Εγκάρσια κύματα σε δισδιάστατη μεμβράνη

▶ Έστω μεμβράνη δισδιάστατη της οποίας η θέση ισορροπίας (δηλαδή η θέση ισορροπίας ενός εκάστου των στοιχείων της) βρίσκεται πάνω στο επίπεδο x-y.

▶ Έστω διάδοση μικρής διαταραχής επί της μεμβράνης, που αναγκάζει τα στοιχεία της να εκτελούν μικρού πλάτους ταλαντώσεις κάθετες στην θέση ισορροπίας τους.

▶ Τότε η απομάκρυνση $z(t,x,y)$ των στοιχείων ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1)$$

▶ Η (1) επιδέχεται - μεταξύ πολλών άλλων - και λύσεις της μορφής

$$z = A\,\eta\mu\varphi \text{ ή } A\,\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (2)$$

όπου $\varphi \equiv \omega t - k_x x - k_y y$. (3).

▶ $(2) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k_x^2 z,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k_y^2 z,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 z \overset{(1)}{\Rightarrow} \cdots$

$$\cdots \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\omega^2}{v^2} = k_x^2 + k_y^2 \equiv k^2} \quad (4)$$

▶ Η (2) είναι λύση της (1) εφόσον ισχύει η (4).

▶ Η λύση αυτή περιγράφει ένα κύμα που κινείται επί της μεμβράνης κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{k} = k_x\cdot\hat{x} + k_y\cdot\hat{y}$. (*!)

▶ Οι κορυφές κ' οι κοιλάδες του κύματος είναι διατεταγμένες σε ευθείες γραμμές παράλληλες μεταξύ τους κ' κάθετες στο $\vec{k}$.
(βλ. Pain, σελ. 315, Σχήμα 9.1, Κεφ 9)

▶ Θέτοντας $\vec{r} \equiv x\cdot\hat{x} + y\cdot\hat{y}$ κ' $\vec{k} \equiv k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$ η (3) γίνεται

$$\boxed{\varphi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (5)$$

(*!) Με μήκος κύματος $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ κ' συχνότητα $f = \frac{\omega}{2\pi}$ άρα περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

▶ Η (1) είναι γραμμική: Αν οι $z = f(t,x,y)$ κ' $z = g(t,x,y)$ είναι λύσεις της (1) τότε κ' κάθε συνδυασμός της μορφής $z = \alpha \cdot f(t,x,y) + \beta \cdot f(t,x,y)$ (6) όπου α, β τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί (δηλ. κάθε γραμμικός συνδυασμός των λύσεων f κ' g) είναι λύση.

▶ Ειδικότερα η $z = A\cos\varphi + iA\sin\varphi = Ae^{i\varphi}$ (7) είναι λύση.

▶ Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών για την μελέτη του φαινομένου ενθυμούμενοι ωστόσο ότι φυσική σημασία έχει το $Re[z]$ ή το $Im[z]$ (αυτά δηλαδή μπορούν να ταυτιστούν με την απομάκρυνση των στοιχείων της μεμβράνης) κ' όχι το $Ae^{i\varphi}$.

▶ Έστω τώρα ότι η μεμβράνη εκτείνεται χωρίς όρια κατά μήκος του $x'x$ ενώ παράλληλα είναι πακτωμένη κατά μήκος των ευθειών $y=0$ κ' $y=b$. (δηλ $z(t,x,0) = z(t,x,b) = 0$)

▶ Τότε το κύμα που περιγράφεται από τις (2) κ' (5) - εναλλακτικά από τις (2) κ' (7) - διαδιδόμενο κατά μήκος του $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$ κ' εφόσον $k_y < 0$ είναι λογικό ότι συναντά το πακτωμένο όριο $y=0$ (βλ. Σχήμα 9.3, σελ. 319, κεφ. 9 του Pain) όπου κ' ανακλάται.

▶ Το ανακλώμενο κύμα έχει ίδιο ω κ' k_x. Ωστόσο η συνιστώσα k_y του $\vec{k}$ αλλάζει πρόσημο. Κατ'αυτόν τον τρόπο το κύμα ανακλάται με την γωνία πρόσπτωσης να ταυτίζεται με την γωνία ανάκλασης.

▶ Στην γειτονιά της $y=0$ το ανακλώμενο κύμα συμβάλλει με το προσπίπτον άρα το κύμα που προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό:

$$z = A\,\eta\mu(\omega t - k_x x - k_y y) + A'\,\eta\mu(\omega t - k_x x + k_y y) \quad (8)$$

$$\text{ή} \quad z = A e^{i(\cdots\cdots)} \qquad + A' e^{i(-//-)} \quad (8')$$

▶ Στο πακτωμένο όριο $y=0$ θα πρέπει να ισχύει $z(x, y=0, t)=0$

$$\overset{(8')}{\Longrightarrow} \ldots \Rightarrow A = -A' \quad (9)$$

▶ (9) κ' $(8') \Rightarrow z = A e^{i(\omega t - k_x x)} \cdot \left(e^{ik_y y} + e^{-ik_y y}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = 2A\, e^{i(\omega t - k_x x)} \cdot \eta\mu(k_y y) \quad (10)$$

▶ Στο πακτωμένο όριο $y=b$ θα πρέπει να ισχύει

$$z(x, y=b, t) = 0 \overset{(10)}{\Longrightarrow} \eta\mu(k_y b) = 0 \Rightarrow \boxed{k_y \cdot b = \nu\pi} \ (11), \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

