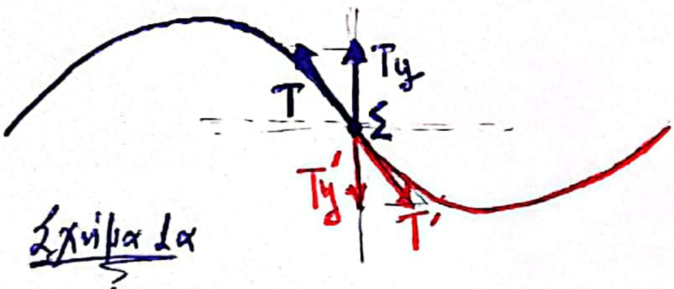
Ανάκλαση κ' διέλευση ενέργειας στο σύνορο χορδής

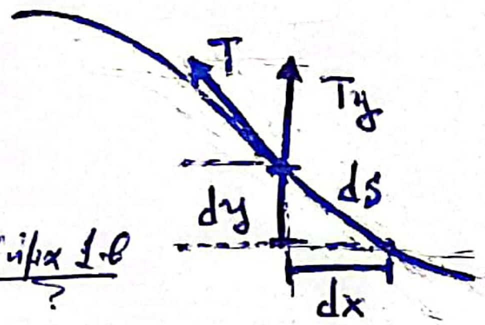
▶ Ποια η ισχύς P ενός κύματος $y = A\eta\mu(\omega t - kx)$ ① που οδεύει σε χορδή πυκνότητας ρ κ' τάσης T;

▶ Κατ' αρχάς $c = \sqrt{T/\rho} = \omega/k$ ② όπου c η ταχύτητα του κύματος, ω η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης των στοιχείων της χορδής, $k \equiv 2\pi/\lambda$ ο κυματάριθμος, όπου λ το μήκος κύματος.

▶ Έστω τυχαίο σημείο Σ της χορδής. Το Σ χωρίζει την χορδή σε δύο επιμέρους χορδές οι οποίες αλληλεπιδρούν κ' ανταλλάσσουν ενέργεια στο σημείο επαφής μέσω της τάσης T όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

▶ 

Σχήμα 1α

▶ 

Σχήμα 1β

▶ Σύμφωνα με την ① το κύμα οδεύει προς τα δεξιά. Άρα σε ένα στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt το σημείο Σ του Σχήματος 1α θα ανέλθει κατά dy. Συνεπώς η κάθετη συνιστώσα T_y της τάσης T θα παράξει έργο

$$dW = T_y\, dy \quad ③$$

▶ Συνεπώς ο ρυθμός με τον οποίο διαβιβάζεται ενέργεια από το αριστερό (κυανό) στο δεξί (κόκκινο) μέρος της χορδής είναι $P \equiv \dfrac{dW}{dt} = T_y \dfrac{dy}{dt}$ ④

▶ Υπενθυμίζεται ότι εξ' υποθέσεως τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται μόνο κατά την εγκάρσια στην θέση ισορροπίας διεύθυνση. Συνεπώς η x-συντεταγμένη του...

... σημείου Σ είναι σταθερή.

▶ Άρα η παράγωγος $\frac{dy}{dt}$ λαμβάνεται υπό σταθερό x.

Δηλαδή $\cancel{\frac{dy}{dx}} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t}$ κ' η ④ γίνεται

$$P = T_y \frac{\partial y}{\partial t} \quad (5).$$

▶ Αντιθέτως στο στιγμιότυπο του Σχήματος 1β οι στοιχειώδεις μεταβολές dy κ' ds αντιστοιχούν σε δεδομένη μεταβολή dx που λαμβάνεται υπό σταθερό t.

▶ Από το Σχήμα 1β προκύπτει $\frac{T_y}{T} = -\frac{dy}{ds}$ ⑥ όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι όταν $T_y > 0$ (δηλ. το T_y υποδεικνύει κατά τα θετικά y) τότε $dy < 0$ (δηλ. το dy - υπό σταθερό t κ' όχι υπό σταθερό x όπως στην ④ - είναι αρνητικό) κ' τανάπαλιν.

