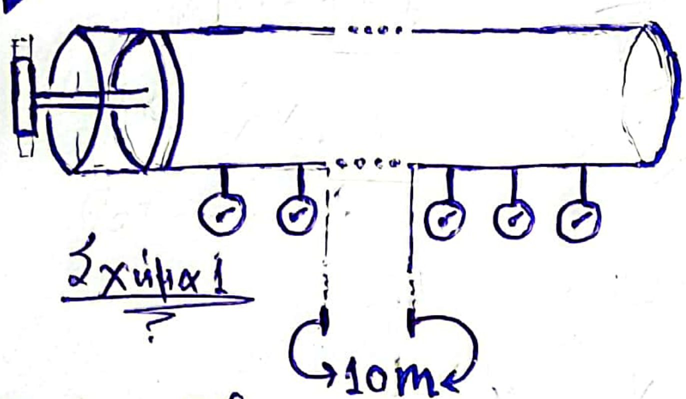
Εξίσωση διαμηκών κυμάτων σε αέρια

▶ Έστω κυλινδρικός σωλήνας γεμάτος με αέριο (βλ. Σχήμα 1). Το δεξί άκρο του σωλήνα είναι φραγμένο, ενώ στο αριστερό άκρο υπάρχει χειροκίνητο έμβολο δια του οποίου δυνάμεθα να μεταβάλλουμε την πίεση του αερίου.

▶



Σχήμα 1

▶ Πλευρικά του κυλίνδρου έχουμε προσαρμόσει μανόμετρα δια των οποίων μετρούμε την πίεση σε κάθε σημείο του σωλήνα.

▶ Ο σωλήνας έχει μήκος 10 μέτρων.

▶ Συμπιέζουμε απότομα το αέριο ωθώντας απότομα το έμβολο προς τα δεξιά κατά 5 cm. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα την απότομη αύξηση της πίεσης του αερίου μπροστά από το έμβολο. η οποία θα αποτυπωθεί στο αντίστοιχο μανόμετρο.

▶ Τι θα συμβεί ωστόσο με την ένδειξη του μανομέτρου στο δεξί άκρο του κυλίνδρου; Αυτή θα μεταβληθεί όχι στιγμιαία - η σύγχρονη Φυσική είναι τοπική - αλλά μετά από την πάροδο ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος.

▶ Ο παρατηρητής θα βλέπει τις βελόνες των μανομέτρων να διαταράσσονται η μια μετά την άλλη κ' κατόπιν να επανέρχονται στην αρχική τους θέση. Σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχείων του ρευστού η διαταραχή της πίεσης ταξιδεύει κατά μήκος του σωλήνα κατά τρόπο ανάλογο με τον παλμό του Σχήματος 2 στο αρχείο 10.Στάσιμα Κύματα.pdf.

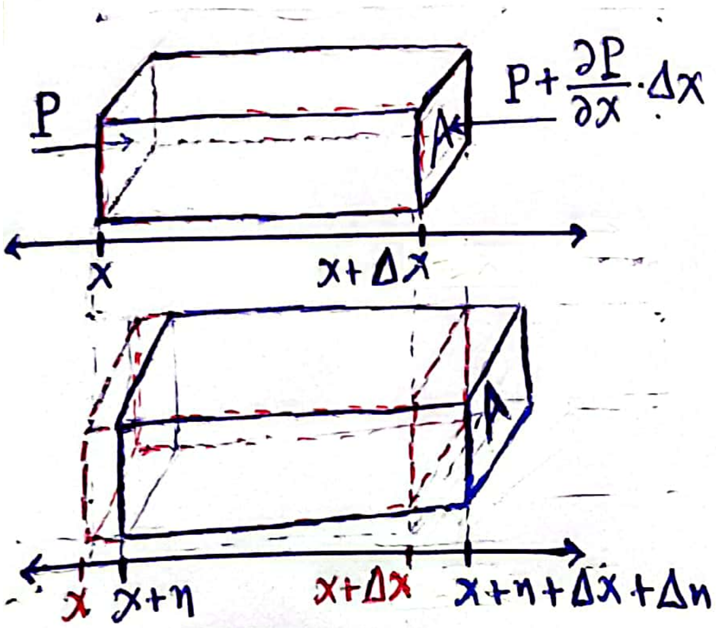
▶ Στην συνέχεια θα εξάγουμε την εξίσωση που περιγράφει την διάδοση μιας τέτοιας διαταραχής σε ένα αέριο.

▶ Αγνοώντας τα φαινόμενα διάχυσης ή θερμοποίησης που τελικά θα οδηγήσουν το ρευστό σε ισορροπία κ' τις βελόνες των μανομέτρων σε ακινησία

Έστω αρχικά ομογενές κ' στατικό αέριο. πίεσης P_0, όγκου V_0 και πυκνότητας ρ_0. Έστω ότι κατά μήκος του άξονα $x'x$ αρχίζουν να διαδίδονται μικρές διαταραχές της πίεσης, οδηγώντας -συνεπώς- σε αντίστοιχες διαταραχές του όγκου κ' της πυκνότητας. Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} P(t,x) &= P_0 + p(t,x), & |p| &\lll P_0 \\ V(t,x) &= V_0 + \upsilon(t,x), & |\upsilon| &\lll V_0 \\ \rho(t,x) &= \rho_0 + \pi(t,x), & |\pi| &\lll \rho_0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Έστω ένα στοιχείο του ρευστού μάζας Δm. κ' εμβαδού διατομής A. (βλ. σχήμα 2). το οποίο κατά την αρχική ισορροπία ευρίσκεται μεταξύ των θέσεων x κ' $x+\Delta x$. Το στοιχείο είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τις βάσεις εμβαδού A κάθετες στον $x'x$. Άρα η διάδοση μιας διαταραχής κατά τον $x'x$ αφήνει το εμβαδό A αναλλοίωτο κ' μεταβάλλει μόνο την θέση κ' το εύρος του στοιχείου ως προς τον $x'x$.



