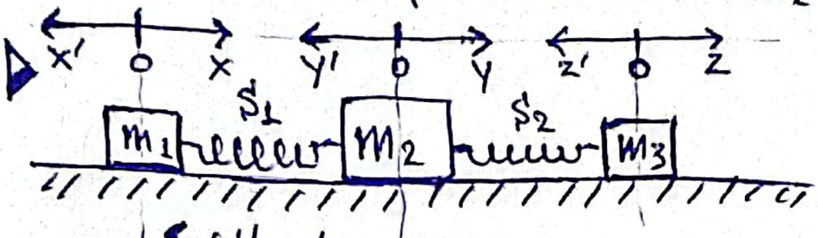
▶ Δίδεται σύστημα 3 σωμάτων μάζας m_1, m_2 κ' m_3 συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας s_1 κ' s_2 όπως φαίνεται στο Σχήμα 1

▶ 

Σχήμα 1

▶ Οι διεργασίες θερμοποίησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος ή ανταλλαγής ενέργειας με το περιβάλλον θεωρούνται αμελητέες.

▶ Συνεπώς η μηχανική ενέργεια Ε του συστήματος διατηρείται σταθερή, δηλ. $\boxed{\dot{E}=0}$ (1)

▶ Προσαρμόζουμε στο επίπεδο επί του οποίου ολισθαίνουν οι μάζες συστήματα αναφοράς $x'x$, $y'y$ κ' $z'z$ ούτως ώστε στην ισορροπία οι θέσεις ισορροπίας των σωμάτων να συμπίπτουν με τις αρχές $x=0$, $y=0$ κ' $z=0$.

▶ α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος

β) Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες των κ.τ.τ. εφόσον $m_1=m_3\equiv\mu$ κ' $s_1=s_2\equiv s$.

γ) Για κάθε έναν από τους ανωτέρω κ.τ.τ. βρείτε τους λόγους των πλατών.

δ) Περιγράψτε ποιοτικά τον κάθε κ.τ.τ.

▶ α) (α' τρόπος)

▶ $K=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_3\dot{z}^2$ (2) όπου Κ η κινητική ενέργεια του συστήματος.

▶ Στο υφιστάμενο σύστημα αναφοράς η επιμήκυνση του 1ου ελατηρίου (σκληρότητας s_1) είναι $y-x$ ενώ η επιμήκυνση του 2ου ελατηρίου (σκληρότητας s_2) είναι $z-y$.

Σαρώθηκε με το CamScanner

▶ Συνεπώς $U = \frac{1}{2}s_1(y-x)^2 + \frac{1}{2}s_2(z-y)^2$ (3) όπου U η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

▶ Εξ' ορισμού $E = K + U$ (4)

▶ (1) $\Rightarrow 0 = \dot{E} \overset{(4)}{=} \dot{K} + \dot{U} \underset{(2)}{\overset{(3)}{=}} m_1\dot{x}\ddot{x} + m_2\dot{y}\ddot{y} + m_3\dot{z}\ddot{z} +$

$+ s_1(y-x)(\dot{y}-\dot{x}) + s_2(z-y)(\dot{z}-\dot{y}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \dot{x}\cdot[m_1\ddot{x} + s_1(x-y)] + \dot{y}\cdot[m_2\ddot{y} + s_1(y-x) + s_2(y-z)] + \dot{z}\cdot[m_3\ddot{z} + s_2(z-y)] \quad (5)$$

▶ Οι συνιστάμενες $m_1\ddot{x}$, $m_2\ddot{y}$, $m_3\ddot{z}$ προκύπτουν αποκλειστικά από δυνάμεις ελατηρίων. Άρα θα πρέπει να εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμέτρους x, y, z. (6)

▶ (5) $\overset{(6)}{\Rightarrow}$
$$\begin{cases} m_1\ddot{x} + s_1(x-y) = 0 & (6α) \\ m_2\ddot{y} + s_1(y-x) + s_2(y-z) = 0 & (6β) \\ m_3\ddot{z} + s_2(z-y) = 0 & (6γ) \end{cases}$$

▶ <u>Σημείωση</u>: Σε περίπτωση που το επιχείρημα δεν σας είναι προφανές σκεφτείτε ότι αν δεν ισχύουν οι (6γ) κ' (6β) τότε επιλύοντας την (5) ως προς $m_1\ddot{x}$ προκύπτει $m_1\ddot{x} = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{y}, \ddot{z}, x, y, z)$ (7) το οποίο είναι αφύσικο για μια συνισταμένη που προκύπτει από δυνάμεις ελατηρίων.

▶ Οι (6) είναι οι ζητούμενες εξισώσεις κίνησης.

▶ Ας δούμε την λύση κ' με τους υπόλοιπους 2 τρόπους.

Σαρώθηκε με το CamScanner

▶ α) (β' τρόπος)

▶ Οι εξισώσεις κίνησης ταυτίζονται με τις εξισώσεις Οιλερ-λαγκράνζ

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (7\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (7\beta)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial z} \quad (7\gamma)$$

όπου $\boxed{L \equiv K - U}$ (8) η λαγκρανζιανή του συστήματος.

