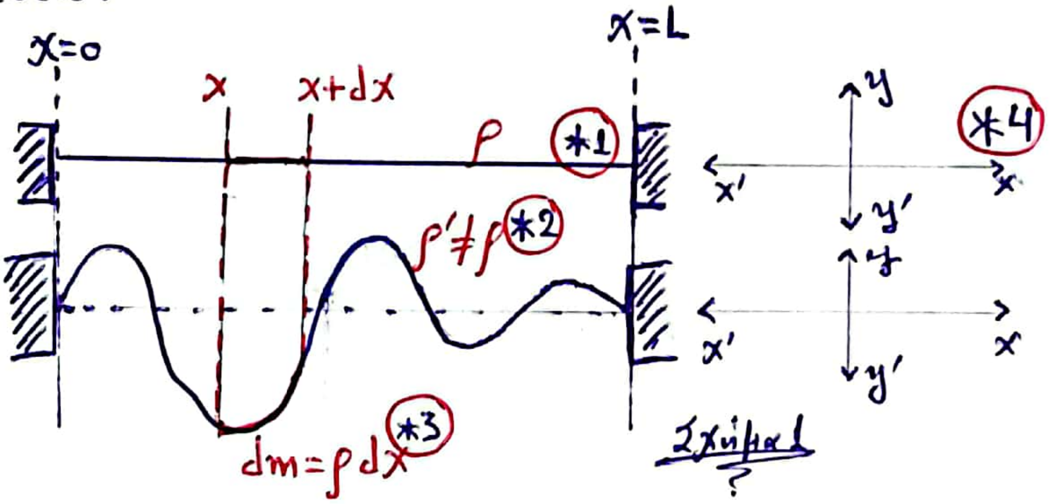
Μηχανική ενέργεια παλλόμενης χορδής

Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

▶ Έστω ομογενής χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ στην θέση ισορροπίας της. Κάθε στοιχείο της εύρους dx θα έχει στοιχειώδη μάζα $\boxed{dm=\rho\cdot dx}$ (1)

▶ Έστω ότι η χορδή αρχίζει να πάλλεται με τα στοιχεία της να ταλαντώνονται αποκλειστικά κατά την εγκάρσια στην χορδή διεύθυνση. Τότε η χορδή παραμορφώνεται κ' η γραμμική της πυκνότητα μεταβάλλεται.

▶ Ωστόσο, εφόσον το στοιχείο που βρίσκεται μεταξύ των θέσεων x και $x+dx$ ταλαντώνεται αποκλειστικά κατά την εγκάρσια διεύθυνση, η μάζα του παραμένει εγκλωβισμένη μεταξύ των θέσεων αυτών κ' άρα ο τύπος (1) εξακολουθεί να ισχύει.

▶ 

Σχήμα 1

▶ *1: χορδή στην θέση ισορροπίας

*2: διαταραγμένη χορδή: η γραμμική πυκνότητα αλλάζει

*3: τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται αποκλειστικά κατά την εγκάρσια στην θέση ισορροπίας διεύθυνση. Άρα η στοιχειώδης μάζα dm μεταξύ των θέσεων x κ' $x+dx$ παραμένει σταθερή κατά την κίνηση της χορδής.

*4: έχουμε προσαρμόσει το σύστημα συντεταγμένων ούτως ώστε η αδιατάρακτη χορδή να είναι συγγραμμική με τον $x'x$ κ' σε κάθε της σημείο να ισχύει $y=0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η απομάκρυνση ενός σημείου από την θέση ισορροπίας του ισούται με y.

▶ Κάθε στοιχείο της χορδής είναι ταλαντωτής μάζας $dm = \rho\, dx$ ① κ' ταχύτητας $\upsilon = \frac{\partial y(t,x)}{\partial t}$ ②. Άρα στοιχειώδους κινητικής ενέργειας

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot \upsilon^2 \underset{②}{\overset{①}{=}} \frac{1}{2}\rho\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad ③$$

▶ Συνεπώς η κινητική ενέργεια της χορδής μεταξύ δύο τυχαίων διαδοχικών θέσεων $x=\alpha$ κ' $x=\beta>\alpha$ ισούται με

$$K = \frac{1}{2}\rho \int_{x=\alpha}^{x=\beta} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \quad ④$$

▶ Η σχέση ④ ισχύει για κάθε χορδή αρκεί (α) η γραμμική πυκνότητα στην ισορροπία να είναι σταθερή κ' (β) η ταλάντωση των σημείων της να είναι κάθετη στην θέση ισορροπίας.