▶ Εφόσον η απομάκρυνση της χορδής από την θέση ισορροπίας της είναι πολύ μικρή θα ισχύει $dx \gg dy$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \cong dx \Rightarrow \boxed{ds \cong dx} \quad (7)$$

▶ ⑦ $\xrightarrow{(6)}$ $\frac{T_y}{T} = -\frac{dy}{dx}$ όπου η παράγωγος λαμβάνεται υπό σταθερό t, άρα $\boxed{\frac{T_y}{T} = -\frac{\partial y}{\partial x}}$ ⑧

▶ $(5) \xrightarrow{(8)} \boxed{P = -T \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}$ ⑨

▶ $(9) \xrightarrow{(1)} P = K \cdot T \cdot \omega \cdot A^2 \sigma\upsilon\nu^2(\omega t - Kx) \overset{(2)}{=} \rho \cdot c \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\ldots)$ ⑩

▶ Η περίοδος του κύματος είναι $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ (11). Άρα η μέση ισχύς ορίζεται από την εξίσωση

$\overline{P} \equiv \frac{W_\tau}{\tau}$ (12) όπου W_τ η ενέργεια που διαβιβάζεται από το αριστερό στο δεξί τμήμα της χορδής σε χρόνο μιας περιόδου.

▶ Δηλαδή $W_\tau = \int_{t=0}^{t=\tau} dW = \int_0^\tau \frac{dW}{dt}\,dt = \int_0^\tau P\,dt \overset{(10)}{=}$

$= (\rho c \omega^2 A^2) \int_0^\tau \text{συν}^2(\omega t - kx)\,dt = (\dots)\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\int_0^{2\pi}\text{συν}^2(\alpha - kx)\,d\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv \omega t \\ t=0 \longrightarrow \alpha = 0 \\ t=\tau=\frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \alpha = 2\pi \end{array}}$$

$\overset{(12)}{\Longrightarrow} \overline{P} = (\dots\dots)\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\text{συν}^2(\alpha - kx)\,d\alpha = (\dots)\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\pi \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^{2\pi}\text{συν}^2(\alpha \pm \varphi)\,d\alpha \overset{*!}{=} \int_0^{2\pi}\text{ημ}^2(\alpha \pm \varphi)\,d\alpha \\ \int_0^{2\pi}\text{συν}^2(\dots)\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\text{ημ}^2(\dots)\,d\alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\text{συν}^2(\alpha \pm \varphi)\,d\alpha = \int_0^{2\pi}\text{ημ}^2(\alpha \pm \varphi) = \pi$$

(*! Προκύπτει άμεσα από την γραφική παράσταση των $\text{ημ}^2(\dots)$ κ' $\text{συν}^2(\dots)$)

$$\Rightarrow \boxed{\overline{P} = \frac{1}{2}\rho \cdot c_1 \cdot \omega^2 A^2} \quad (13)$$

▶ Εφαρμόζοντας τον τύπο αυτόν στο πρόβλημα της ανάκλασης κ' διέλευσης κύματος στο σύνορο χορδής προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} \overline{P}_\pi &= \frac{1}{2}\rho_1 \cdot c_1 \cdot \omega^2 A_\pi^2 \\ \overline{P}_\alpha &= \frac{1}{2}\rho_1 \cdot c_1 \cdot \omega^2 \cdot A_\alpha^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{P}_\alpha}{\overline{P}_\pi} = \left(\frac{A_\alpha}{A_\pi}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Ενέργεια ανακλωμένου κύματος}}{\text{Ενέργεια προσπίπτοντος κύματος}} = \left(\frac{\sqrt{\rho_1'} - \sqrt{\rho_2'}}{\sqrt{\rho_1'} + \sqrt{\rho_2'}}\right)^2 \quad (14)$$

▶ Η ενέργεια του προσπίπτοντος κύματος μοιράζεται στο ανακλώμενο κ' διερχόμενο κύμα, άρα σύμφωνα με βάση της αρχής διατήρησης της ενέργειας θα πρέπει

$$\overline{P}_\pi = \overline{P}_\alpha + \overline{P}_\delta \Rightarrow \frac{\overline{P}_\delta}{\overline{P}_\pi} = 1 - \frac{\overline{P}_\alpha}{\overline{P}_\pi} \overset{(14)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Ενέργεια διερχόμενου κύματος}}{\text{Ενέργεια προσπίπτοντος κύματος}} = \frac{4\sqrt{\rho_1 \rho_2'}}{\left(\sqrt{\rho_1'} + \sqrt{\rho_2'}\right)^2} \quad (15)$$