▶ $$(4) \Rightarrow k^2 \geqslant k_y^2 \overset{(11)}{=} \frac{\nu^2\pi^2}{b^2} \overset{k=\frac{2\pi}{\lambda}}{\Longrightarrow} \frac{4\cancel{\pi^2}}{\lambda^2} \geqslant \frac{\nu^2\cancel{\pi^2}}{b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \leqslant \frac{4b^2}{\nu^2} \Rightarrow \boxed{\lambda \leqslant \frac{2b}{\nu}} \overset{\upsilon=\lambda f}{\Longrightarrow} \boxed{f \geqslant \frac{\upsilon\nu}{2b}} \overset{\omega=2\pi f}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega \geqslant \frac{\upsilon \cdot \nu \cdot \pi}{b}} \overset{\boxed{\upsilon k = \omega}}{\Longrightarrow} \boxed{k \geqslant \frac{\nu\pi}{b}}$$

▶ Συνεπώς μεταξύ των πακτωμένων ορίων $y=0$ κ' $y=b$ είναι εφικτή η διάδοση κυμάτων των οποίων η γων. συχνότητα υπερβαίνει την ελάχιστη τιμή $\omega_{min} = \frac{v \cdot \pi}{b}$.

▶ Ισοδύναμα είναι ανέφικτη η διάδοση κυμάτων με μήκος κύματος μεγαλύτερο από το $\lambda_{max} = \frac{2b}{v}$.

▶ Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πακτωμένη μεμβράνη ως φίλτρο συχνοτήτων (ή μηκών κύματος).

▶ Ας επιστρέψουμε στην (10).

▶ Έστω ότι η απομάκρυνση των στοιχείων της μεμβράνης από την θέση ισορροπίας τους δίνεται από το φανταστικό μέρος της z. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$z = 2A\eta\mu(k_y y)\cdot\eta\mu(\omega t - k_x x) \quad (12)$$

▶ Η (12) περιγράφει ένα κύμα του οποίου οι «κορυφές» και οι «κοιλάδες» ταξιδεύουν κατά την κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα Ox με ταχύτητα $v_p = \frac{\omega}{k_x}$ (13).

▶ Η v_p καλείται φασική ταχύτητα εξ ου κ' ο δείκτης p από την αγγλική λέξη "phase".

▶ Εδώ προκύπτει το εξής «παράδοξο»: Παρότι η ταχύτητα υ με την οποία κινείται το κύμα ανακλώμενο μεταξύ των πακτωμένων άκρων $y=0$ κ' $y=b$ μπορεί να είναι μη-σχετικιστική, δηλ. πολύ μικρότερη της ταχύτητας c του φωτός, μπορεί να ισχύει $\underline{v_p >>> c}$!

▶ $\underline{\text{Πράγματι}}$: (13) $\Rightarrow v_p = \dfrac{\omega}{k_x} \overset{(4)}{=} \dfrac{vk}{k_x} = \dfrac{v}{(k_x/k)}$ (14)

▶ Μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό του $\vec{k}$ μπορούμε να κάνουμε την συνιστώσα $k_x \hat{x}$ οσοδήποτε αμελητέα ως προς το k. Καθώς $\dfrac{k_x}{k} \to 0$ προκύπτει $\underline{v_p \to \infty}$!!!

▶ Ωστόσο η ενέργεια που μεταφέρει το κύμα (12) δεν ταξιδεύει με την φασική ταχύτητα v_p, αλλά με την λεγόμενη ταχύτητα ομάδος $v_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial k_x} = \dfrac{1}{2\omega} \dfrac{\partial \omega^2}{\partial k_x} = \dfrac{v^2}{2\omega} \dfrac{\partial k^2}{\partial k_x} =$

$$\underset{\boxed{k^2 = k_x^2 + k_y^2}}{=} \frac{v^2}{\cancel{2}\omega} \cdot \cancel{2} k_x \Rightarrow v_g = v^2 \frac{k_x}{\omega} = v^2 \frac{k_x}{\omega} = v^{\cancel{2}} \frac{k_x}{\cancel{v} \cdot k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = v \cdot \frac{k_x}{k}} \quad (15)$$

▶ (4) $\Rightarrow k^2 \geqslant k_x^2 \Rightarrow 1 \geqslant \left(\dfrac{k_x}{k}\right)^2 \Rightarrow 1 \geqslant \left(\dfrac{v_g}{v}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 \geqslant \left|\frac{v_g}{v}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |v_g| \leq |v| \\ |v| < c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{|v_g| < c} \quad (16)$$

▶ η ενέργεια μεταφέρεται με ταχύτητα $v_g \overset{(16)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ η ενέργεια μεταφέρεται με ταχύτητα μικρότερη αυτής του φωτός.

▶ (14), (15) $\Rightarrow \boxed{v_p \cdot v_g = v^2}$ (17) $\Rightarrow$ για δεδομένο v όσο πιο αργά μεταφέρεται η ενέργεια, τόσο ταχύτερα φαίνονται να κινούνται οι κορυφές κ' οι κοιλάδες του κύματος (12).

▶ Παρατηρούμε ότι τόσο για το ανακλώμενο όσο κ' για το προσπίπτον κύμα της (8) ισχύει $\frac{\omega}{k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \upsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_p = \upsilon_g = \upsilon.$$

▶ Εφόσον το αρχικό κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση του $\vec{k}$ θα ισχύει $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{\upsilon} \Rightarrow \frac{k_x}{k} = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} \xRightarrow{(15)}$

$\Rightarrow \upsilon_x = \upsilon_g$, δηλαδή η υ_g της (15) είναι η x-συνιστώσα της ταχύτητας του αρχικού κύματος.

▶ Οι υ_p κ' υ_g των (14) κ (15) είναι η φασική κ' η ταχύτητα ομάδος αντίστοιχα του κύματος κατά του x-άξονα.