▶ Για την χορδή του σχήματος 1 η ④ εξειδικεύεται ως εξής:

$$K = \frac{1}{2}\rho \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \quad ⑤$$

▶ Έστω ότι στην χορδή εκδηλώνονται στάσιμο κύμα της μορφής

$$\left.\begin{aligned} &y_\nu(t,x) = \left[A_\nu\, \eta\mu(\omega_\nu t) + B_\nu\, \sigma\upsilon\nu(\omega_\nu t)\right]\cdot \eta\mu\,(k_\nu x) \\ &\text{όπου} \quad k_\nu = \nu\pi/L \quad \text{κ'} \quad \omega_\nu = k_\nu \cdot c = \frac{\nu\pi c}{L}, \quad \nu = 1,2,3, \\ &\text{όπου } A_\nu \text{ κ' } B_\nu \text{ ολοκληρωτικές σταθερές.} \end{aligned}\right\} ⑥$$

▶ Έχουμε δει πώς προκύπτουν λύσεις της μορφής ⑥ στην προηγούμενη διάλεξη.

$$▶ ⑥ \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \omega \cdot \underbrace{\left(A \cdot \sigma\upsilon\nu\,\omega t - B \cdot \eta\mu\,\omega t\right)}_{} \cdot \eta\mu\, kx \overset{⑤}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\rho \cdot \omega^2 \cdot (\ldots)^2 \cdot \int_{x=0}^{x=L} (\eta\mu^2 kx)\, dx \overset{⑩}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_\nu = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot L \cdot \omega_\nu^2 \cdot \left(A_\nu\, \sigma\upsilon\nu\, \omega_\nu t - B_\nu\, \eta\mu\, \omega_\nu t\right)^2} \quad ⑪$$

▶ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=L} \text{ημ}^2 kx \, dx = \frac{1}{k}\int_0^{kL} \text{ημ}^2(kx)\, d(kx) =$ $\quad kL = \frac{\nu\pi}{L}\cdot L = \nu\pi \quad \boxed{\alpha \equiv kx}$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\nu\pi} \text{ημ}^2\alpha \cdot d\alpha \overset{(9)}{=} \frac{L}{\nu\pi}\cdot\frac{\nu\pi}{2} = \frac{L}{2} \quad (10)$$

▶ Από την γραφική των $\text{ημ}^2\alpha$ κ' $\text{συν}^2\alpha$ προκύπτει ότι για $\nu = 1, 2, 3$ ισχύει $\displaystyle\int_0^{\nu\pi} \text{ημ}^2\alpha\, d\alpha = \int_0^{\nu\pi} \text{συν}^2\alpha\, d\alpha$ (7).

Παράλληλα $\displaystyle \nu\pi = \int_0^{\nu\pi} 1\, dx = \int_0^{\nu\pi} \text{ημ}^2\alpha\, dx + \int_0^{\nu\pi} \text{συν}^2\alpha\, dx$ (8)

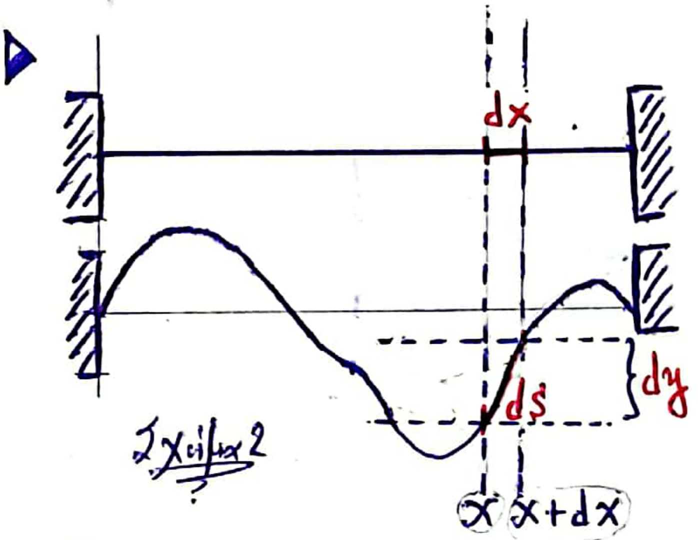
$$(7), (8) \Rightarrow \int_0^{\nu\pi} \text{ημ}^2\alpha\, d\alpha = \int_0^{\nu\pi} \text{συν}^2\alpha\, d\alpha = \frac{\nu\pi}{2} \quad (9)$$

Β. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

▶ Η στοιχειώδης επιμήκυνση ενός ελατηρίου κατά dl συνεπάγεται την αποθήκευση σε αυτό μιας στοιχειώδους ποσότητος δυναμικής ενέργειας $dU = F_{ελ}\cdot dl$ όπου $F_{ελ}$ η δύναμη του ελατηρίου.

