Ανάκλαση κ' διέλευση κυμάτων σε σύνορο χορδής

▶ Έστω η $y(t,x)=A\eta\mu(\omega t-kx)$, $\omega>0$, $k>0$, $\frac{\omega}{k}=c_1$. (1)

▶ Η συνάρτηση αυτή είναι της μορφής $y=f(\alpha x+\beta t)$ όπου $\alpha=\omega$, $\beta=-k$ κ' $\frac{\alpha}{\beta}=-c_1$. Άρα περιγράφει κύμα που οδεύει προς μεγαλύτερα x.

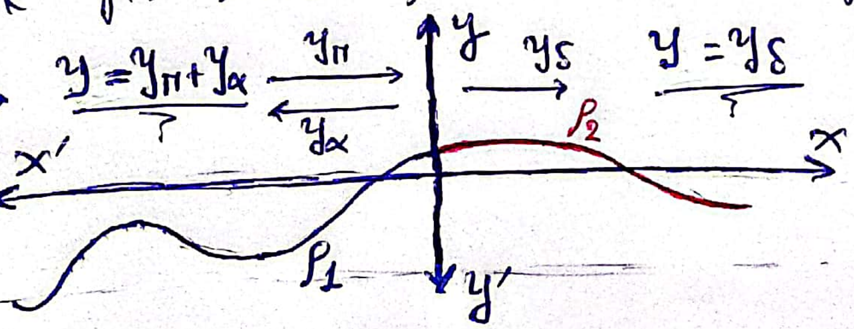
▶ Επικεντρώνοντας σε ένα σημείο της χορδής, έστω στο $x=x_0$, παρατηρούμε ότι για την απομάκρυνσή του από την θέση ισορροπίας ισχύει $y(t,x_0)=y(t+\nu\cdot\frac{2\pi}{\omega},x_0)$ όπου ν τυχών ακέραιος. Άρα κάθε στοιχείο της χορδής εκτελεί ταλάντωση με περίοδο $\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$ (2)

▶ (1), (2) $\Rightarrow k=\frac{2\pi}{c_1 T} \xRightarrow{\lambda=c_1 T} \boxed{k=\frac{2\pi}{\lambda}}$ (3)

$\left.\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{k=\frac{\omega}{c_1}}$ (3,5)

▶ Ο αριθμός $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ καλείται <u>κυματικός αριθμός</u> ή <u>κυματάριθμος</u>.

▶ Έστω τώρα ότι το κύμα που περιγράφεται από την (1) οδεύει σε χορδή η οποία για $x<0$ έχει πυκνότητα $\rho=\rho_1$ κ' για $x>0$ έχει πυκνότητα $\rho=\rho_2$.

▶ 

▶ Μόλις το κύμα φθάσει στο $x=0$ θα διαχωριστεί σε δύο επιμέρους κύματα. Το ένα θα ανακλαστεί στο $x=0$ κ' θα επιστρέψει για να συμβάλλει με το προσπίπτον κύμα. Το άλλο θα διέλθει κ' θα συνεχίσει την πορεία του στην χορδή πυκνότητας ρ_2.

▶ Έστω ότι τα τρία κύματα (προσπίπτον - ανακλώμενο - διερχόμενο) περιγράφονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις

$$
(4) \begin{cases} y_{\pi} = A_{\pi}\, \eta\mu(\omega t - k_{\pi} x) \\ y_{\alpha} = A_{\alpha}\, \eta\mu(\omega t + k_{\alpha} x) \\ y_{\delta} = A_{\delta}\, \eta\mu(\omega t - k_{\delta} x) \end{cases}
$$

το ανακλώμενο κύμα οδεύει αντίθετα από το προσπίπτον

το διερχόμενο κύμα οδεύει προς την ίδια κατεύθυνση με το προσπίπτον

▶ Η απομάκρυνση ενός σημείου της χορδής στην θέση $x<0$ προκύπτει από την υπέρθεση του ανακλώμενου κ' του προσπίπτοντος κύματος, δηλαδή $\boxed{y(t, x<0) = y_{\alpha} + y_{\pi}}$ (5)

▶ Προφανώς $\boxed{y(t, x>0) = y_{\delta}}$ (6)

▶ Προκειμένου να μην σπάσει η χορδή θα πρέπει οι (5) κ' (6) να συμφωνούν στο $x=0$, δηλ.

$$y_{\pi}(t,0) + y_{\alpha}(t,0) = y_{\delta}(t,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\pi}\, \eta\mu(\omega t) + A_{\alpha}\, \eta\mu(\omega t) = A_{\delta}\, \eta\mu(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{\pi} + A_{\alpha} = A_{\delta}} \quad (7)$$

▶ Όπως είδαμε στην απόδειξη της κυματικής εξίσωσης εφόσον η απομάκρυνση της χορδής από την θέση ισορροπίας είναι μικρή ($|y| \lll L$) η τάση T κατά μήκος της χορδής είναι σταθερή.

▶ Άρα για $x<0$ έχω $T = T_1$ κ' για $x>0$ έχω $T = T_2$ όπου T_1, T_2 θετικές σταθερές.

