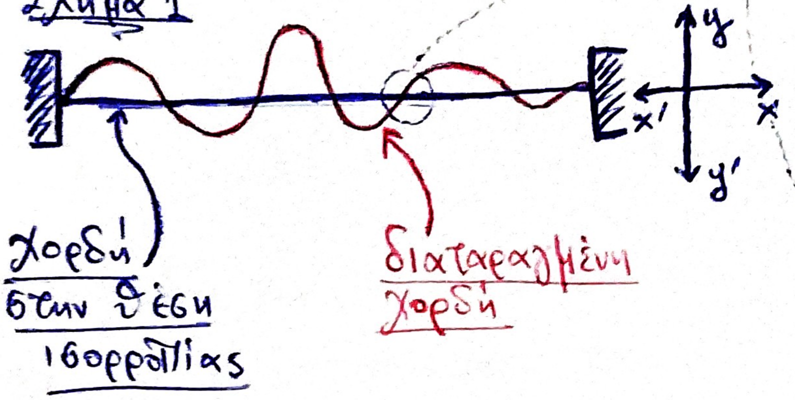
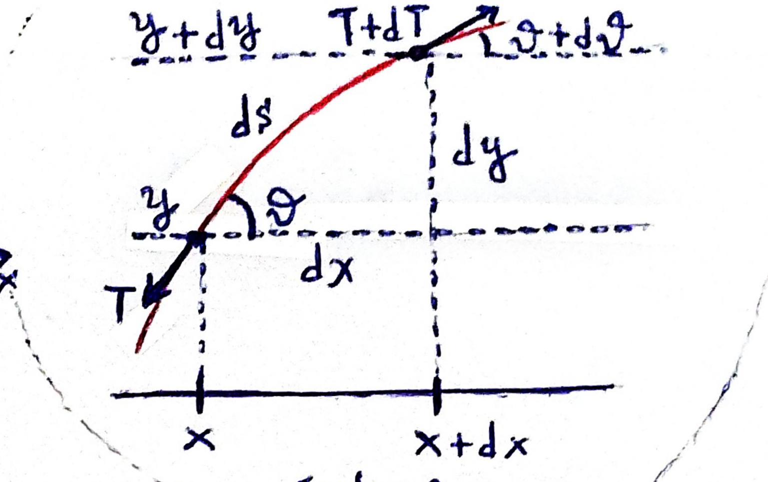
Κυματική εξίσωση

Σχήμα 1





Σχήμα 2

- Έστω ομογενής χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ στην θέση ισορροπίας της.

- Διαταράσσουμε την χορδή ώστε κάθε στοιχείο της αρχίζει να ταλαντώνεται περί την θέση ισορροπίας του.

- <u>Υπόθεση Α:</u> Κάθε στοιχείο της χορδής ταλαντώνεται εγκάρσια (κάθετα) στην θέση ισορροπίας του. Δεν μετατοπίζεται παράλληλα προς την θέση ισορροπίας της χορδής.

- Κατά την ταλάντωση το στοιχείο της χορδής που βρίσκεται μεταξύ των θέσεων x κ' $x+dx$ παραμορφώνεται, άρα η γραμμική του πυκνότητα αλλάζει.

- Όταν διέρχεται από την θέση ισορροπίας τότε η μάζα του είναι $dm=\rho dx$.

- Εφόσον όμως μετατοπίζεται μόνο κάθετα προς αυτήν η μάζα dm παραμένει εγκλωβισμένη μεταξύ των θέσεων x κ' $x+dx$.

- <u>Άρα:</u> <u>Υπόθεση Α</u> $\Rightarrow \boxed{dm=\rho dx}$ (1) ακόμα κ' όταν το στοιχείο έχει μετατοπιστεί από την θέση ισορροπίας του.

▶ Επίσης: Υπόθεση Α $\Rightarrow \Sigma F_x = 0$ για το στοιχείο που βρίσκεται μεταξύ των θέσεων x κ' $x+dx$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(T+dT)\,\sigma\upsilon\nu(\vartheta+d\vartheta) = T\,\sigma\upsilon\nu\vartheta} \quad (2)$$

▶ Β' Νόμος Νεύτωνα $\Rightarrow dm\cdot\alpha = (T+dT)\cdot\eta\mu(\vartheta+d\vartheta) - T\eta\mu\vartheta$ (3)

όπου α η επιτάχυνση του στοιχείου κατά τον άξονα $y'y$.

▶ $(3) \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} \rho\, dx\cdot\alpha = T\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot[\varepsilon\varphi(\vartheta+d\vartheta) - \varepsilon\varphi\vartheta] =$

$= T\sigma\upsilon\nu\vartheta \cdot d\,\varepsilon\varphi\vartheta \Rightarrow$

$\psi(x+dx) - \psi(x) \equiv$
$\equiv d\psi(x)$

$$\Rightarrow \alpha\cdot\frac{\rho}{T\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{d\,\varepsilon\varphi\vartheta}{dx} \quad (4)$$

▶ Από το Σχήμα 2 προκύπτει ότι $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{dy}{dx} \overset{(4)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T\sigma\upsilon\nu\vartheta}\cdot\alpha \quad (5)$$

▶ Η β' παράγωγος της y στο δεξί μέλος της (5) έχει υπολογιστεί από τα Σχήματα 1 κ' 2 που αφορούν σε ένα στιγμιότυπο του κύματος. Δηλαδή η παραγώγιση γίνεται θεωρώντας τον χρόνο t σταθερό.

▶ Άρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν την χρονική εξέλιξη, η (5) γίνεται $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\rho}{T\sigma\upsilon\nu\vartheta}\cdot\alpha$ (6)

▶ Ωστόσο κ' η επιτάχυνση είναι μεν η β' παράγωγος της y ως προς τον χρόνο, αλλά για ένα δεδομένο στοιχείο, δηλαδή για δεδομένο x. Άρα $\alpha = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (7)

▶ (7) $\overset{(6)}{\Rightarrow}$ $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$ (8)

όπου $$\frac{1}{c} \equiv \sqrt{\frac{\rho}{T\cdot συνθ}}$$ (9).

▶ Η ρ -εφ' υποθέσεως- είναι σταθερά. Ωστόσο εν γένει $T = T(x,t)$ κ' $\vartheta = \vartheta(x,t)$. Άρα $\boxed{c = c(x,t)}$ (10)

▶ Η συνάρτηση c έχει μονάδες ταχύτητας (αυτό μπορεί να διαπιστωθεί είτε από την (8) είτε από την (9).

▶ Η c είναι η ταχύτητα διάδοσης ενός εγκάρσιου (λόγω της υπόθεσης Α) κύματος πάνω στην χορδή.

▶ <u>Υπόθεση Β</u>: Έστω $|\vartheta| \ll 1$, δηλαδή η απομάκρυνση της χορδής από την θέση ισορροπίας της είναι πολύ μικρή.

▶ Αν $|\vartheta| \ll 1$ τότε η παραμόρφωση του στοιχείου ds είναι πολύ μικρή. Άρα η τάση δίνεται από τον Νόμο του Hook ως $\boxed{T = (ds - d\ell)\cdot k}$ (11) όπου k σταθερά. Με το σκεπτικό αυτό $\boxed{T_0 = (dx - d\ell)\cdot k}$ (12) όπου T_0 η τάση στην θέση ισορροπίας. (Σημ: Με $d\ell$ συμβολίζουμε το φυσικό μήκος του στοιχείου).

▶ (11) : (12) $\Rightarrow$ $$T = T_0\,\frac{ds - d\ell}{dx - d\ell} = \frac{\frac{ds}{dx} - \frac{d\ell}{dx}}{1 - \frac{d\ell}{dx}}$$ (13)

- Εφόσον η χορδή είναι ομογενής είναι λογικό ότι τόσο η T_0 όσο κ' η $\gamma \equiv dl/dx$ (14) είναι σταθερές.

- Επίσης από το Σχήμα 2 $\Rightarrow \frac{dx}{ds} = \cos\theta$ (14)

- (13) $\xRightarrow{(14)}$ $T = T_0 \cdot \frac{1-\gamma\cos\theta}{(1-\gamma)\cdot\cos\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T\cdot\cos\theta = T_0 \cdot \frac{1-\gamma\cos\theta}{1-\gamma} \quad (15)$$

- Ωστόσο $|\theta| << 1 \Rightarrow \cos\theta \cong 1 \xRightarrow{(15)}$

$$\Rightarrow T\cos\theta \cong T_0 \quad (16)$$

- (16) $\xRightarrow{(9)}$ $\boxed{c = \sqrt{T_0/\rho}}$ (17)

- (16),(17) $\Rightarrow$ για μικρές θ, για μικρή δηλαδή απομάκρυνση της χορδής από την θέση ισορροπίας της τόσο η ταχύτητα c του κύματος, όσο κ' η τάση T της χορδής είναι σταθερές.

- Σημειωτέον ότι στην απόδειξη αυτή χρειαστήκαμε μόνο 2 υποθέσεις (τις Α κ' Β).