Σχήμα 2

[(*!) Η οποία επίσης μεταβάλλεται με τον χρόνο.]

Κατά την διάδοση της (μικρής) διαταραχής το αριστερό άκρο του στοιχείου μετατοπίζεται κατά η, $|\eta| \ll \Delta x$ κ' το δεξί άκρο κατά $\eta + \Delta\eta$ όπου $|\Delta\eta| \ll |\eta| \ll \Delta x$.

Πρέπει $|\Delta\eta| \ll |\eta|$ ώστε η μεταβολή του όγκου του στοιχείου να είναι μικρή.

Κάθε διατομή του στοιχείου υφίσταται διαφορετική μετατόπιση η (*!). Άρα $\eta = \eta(t,x)$ και

$$\boxed{\Delta\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}\Delta x} \quad (2)$$

(με την ίδια λογική που $d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}dx$.)

▶ Εφόσον $|\Delta u| \ll |u|$ το στοιχείο μπορεί σε πρώτη τάξη να αντιμετωπιστεί ως ασυμπίεστο στερεό. Άρα η ταχύτητά του μπορεί να προσεγγιστεί ως $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ ενώ η επιτάχυνσή του ως $\boxed{\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$ (3)

▶ Κάτι παρόμοιο έχετε ήδη δει στην Ε.Ο.Ε.Κ. για ένα αυτοκίνητο που αρχικά ηρεμεί στην θέση x κ' άρα την στιγμή t βρίσκεται στην θέση $x + \underbrace{\frac{1}{2}\alpha t^2}_{u}$ άρα $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ κ' $\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

▶ Εφόσον το στοιχείο έχει ταχύτητα, έχει κ' κινητική ενέργεια. Σε συμφωνία με τον Β' Νόμο της Θερμοδυναμικής που αποκλείει την ύπαρξη αεικινήτων η κινητική αυτή ενέργεια θερμοποιείται κ' διαχέεται στους μικροσκοπικούς βαθμούς ελευθερίας του αερίου μετατρεπόμενη σε εσωτερική ενέργεια, οδηγώντας στην αύξηση της εντροπίας.

▶ Εφόσον για τις μικρές μεταβολές (1) σε αρκετά μικρές χρονικές κλίμακες οι διεργασίες αυτές είναι σε πρώτη τάξη αμελητέες με αποτέλεσμα η μεταβολή $A \cdot \Delta u$ του όγκου του αερίου να μπορεί να προσεγγιστεί ως αδιαβατική (αφού θεωρήσαμε παράλληλα ότι η μάζα Δm κ' άρα το πλήθος των σωματιδίων του στοιχείου είναι σταθερά).

Άρα για κάποιο $\gamma > 0$ ισχύει $P_0 V_0^{\gamma} = P \cdot V^{\gamma} \overset{(1)}{=}$

$\boxed{\delta = \frac{v}{V_0} \ll 1}$

$$= (P_0 + p) \cdot (V_0 + v)^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} \cdot \left(1 + \frac{p}{P_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{V_0}\right)^{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{1} = \left(1 + \frac{p}{P_0}\right)(1 + \delta)^{\gamma} \overset{*!}{=} \left(1 + \frac{p}{P_0}\right)(1 + \gamma\delta) =$$

$$= \cancel{1} + \frac{p}{P_0} + \gamma \cdot \delta + \underbrace{\frac{p}{P_0} \cdot \gamma \cdot \delta}_{\text{αμελητέος σε 1η τάξη}} \Rightarrow \frac{p}{P_0} + \gamma\delta = 0 \Rightarrow \boxed{p = -\gamma \cdot \delta \cdot P_0}$$ (4)

$\boxed{(*!)\ (1 + \varepsilon)^{\nu} = 1 + \nu \cdot \varepsilon, \text{ αν } |\varepsilon| \ll 1}$

▶ Παρατηρούμε ότι $p \cdot \delta < 0$ γεγονός που σημαίνει ότι καθώς το στοιχείο συμπιέζεται ($\upsilon < 0 \Rightarrow \delta < 0$) η πίεση αυξάνεται ($p \overset{①}{=} P - P_0 > 0$).

▶
$$\Sigma F_x = P \cdot A - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\right) A = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot A \overset{①}{=} -\cancel{\frac{\partial P_0}{\partial x}}^{\,0} \cdot A - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot A$$
$$\Sigma F_x = \Delta m \cdot \alpha = V \cdot \rho \cdot \alpha \overset{③}{=} V_0 \cdot \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = A \cdot \Delta x \cdot \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{Η μάζα του στοιχείου σταθερή} \Rightarrow V \cdot \rho = V_0 \cdot \rho_0}$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad ⑤$$

▶
$$\delta \equiv \frac{\upsilon}{V_0} = \frac{A \cdot \Delta \eta}{A \cdot \Delta x} \overset{②}{=} \frac{\partial \eta}{\partial x} \overset{④}{\Rightarrow} p = -\gamma \cdot P_0 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \cdot P_0 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \overset{⑤}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}} \overset{④}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$$

όπου $c \equiv \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}}$

▶ Άρα προκύπτει για τα η κ' p μια εξίσωση με ιδιότητες εντελώς ανάλογες εκείνης που βρήκαμε για την απομάκρυνση των στοιχείων μιας παλλόμενης χορδής.

▶ Τόσο η διαταραχή όσο κ' η μετατόπιση των στοιχείων εκδηλώνονται κατά τον άξονα $x'x$, για αυτό το κύμα ονομάζεται διαμήκες.