▶ Το αυτό ισχύει κ' για κάθε στοιχείο μιας παλλόμενης χορδής. Δηλαδή επιμήκυνση του στοιχείου κατά dl συνεπάγεται την αποθήκευση σε αυτό δυναμικής ενέργειας $dU = T\cdot dl$ όπου T η τάση της χορδής.

▶



Σχήμα 2

▶ Στο σχήμα 2 το στοιχείο που βρίσκεται μεταξύ των θέσεων x κ' $x+dx$ υφίσταται επιμήκυνση $dl = ds - dx$ άρα αποθηκεύεται σε αυτό δυναμική ενέργεια $dU = T\cdot(ds - dx)$ (12)

▶ Από το Πυθαγόρειο θεώρημα $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx\cdot\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$ (13)

▶ Στην (13) η α' παράγωγος της y ως προς x υπολογίζεται για δεδομένο στιγμιότυπο της χορδής (δηλ. υπό σταθερό χρόνο). Άρα αντί για $\frac{dy}{dx}$ πρέπει να γράψουμε $\frac{\partial y}{\partial x}$ κ' η (13) γίνεται $ds = dx\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1}$ (14)

▶ Αν η απομάκρυνση της χορδής από την θέση ισορροπίας της είναι μικρή (συμπ. Αυτή είναι η παραδοχή υπό την οποία καταλήξαμε στην κυματική εξίσωση) τότε $\left|\partial y/\partial x\right| \lll 1$. (15)

▶ Ωστόσο σε πρώτη τάξη $(1+x)^{\nu} = 1 + \nu\cdot x$ (16), εφόσον $|x| \lll 1$.
Πράγματι αν $f(x) = (1+x)^{\nu}$ τότε $f(0) = 1$ ενώ $f'(0) = \nu$ άρα αν $|x| \ll 1$ $f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x$ κ' καταλήγουμε στην (16).

▶ $\textcircled{14} \underset{\textcircled{16}}{\overset{\textcircled{15}}{\Longrightarrow}} ds = dx \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \overset{\textcircled{12}}{\Longrightarrow} dU = \frac{1}{2} \cdot T \cdot dx \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} T \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \overset{\textcircled{6}}{=} \frac{1}{2} \cdot T \cdot \quad [-//-]^2 \cdot k^2 \int_0^L (\sigma \upsilon \nu\, kx)^2 dx$$

$$\Rightarrow \ldots \text{ομοίως} \ldots \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \quad \frac{\nu\pi}{2} \cdot k \cdot [-//-]^2 \Rightarrow *!$$

$$k \int_0^L (\sigma\upsilon\nu\, kx)^2 dx = \int_0^{kL} (\sigma\upsilon\nu\, kx)^2 d(kx) = \int_0^{\nu\pi} (\sigma\upsilon\nu\, kx)^2 d(kx) = \cdots = \frac{\nu\pi}{2}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \Rightarrow T = \rho \cdot c^2 \underset{c = \omega/k}{=} \rho \cdot \frac{\omega^2}{k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \cdot k \cdot \frac{\nu\pi}{2} = \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\nu\pi}{2} =$$

$$\overset{k = \frac{\nu\pi}{L}}{=} \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{2}$$

$$*! \Rightarrow U_\nu = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot L \cdot \omega^2 \cdot (A_\nu \eta\mu\, \omega_\nu t + B_\nu \sigma\upsilon\nu\, \omega_\nu t)^2 \quad \textcircled{13}$$

▶ $E_\nu = K_\nu + U_\nu \underset{\textcircled{13}}{\overset{\textcircled{12}}{=}} \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot L \cdot \omega_\nu^2 \cdot (A_\nu^2 + B_\nu^2) \quad \textcircled{14}$

▶ Επαναλαμβάνοντας τα βήματα της απόδειξης για μια $y(t,x)$ που είναι άθροισμα διαφορετικών ν, π.χ. για την $y(t,x) = y_1(t,x) + y_5(t,x)$, μπορείτε να δείξετε ότι $E = E_1 + E_5$ όπου τα E_1 κ' E_5 υπολογίζονται από την (14).