y)\,dy = \int_0^{2\pi}\sin^2(\nu y)\,dy = \pi \quad \forall\ \nu = 1,2,3,\dots$ (6γ)

- Μα πώς θα θυμάμαι τα ολοκληρώματα αυτά;
- 1ον: θα υπάρχουν στο τυπολόγιο.
- 2ον: Αρκεί να θυμάσαι ότι τα διαφορετικά, δηλ. $\mu\neq\nu$ ή sin·cos δίνουν μηδέν και....

▶ ... και ότι $\int_0^{2\pi} \cos^2(\nu y)\,dy = \int_0^{2\pi} \sin^2(\nu y)\,dy$ (7α) το οποίο καθίσταται διαισθητικά προφανές από την γραφική παράσταση των $\cos^2$ κ' $\sin^2$. Από εκεί και πέρα

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\nu y)\,dy + \int_0^{2\pi} \sin^2(\nu y)\,dy = \int_0^{2\pi} \{\cos^2(\nu y) + \sin^2(\nu y)\}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dy = 2\pi \quad (7β) \xRightarrow{(7α)} (6γ)\ !!$$

▶ Κατά τρόπο παρόμοιο προκύπτει ότι

$$\boxed{b_\mu = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cdot \sin\left(\frac{2\pi\cdot\mu\cdot x}{\lambda}\right)dx} \quad (8)$$

▶ Αντικαθιστώντας τις (3), (5) κ' (8) στην (2) προκύπτει η $f(x)$ ως γραμμικός συνδυασμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

▶ Κάθε $f(x)$ είναι άθροισμα μιας περιττής κ' μιας άρτιας συνάρτησης. (9). Πράγματι:

▶ $$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2} - \frac{f(-x)}{2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]} =$$

$$= f_\alpha(x) + f_\pi(x) \quad (10)$$

▶ $f_\alpha(-x) = \frac{1}{2}\left[f(-x)+f(-(-x))\right] = f_\alpha(x) \rightarrow$ η f_α άρτια

▶ $f_\pi(-x) = \frac{1}{2}\left[f(-x)-f(-(-x))\right] = -f_\pi(x) \rightarrow$ η f_π περιττή } (11)

▶ (10) και (11) $\Rightarrow$ (9)

▶ (10) $\Rightarrow$
$$\left.\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right] \\ \cos\left(\frac{2\pi\nu x}{\lambda}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi\nu(-x)}{\lambda}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi\nu x}{\lambda}\right) &= -\sin\left(\frac{2\pi\nu(-x)}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(1)}$$

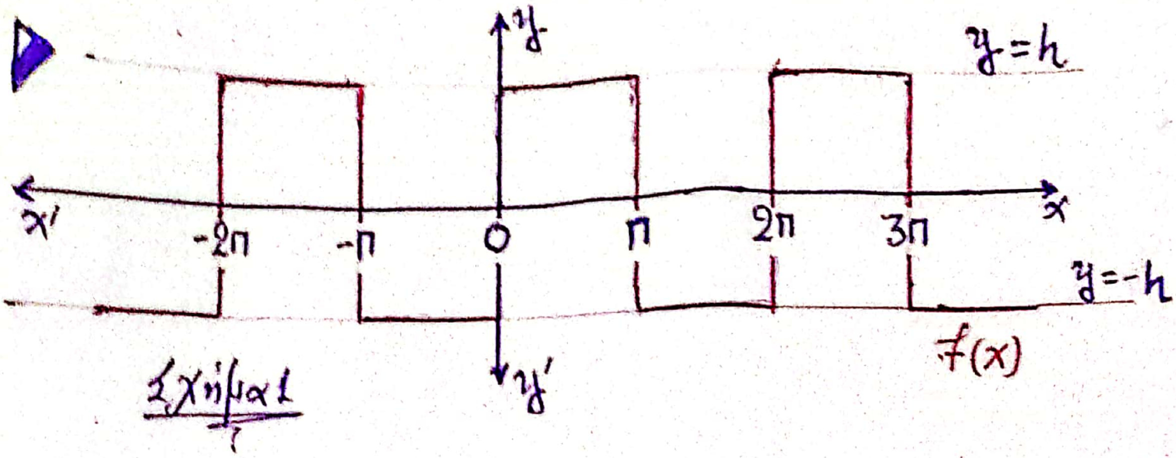
$$\left.\begin{aligned} &\xRightarrow{(1)} f_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \cdot \cos\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right) \\ &\text{κ' ομοίως προκύπτει ότι } f_\pi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \cdot \sin\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} (13)$$

▶ Έστω η $f(x)$ άρτια. Τότε $f(x) = f(-x) \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = f_\alpha(x) \xRightarrow{(13)} \boxed{f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \cdot \cos\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right)} \quad (14)$$

▶ Ομοίως προκύπτει ότι αν η $f(x)$ περιττή

τότε
$$\boxed{f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \cdot \sin\left(\frac{2\pi\cdot\nu\cdot x}{\lambda}\right)} \quad (15)$$



Η συνάρτηση $f(x)$ του σχήματος 1 είναι περιοδική με περίοδο $\lambda = 2\pi$.

Επίσης $f(-x) = -f(x)$ δηλ. η $f(x)$ περιττή. Συνεπώς αναμένουμε ότι $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = \cdots = 0$ (16)

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} h & 0 < x < \pi \\ -h & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad (17)$$

$$(17) \overset{(3)}{\Rightarrow} \alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} h\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} h\,dx\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\pi h - \pi h\right\} = 0 \quad (18)$$

$$(5) \overset{(17)}{\Rightarrow} \frac{\pi \cdot \alpha_\nu}{h} = \int_0^{\pi} \cos(\nu x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\nu x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu \cdot \pi \cdot \alpha_\nu}{h} = \int_0^{\nu\pi} \cos(\nu x)\,d(\nu x) - \int_{\nu\pi}^{2\nu\pi} \cos(\nu x)\,d(\nu x) =$$

$$= \sin(\nu\pi) - \sin(0) - \sin(2\nu\pi) + \sin(\nu\pi) = 0 \quad (19)$$

$$(8) \overset{(17)}{\Rightarrow} \frac{\pi \beta_\nu}{h} = \int_0^{\pi} \sin(\nu x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\nu x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu \cdot \pi \cdot \beta_\nu / h = \int_0^{\nu\pi} \sin(\nu x)\,dx - \int_{\nu\pi}^{2\nu\pi} \sin(\nu x)\,dx =$$

$$= -\cos(\nu\pi) + \cos(0) + \cos(2\nu\pi) - \cos(\nu\pi) = \begin{cases} 4, & \nu \text{ περιττό} \\ 0, & \nu \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (20)$$

▶ (2), (18), (19) κ' (20) $\Rightarrow f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \right.$

$\left. + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right)$ (21)

▶ ...

▶ (2), (18), (19) κ' (20) $\Rightarrow f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right)$ (21)

▶ Ωστόσο η μέθοδος Fourier είναι χρήσιμη και σε μη-περιοδικές συναρτήσεις.

▶ Έστω η τριγωνική συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ (22)
η οποία ορίζεται αποκλειστικά στο $[0, \pi]$.

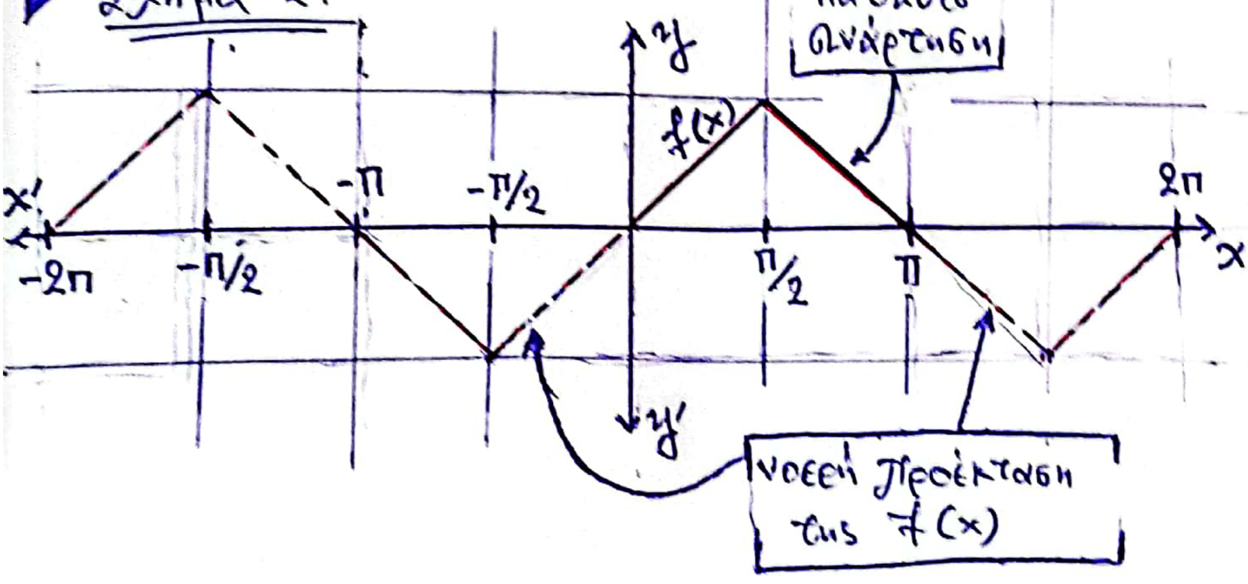
▶ Μπορούμε νοερά (βλ. διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 2) να προεκτείνουμε την $f(x)$ ούτως ώστε να καταστεί περιττή ($f(x) = -f(-x)$) συνάρτηση με περίοδο $\lambda = 2\pi$.

▶ Με άλλους λόγους: μπορούμε να θεωρήσουμε την $f(x)$ ως τμήμα μιας περιττής περιοδικής συνάρτησης.

▶ Κατά συνέπεια: $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\left(\frac{2\pi \cdot \nu \cdot x}{2\pi}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cdot \sin(\nu x) \quad (23)$$

▶ Σχήμα 2:



▶ Πέρα από τα ολοκληρώματα (6) ισχύουν κ' τα εξής:

▶ $\int_0^{\pi} \cos(\nu y)\cdot\sin(\mu y)\,dy = 0 \quad \forall\ \mu,\nu = 1,2,3,\dots$ (24α)

▶ $\int_0^{\pi} \cos(\nu y)\cdot\cos(\mu y)\,dy = \int_0^{\pi}\sin(\nu y)\cdot\sin(\mu y)\,dy = 0 \quad \forall\ \mu\neq\nu$ (24β)

▶ $\int_0^{\pi} \cos^2(\nu y)\,dy = \int_0^{\pi}\sin^2(\nu y)\,dy = \pi/2 \quad \forall\ \nu = 1,2,3,\dots$ (24γ)

▶ Στην πραγματικότητα: (24) $\Longrightarrow$ (6). (εκτός ύλης)

▶ Συνεπώς: $\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(\mu x) \overset{(23)}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \int_0^{\pi}\sin(\nu x)\cdot\sin(\mu x)\,dx \overset{(24\beta)}{=}$

$= b_\mu \int_0^{\pi}\sin^2(\mu x)\,dx \overset{(24\gamma)}{=} b_\mu\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}b_\mu = \int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(\mu x)\,dx \overset{(22)}{=}$

$= \int_0^{\pi/2} x\cdot\sin(\mu x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\cdot\sin(\mu x)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow b_\mu\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\mu^2 = \int_0^{\mu\cdot\pi/2}(\mu x)\cdot\sin(\mu x)\cdot d(\mu x) + (\mu\pi)\int_{\mu\pi/2}^{\mu\pi}\sin(\mu x)\cdot d(\mu x)$

$- \int_{\mu\pi/2}^{\mu\pi}(\mu x)\cdot\sin(\mu x)\cdot d(\mu x) = \left[\sin y - y\cos y\right]_0^{\mu\pi/2} - \mu\pi\left[\cos y\right]_{\mu\pi/2}^{\mu\pi}$

$- \left[\sin y - y\cos y\right]_{\mu\pi/2}^{\mu\pi} = \sin(\mu\pi/2) \boxed{- \frac{\mu\pi}{2}\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)} - \cancel{\sin 0} + \cancel{0\cos(0)}$

$-(\mu\pi)\cos(\mu\pi) + \boxed{(\mu\pi)\cos\left(\mu\pi/2\right)} - \cancel{\sin(\mu\pi)}^{\,0} + (\mu\pi)\cdot\cos(\mu\pi) + \sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) -$

$\boxed{- \frac{\mu\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)} = 2\cdot\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \mu = 2,4,6,8,\dots \\ 2, & \mu = 1,5,9,\dots \\ -2, & \mu = 3,7,11,\dots \end{cases}$ $\overset{(23)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right)} \quad (25)$$

▶ (22) $\Rightarrow f(\pi/2) = \pi/2$

▶ (25) $\Rightarrow f(\pi/2) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2\nu)^2}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2\nu)^2}} \quad (26)$$

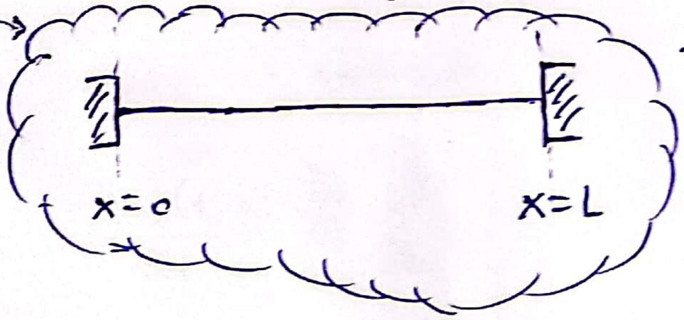
▶ Είδαμε ότι για μια χορδή με πακτωμένα άκρα*! η κυματική εξίσωση επιδέχεται –μεταξύ πολλών άλλων– λύσεις της μορφής

$$y_\nu = [A_\nu \cdot \cos(\omega_\nu t) + B_\nu \cdot \sin(\omega_\nu t)] \cdot \sin(k_\nu x) \quad (27)$$

όπου $k_\nu = \frac{\nu\pi}{L}$, $\omega_\nu = k_\nu \cdot c \Rightarrow \omega_\nu = \frac{\nu\pi c}{L}$ (28)

όπου L το μήκος της χορδής, c η ταχύτητα διάδοσης του κύματος πάνω στην χορδή κ' $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ (29)

▶ (*!)



Σχήμα 3
?

▶ Αρχή επαλληλίας: y_1, y_2 λύσεις της κυματικής εξίσωσης $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ κάθε γραμμικός συνδυασμός των y_1 κ' y_2 είναι επίσης λύση της.

▶ Εν προκειμένω: Τα y_ν λύσεις $\Rightarrow$ η $\boxed{y(t,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu(t,x)}$ (30) είναι επίσης λύση.

▶ Όπως θα δούμε στην συνέχεια: Αρχικές συνθήκες + Μέθοδος Fourier
$\longrightarrow A_\nu, B_\nu \longrightarrow$ μονοσήμαντος προσδιορισμός $y(t,x)$.

$$y_0(x) \equiv y(t=0,x) \underset{(27)}{\overset{(30)}{\equiv}} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cdot \sin(k_\nu \cdot x) \overset{(28)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cdot \sin(\nu \cdot y), \quad y \equiv \frac{\pi \cdot x}{L} \quad (31)$$

$$\int_0^L y_0(x) \cdot \sin(\mu y) \cdot dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cdot \int_0^L \sin(\nu y) \cdot \sin(\mu y)\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\nu y) \cdot \sin(\mu y)\, dy \overset{(24)}{=} A_\mu \cdot \frac{L}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_\mu = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \cdot \sin\left(\frac{\mu \pi x}{L}\right) \cdot dx} \quad (32)$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Οι συντελεστές A_μ καθορίζονται από την αρχική θέση ($y_0(x)$) των στοιχείων της χορδής κ' όχι από την αρχική ταχύτητα.