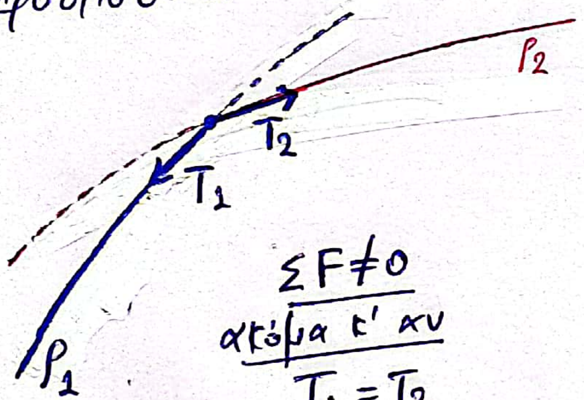
▶ Ωστόσο η απόδειξη της κυματικής εξίσωσης έγινε για ομογενή χορδή. Δεν μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε απευθείας ότι $T_1 = T_2$. Θα πρέπει να το αποδείξουμε.

▶ Το σημείο $x=0$ στο οποίο ενώνονται οι χορδές δεν έχει μάζα. (αν ήταν στοιχείο θα είχε μια κάποια στοιχειώδη μάζα, αλλά είναι σημείο κ' όχι στοιχείο)

▶ Άρα ο β' Νόμος του Νεύτωνα για το σημείο αυτό είναι $\vec{\alpha} = \dfrac{\Sigma \vec{F}}{m \to 0}$ (8)
όπου $\vec{\alpha}$ η επιτάχυνση κ' $\Sigma \vec{F}$ η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σημείο.

▶ Εφόσον το σημείο κινείται μαζί με την χορδή η $\vec{\alpha}$ θα πρέπει να είναι πεπερασμένη. Από την (8) βλέπουμε ότι αυτό προϋποθέτει $\Sigma \vec{F} = 0$.

▶



$\Sigma F \neq 0$
ακόμα κ' αν
$T_1 = T_2$

▶ Η συνθήκη $\Sigma \vec{F} = 0$ προϋποθέτει ότι $\boxed{T_1 = T_2}$ (9). Ωστόσο, επειδή η τάση εφάπτεται στην χορδή η $\Sigma \vec{F}$ προϋποθέτει επιπλέον ότι η κλίση της χορδής είναι συνεχής στο $x=0$ δηλ.

$$\boxed{\left.\frac{\partial (y_\pi + y_\alpha)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y_\delta}{\partial x}\right|_{x=0}} \quad (10)$$

▶ Αυτό φαίνεται παραστατικά στο παραπάνω σχήμα.

▶ $(10) \xRightarrow{(4)} -k_\pi A_\pi \cancel{\sigma\upsilon\nu(\omega t)} + k_\alpha A_\alpha \cancel{\sigma\upsilon\nu(\omega t)} = -k_\delta A_\delta \cancel{\sigma\upsilon\nu(\omega t)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -k_\pi A_\pi + k_\alpha A_\alpha = -k_\delta A_\delta \quad (11)$$

▶ $(3,5) \Rightarrow k = \omega \sqrt{\rho / T} \xRightarrow{(11)} -\dfrac{\omega}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\rho_1} A_\pi + \dfrac{\omega}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\rho_1} A_\alpha = -\dfrac{\omega}{\sqrt{T_2}} \sqrt{\rho_2} A_\delta \Rightarrow$

$c = \sqrt{T/\rho}$

$$\xRightarrow{(9)} \boxed{\sqrt{\rho_1}(A_\pi - A_\alpha) = \sqrt{\rho_2} A_\delta} \quad (12)$$

▶ Από τις εξισώσεις (7) κ' (12) προκύπτει άμεσα

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{A_\alpha}{A_\pi} = \dfrac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \longrightarrow \text{«συντελεστής ανάκλασης»} \\[2ex] \dfrac{A_\delta}{A_\pi} = \dfrac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \longrightarrow \text{«συντελεστής διέλευσης»} \end{cases}$$

▶ Παρατηρούμε ότι αν $\rho_1 = \rho_2$ τότε $A_\alpha = 0$ κ' $A_\delta = A_\pi$ δηλαδή δεν υπάρχει ανάκλαση.

▶ Επίσης αν $\rho_2 \to \infty$, δηλαδή αν η αδράνεια της δεύτερης χορδής απειρίζεται (δηλαδή η χορδή συμπεριφέρεται σαν τοίχος) τότε $A_\alpha = -A_\pi$ κ' $A_\delta = 0$, δηλαδή δεν υπάρχει διέλευση κ' το προσπίπτον κύμα αναστρέφεται (ώστε το $x=0$ που ανήκει κ' στις δύο χορδές να είναι ακίνητο)

▶ Τέλος αν $\rho_2 \to 0$ τότε $A_\alpha = A_\pi$ κ' $A_\delta = 2$ δηλαδή το πλάτος ταλάντωσης της χορδής (θυμηθείτε ότι το πλάτος του $y = y_\alpha + y_\pi$) είναι διπλάσιο από το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος.