Λύση της κυματικής εξίσωσης

▶ Δοκιμάζουμε στην κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (1)

λύσεις της μορφής $\boxed{y(t,x) = f(\varepsilon)}$, $\boxed{\varepsilon \equiv \alpha t + \beta x}$ (2)

▶ $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial t} = \frac{df}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \overset{(2)}{=} f'(\varepsilon)\cdot\alpha \equiv \tilde{f}(\varepsilon)$ (3)

▶ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \overset{(3)}{=} \frac{d\tilde{f}}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f''(\varepsilon)\cdot\alpha^2$ (4)

▶ $\frac{\partial y}{\partial x} = \cdots = \frac{df}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \overset{(2)}{=} f'(\varepsilon)\cdot\beta$ (5)

▶ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \cdots\cdots = f''(\varepsilon)\cdot\beta^2$ (6)

▶ $(1) \xRightarrow[(6)]{(4)} \beta^2 = \frac{1}{c^2}\alpha^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = +c}$ (7) ή $\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = -c}$ (8)

▶ Συνεπώς η (1) επιδέχεται λύσεις της μορφής (2) αρκεί να ισχύει είτε η (7) είτε η (8).

▶ Ποια ωστόσο η φυσική σημασία των εν λόγω λύσεων;

▶ Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $v(t,x)$ είναι η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το στοιχείο της χορδής που βρίσκεται στην θέση x τότε εξ' ορισμού $\boxed{v(t,x) \equiv \frac{\partial y}{\partial t} \overset{(3)}{=} \tilde{f}(\varepsilon)}$ (9)

▶ Άρα την χρονική στιγμή $t = t_0$ το στοιχείο της χορδής που βρίσκεται στην θέση $x = x_0$ έχει ταχύτητα $\boxed{v(t_0, x_0) \overset{(9)}{=} \tilde{f}(\varepsilon_0)}$ όπου $\varepsilon_0 = \alpha t_0 + \beta x_0$, ενώ η απομάκρυνσή του από την θέση ισορροπίας της χορδής θα είναι $\boxed{y(t_0, x_0) = f(\varepsilon_0)}$.

▶ Τίθεται τώρα το ερώτημα: σε μια τυχαία χρονική στιγμή $t \neq t_0$ υπάρχει κάποιο στοιχείο της χορδής που να έχει ίδια απομάκρυνση και ταχύτητα με αυτήν που έχει την $t=t_0$ το στοιχείο στην θέση $x=x_0$; Αν υπάρχει, η θέση x του στοιχείου αυτού θα προκύψει ως λύση της εξίσωσης:

$\boxed{\xi_0 \equiv \alpha t_0 + \beta x_0, \text{ βλ. } ②}$

▶ $$\left.\begin{aligned} y(t,x) &= y(t_0,x_0) \\ v(t,x) &= v(t_0,x_0) \end{aligned}\right\} \overset{②}{\underset{③}{\Rightarrow}} \left.\begin{aligned} f(\xi) &= f(\xi_0) \\ \tilde{f}(\xi) &= \tilde{f}(\xi_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi = \xi_0 \Rightarrow$$

$$\overset{②}{\Rightarrow} \alpha t + \beta x = \alpha t_0 + \beta x_0 \Rightarrow \boxed{x = x_0 - \frac{\alpha}{\beta}(t - t_0)} \quad (10)$$

▶ Εδώ χωρίζουμε περιπτώσεις. Στην περίπτωση όπου $\frac{\alpha}{\beta} = -c$, βλ. ⑧, η ⑩ γίνεται $\boxed{x = x_0 + c\cdot(t - t_0)}$ (11)

▶ Δηλαδή η θέση x του στοιχείου που μιμείται την απομάκρυνση $y(t_0,x_0)$ κ' την ταχύτητα $v(t_0,x_0)$ του στοιχείου στην θέση x_0 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $c = \sqrt{T/\rho} > 0$ άρα με κατεύθυνση προς τα θετικά x («προς τα δεξιά»).

▶ Άρα τα στοιχεία της χορδής, το ένα μετά το άλλο, μιμούνται την κίνηση του στοιχείου στην θέση $x=x_0$.

▶ Έχουμε λοιπόν την διάδοση μιας διαταραχής - ενός ΚΥΜΑΤΟΣ - με ταχύτητα c πάνω στην χορδή κ' κατά την κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα Ox.

▶ Αντίστοιχη είναι η ερμηνεία αν $\frac{\alpha}{\beta} = c$, βλ. ⑦, μόνο που τώρα το κύμα κατευθύνεται προς τον αρνητικό ημιάξονα $x'O$ δηλαδή «προς τα αριστερά».

▶ Έστω τώρα ότι το στοιχείο στην θέση $x = x_0$ εκτελεί ταλάντωση με περίοδο T. Τότε για τυχόντα ακέραιο ν θα ισχύει:

$$\boxed{y(t, x_0) = y(t + \nu T, x_0)} \overset{(2)}{=} f(\alpha t + \nu \cdot \alpha \cdot T + \beta x_0) =$$

$$= f\left[\alpha t + \beta\left(x_0 + \nu \frac{\alpha}{\beta} T\right)\right] \xrightarrow{(7) \text{ ή } (8)} f[\alpha t + \beta(x_0 \pm \nu c T)] =$$

$\boxed{\text{θέτω } \lambda \equiv cT}$ (14)

$$\overset{(14)}{=} f[\alpha t + \beta(x_0 \pm \nu\lambda)] = y(t, x_0 \pm \nu\lambda) \Rightarrow$$

αφού ο ν τυχών ακέραιος στο «±» μπορώ να διαλέξω όποιο πρόσημο θέλω

$$\Rightarrow \boxed{y(t, x_0) = y(t, x_0 + \nu\lambda) \quad , \lambda \equiv cT} \quad (12)$$

▶ (12) $\Longrightarrow \dfrac{\partial y}{\partial t}(t, x_0) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(t, x_0 + \nu\lambda) \Rightarrow \boxed{v(t, x_0) = v(t, x_0 + \nu\lambda)}$ (13)

▶ Συνεπώς αν το στοιχείο στην $x = x_0$ εκτελεί περιοδική κίνηση τότε σε κάθε (τυχαία) χρονική στιγμή t τα στοιχεία της χορδής που απέχουν από την $x = x_0$ κατά ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $\lambda \equiv cT$ εκτελούν ταυτοχρόνως την ίδια ακριβώς κίνηση.

▶ Καλούμε την ποσότητα λ που ορίζεται από την σχέση (14) μήκος κύματος.

▶ Προφανώς για την συχνότητα $f \equiv \frac{1}{T}$ ισχύει $\boxed{c = \lambda f}$ (15)

▶ Παρατήρηση: $\boxed{\dfrac{\partial y}{\partial t} \overset{(3)}{\underset{(5)}{=}} \dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{\partial y}{\partial x} \xrightarrow{(7) \text{ ή } (8)} \pm c \dfrac{\partial y}{\partial x}}$