<u>Παρατήρηση 2</u>: $y_0(x) = 0 \overset{(32)}{\Longrightarrow} A_\mu = 0 \ \forall \mu$.

$$\upsilon(t,x) = \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} \overset{(30)}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial y_\nu}{\partial t} \overset{(27)}{=}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[-\omega_\nu \cdot A_\nu \cdot \sin(\omega_\nu t) + \omega_\nu \cdot B_\nu \cdot \cos(\omega_\nu t)\right] \cdot \sin(k_\nu x) \quad (33) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_0(x) \equiv \upsilon(t=0,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu \cdot B_\nu \cdot \sin(k_\nu x) \overset{(28)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \upsilon_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu \cdot B_\nu \cdot \sin\left(\frac{\nu \pi x}{L}\right) \quad (34)$$

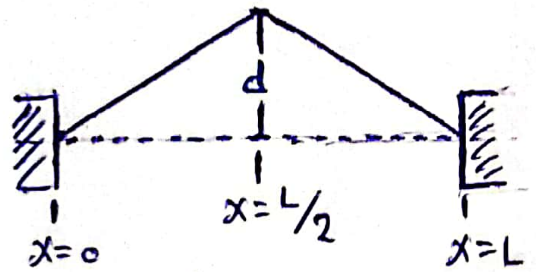
$$\int_0^L \upsilon_0(x) \cdot \sin\left(\frac{\mu \pi x}{L}\right) \cdot dx \overset{(34)}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu \cdot B_\nu \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{\mu \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\nu \pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu \cdot B_\nu \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{\mu\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot d\left(\frac{\pi x}{L}\right) \overset{(24)}{=}$$

$$= \omega_\mu \cdot B_\mu \cdot \frac{L}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_\mu \cdot B_\mu = \frac{2}{L} \int_0^L \upsilon_0(x) \cdot \sin\left(\frac{\mu\pi x}{L}\right) \cdot dx} \quad (35)$$

▶ Παρατήρηση 1': Οι συντελεστές B_μ καθορίζονται απ' την αρχική ταχύτητα ($\upsilon_0(x)$) των στοιχείων της χορδής κ' είναι ανεξάρτητες της αρχικής τους θέσης ($y_0(x)$).

▶ Παρατήρηση 2': $\upsilon_0(x) = 0 \xRightarrow{(35)} B_\mu = 0 \ \forall \mu$.

▶ 

Σχήμα 4

▶ Το λοιπόν· έστω η χορδή του Σχήματος 3. Ξέγνοιαστη κ' αμέριμνη στην θέση ισορροπίας της. Και ενώ όλα είναι απλά κ' όμορφα φιλομαθής τις φυσικός αποφασίζει να διαταράξει την θερινή της ραστώνη αναβιβάζοντας το μέσο της κατά d (Σχήμα 4).

▶ Και διερωτάται -φιλομαθής ων- αν αφεθεί η χορδή ελεύθερη ποια η [redacted] $y(t,x)$ που περιγράφει το στάσιμο κύμα που θα δημιουργηθεί; Διερωτάται -φευ, καλοκαιριάτικα- ποιοι οι συντελεστές A_ν κ' B_ν στην εξίσωση (27) για το εν λόγω στάσιμο κύμα; Ας τον βοηθήσουμε...

▶ Η χορδή αφήνεται ελεύθερη. Άρα $\upsilon_0(x) = 0 \xRightarrow{(35)} B_\nu = 0 \ \forall \nu$

▶ Επίσης: [redacted] Σχήμα 4 $\Rightarrow y_0(x) = \begin{cases} \frac{2d}{L} \cdot x & \text{για } 0 \le x \le L/2 \\ \frac{2d}{L} \cdot (L - x) & \text{για } \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$ (36)

