Στάσιμο κύμα σε δισδιάστατη μεμβράνη

▶ Έστω μεμβράνη μήκους α κ' πλάτους β που βρίσκεται αρχικά ακίνητη επί του επιπέδου $z=0$ εκτεινόμενη μεταξύ των σημείων $(x,y,z)=(0,0,0),(\alpha,0,0),(0,\beta,0),(\alpha,\beta,0)$.

▶ Ένα επίπεδο εγκάρσιο κύμα διαδίδεται στην επιφάνεια της μεμβράνης προξενώντας στα στοιχεία της μετατόπιση $Z_1=A_1\exp i(\omega t-K_x x-K_y y)$ ① όπου $K_x, K_y>0$, ώστε το κύμα διαδίδεται προς τα θετικά x κ' y.

▶ Οι 4 πλευρές της μεμβράνης είναι πακτωμένες ώστε παραμένουν ακίνητες.

▶ Όταν το κύμα ① συναντά την ευθεία $y=\beta$ ανακλάται στην αντίστοιχη πακτωμένη πλευρά με αποτέλεσμα η y-συνιστώσα του κυματανύσματος $\vec{k}$ να αντιστρέφεται κ' να προκύπτει το ανακλώμενο κύμα $Z_2=A_2\exp i(\omega t-K_x x+K_y y)$ ②.

▶ Εφόσον $K_x, K_y>0$ το κύμα ② κινείται προς τα θετικά x αλλά προς τα αρνητικά y, ώστε συναντά την ευθεία $x=\alpha$ όπου ανακλάται με την x-συνιστώσα του κυματανύσματος να αντιστρέφεται κ' να προκύπτει το ανακλώμενο κύμα $Z_3=A_3\exp i(\omega t+K_x x+K_y y)$ ③.

▶ Εφόσον $K_x, K_y>0$ το κύμα ③ κινείται προς τα αρνητικά x κ' y ώστε συναντά την ευθεία $y=0$ όπου η y-συνιστώσα του κυματανύσματος αντιστρέφεται εκ νέου για να προκύψει το ανακλώμενο κύμα

$$Z_4=A_4\exp i(\omega t+K_x x-K_y y) \quad ④.$$

▶ Τα κύματα ① έως ④ συμβάλλουν μεταξύ των παλλόμενων ορίων της μεμβράνης. Κάθε στοιχείο της ταλαντώνεται υπό την επίδραση της επαλληλίας τους, δηλ. έχει απομάκρυνση

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \quad (5)$$

▶ $z(t, x=0, y) = 0 \xRightarrow{1 \text{ έως } 5} A_1 e^{i\omega t - ik_y y} + A_2 \cdot e^{i\omega t + ik_y \cdot y} +$

$+ A_3 \cdot e^{i\omega t + ik_y \cdot y} + A_4 \cdot e^{i\omega t - ik_y \cdot y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A_1 + A_4) + (A_2 + A_3) \cdot e^{2ik_y \cdot y} = 0 \quad (6)$

Ο μόνος τρόπος να ισχύει η 6 $\forall y$ είναι να ισχύει

$\boxed{A_1 = -A_4}$ (7) κ' $\boxed{A_2 = -A_3}$ (8)

▶ $z(t, x, y=0) = 0 \xRightarrow{1 \text{ έως } 5}$ .... ομοίως... $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A_1 = -A_2}$ (9) κ' $\boxed{A_3 = -A_4}$ (10)

▶ (7) έως (10) $\Rightarrow \begin{cases} A_2 = -A_1 \\ A_3 = A_1 \\ A_4 = -A_1 \end{cases}$ (11)

▶ (1) έως (4) $\xRightarrow[(11)]{(5)}$ $z = A_1 \cdot e^{i\omega t} \cdot [e^{-ik_x \cdot x - ik_y \cdot y} -$

$- e^{-ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} + e^{ik_x \cdot x + ik_y \cdot y} - e^{ik_x \cdot x - ik_y \cdot y}] = \ldots$

▷ Θέτω $\alpha \equiv k_x \cdot x$ κ' $\beta \equiv k_y \cdot y$. (12)

▷ $\ldots \overset{(12)}{=} A_1 \cdot e^{i\omega t} \cdot \left[e^{-i\alpha} e^{-i\beta} - e^{-i\alpha} e^{i\beta} + e^{i\alpha} e^{i\beta} - e^{i\alpha} e^{-i\beta} \right]$ (13)

▷ $[-//-] = e^{i\alpha}\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right) - e^{-i\alpha}\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right) =$

$= \left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right) =$ τύπος Euler

$= 2i \sin\alpha \cdot 2i \sin\beta \overset{i^2=-1}{=\!=} -4 \sin\alpha \sin\beta$ (14)

▷ $(13) \xRightarrow[(14)]{(12)} z = -4 A_1 \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot e^{i\omega t}$ (15)

▷ Επιλέγοντας είτε το φανταστικό είτε το πραγματικό μέρος της (15) βλέπουμε ότι το στοιχείο στην θέση x,y εκτελεί α.α.τ. με πλάτος $A = -4A_1 \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y)$ (16) κ' γωνιακή συχνότητα ω.

▷ Το πλάτος (16) είναι χρονοανεξάρτητο έξου κ' ο χαρακτηρισμός του κύματος ως στάσιμου.

▷ $Re\left(e^{i\omega t}\right) = \cos(\omega t)$. κ' $Im\left(e^{i\omega t}\right) = \sin(\omega t)$. Άρα στην (16) $Re(z) = -4 \cdot A_1 \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \cos(\omega t)$

και $Im(z) = -4 \cdot A_1 \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \sin(\omega t)$.

▷ $z(t, x, y = \beta) = 0 \overset{(16)}{\Rightarrow} \sin(k_y \cdot \beta) = 0 \Rightarrow \boxed{k_y = \frac{\nu\pi}{\beta},\ \nu = 1, 2, 3, \ldots}$ (17)

▶ $z(t, x=\alpha, y) = 0 \overset{(16)}{\Rightarrow} \sin(k_x \cdot \alpha) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{k_x = \frac{\mu\pi}{\alpha}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots} \quad (18)$$

▶ Οι (17) κ' (18) είναι αναγκαίες συνθήκες για τον σχηματισμό στάσιμου κύματος στην υπό μελέτη μεμβράνη.

▶ $z(t, x=\alpha, y) = 0 \overset{16}{\Rightarrow} \sin(k_x \cdot \alpha) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{k_x = \frac{\mu \pi}{\alpha}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots} \quad (18)$$

▶ Οι (17) κι (18) είναι αναγκαίες συνθήκες για τον σχηματισμό στάσιμου κύματος στην υπό μελέτη μεμβράνη.