▶ $(32) \xRightarrow{(36)} \frac{L \cdot A_\nu}{2} = \int_0^L \frac{2d}{L} \cdot x \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L \frac{2d}{L} \cdot (L - x) \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_\nu \cdot \nu^2 \cdot \pi^2}{4d} = \int_0^{\nu\pi/2} \left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) + \qquad y \equiv \frac{\nu\pi x}{L}$$

$$+ \int_{\nu\pi/2}^{\nu\pi} (\nu\pi) \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) - \int_{\nu\pi/2}^{\nu\pi} \left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \overset{(38)}{=}$$

$$= \left[\sin y - y\cos y\right]_0^{\nu\pi/2} - (\nu\pi) \cdot \left[\cos y\right]_{\nu\pi/2}^{\nu\pi} - \left[\sin y - y\cos y\right]_{\nu\pi/2}^{\nu\pi} =$$

$$= \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - \cancel{\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)} - \cancel{\sin 0}^{\,0} - \cancel{0 \cdot \cos 0}^{\,0} - \boxed{\cancel{(\nu\pi) \cdot \cos(\nu\pi)}} +$$

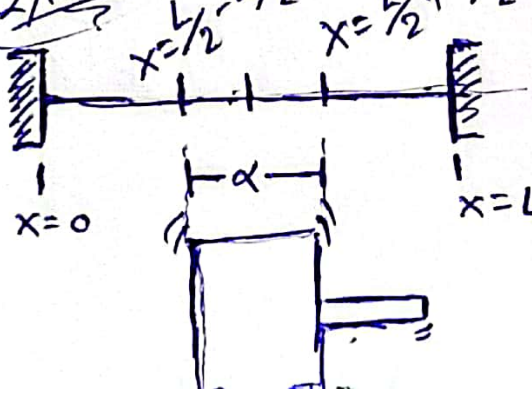
$$+ \cancel{(\nu\pi) \cdot \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)} - \cancel{\sin(\nu\pi)}^{\,0} + \boxed{\cancel{(\nu\pi) \cdot \cos(\nu\pi)}} + \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - \cancel{\frac{\nu\pi}{2}\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{A_\nu = \frac{8d}{\nu^2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)} \quad (37)$$

▶ $(\sin\omega - \omega \cdot \cos\omega)' = \omega \sin\omega$ (38)

▶ Έστω ότι κτυπούμε την χορδή στο μέσο της με σφυρί πλάτους α, προσδίδοντας κατ' αυτόν τον τρόπο μια κοινή αρχική ταχύτητα σε όλα τα στοιχεία που έρχονται σε επαφή με αυτό. (βλ. Σχήμα 5) (39)

▶ Σχήμα 5



▶ Συνεπώς: $y_0(x) = 0 \ \forall x \in [0, L]$

και $$\upsilon_0(x) = \begin{cases} \upsilon, & |x - \frac{L}{2}| \le \frac{\alpha}{2} \\ 0, & |x - \frac{L}{2}| > \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$ (40)

$\blacktriangleright$ (32) $\overset{(39)}{\Longrightarrow}$ $A_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L 0 \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow \boxed{A_\nu = 0 \ \forall \nu}$ (41)

$\blacktriangleright$ (35) $\overset{(40)}{\Longrightarrow}$ $\frac{L}{2} \cdot \omega_\nu \cdot B_\nu = \int_{\frac{L}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{L}{2}+\frac{\alpha}{2}} \upsilon \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\nu\pi}{\cancel{L}} \cdot \frac{1}{\upsilon} \cdot \frac{\cancel{L}}{2} \cdot \omega_\nu \cdot B_\nu = \int_{\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{L}}^{\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\nu\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{L}} \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) =$$

$$= -\cos\left(\frac{\nu\pi}{2} + \left(\frac{\nu\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{L}\right)\right) + \cos\left(\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - \frac{\nu\pi}{2}\frac{\alpha}{L}\right) =$$

$$= -\cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta) =$$

$$= -\cancel{\cos\gamma\cos\delta} + \sin\gamma\cdot\sin\delta + \cancel{\cos\gamma\cos\delta} + \sin\gamma\sin\delta =$$

$$= 2\sin\gamma\cdot\sin\delta = 2\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B_\nu = \frac{4}{\nu\pi}\cdot\frac{\upsilon}{\omega_\nu}\cdot\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{L}\right)} \quad (42)$$