▶ $(8) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} L = \frac{1}{2}\{m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2 + m_3\dot{z}^2 - s_1(x-y)^2 - s_2(y-z)^2\}$ (9)

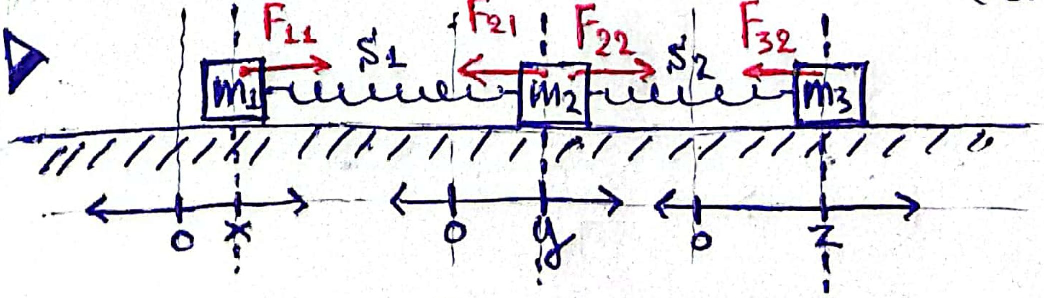
▶ $(7\alpha) \overset{(9)}{\Leftrightarrow} -s_1(x-y) = (m_1\dot{x})^{\cdot} = m_1\ddot{x} \Leftrightarrow$ (6α)

▶ $(7\beta) \overset{(9)}{\Leftrightarrow} -s_1(x-y)\cdot(-1) - s_2(y-x) = (m_2\dot{y})^{\cdot} = m_2\ddot{y} \Leftrightarrow$ (6β)

▶ $(7\gamma) \overset{(9)}{\Leftrightarrow} -s_2(y-z)\cdot(-1) = (m_3\dot{z})^{\cdot} = m_3\ddot{z} \Leftrightarrow$ (6γ)

▶ α) (γ' τρόπος)

▶ Έστω προς τα θετικά μετατοπίσεις των m_1, m_2 κ' m_3 κατά x, y κ' z αντίστοιχα όπου $y>x$ κ' $z>y$. όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Άρα κ' τα 2 ελατήρια επιμηκύνονται (δεν συσπειρώνονται).

▶ 

▶ Υπό αυτές τις συνθήκες το 1ο ελατήριο ασκεί στην m_1 δύναμη F_{11} με θετική φορα, άρα $F_{11} = s_1(y-x)$ (9α) και στην...

Σαρώθηκε με το CamScanner

... m_2 δύναμη F_{21} με αρνητική φορά, άρα $F_{21} = s_1(x-y) < 0$. (9β)

▶ Το 2ο ελατήριο ασκεί στην m_2 δύναμη F_{22} με θετική φορά, άρα $F_{22} = s_2(z-y) > 0$ (9γ) κ' στην m_3 δύναμη F_{32} με αρνητική φορά, άρα $F_{32} = s_3(y-z) < 0$ (9δ).

▶ Β'ΝΝ για m_1: $m_1 \ddot{x} = F_{11} \overset{9\alpha}{=} s_1(y-x) \Leftrightarrow$ (6α)

▶ Β'ΝΝ για m_2: $m_2 \ddot{y} = F_{21} + F_{22} \overset{9\beta}{\underset{9\gamma}{=}} s_1(x-y) + s_2(z-y) \Leftrightarrow$ (6β)

▶ Β'ΝΝ για m_3: $m_3 \ddot{z} = F_{32} \overset{9\delta}{=} s_3(y-z) \Leftrightarrow$ (6γ)

*1 ▶ β) Κανονικός τρόπος ταλάντωσης είναι ο τρόπος ταλάντωσης του όλου συστήματος στον οποίο οι μάζες ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα, άρα με το ίδιο ω. Συνεπώς τα x, y, z θα προκύπτουν από εκφράσεις της μορφής

$$x = \tilde{A} \cdot e^{i(\omega t + \phi_x)} \quad y = \tilde{B} \cdot e^{i(\omega t + \phi_y)} \quad z = \tilde{C} \cdot e^{i(\omega t + \phi_z)}$$

όπου $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ μιγαδικές (εν γένει) σταθερές.

*2 ▶ Ισοδύναμα $\tilde{A} \cdot e^{i(\omega t + \phi_x)} = \tilde{A} e^{i\omega t + i\phi_x} = \tilde{A} e^{i\phi_x} \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = A e^{i\omega t} \quad \text{όπου} \quad A \equiv \tilde{A} e^{i\phi_x}$$

*3 ▶ Δηλαδή οι φάσεις ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z μπορούν να ενσωματωθούν στους μιγαδικούς συντελεστές $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$.

*4 ▶ Άρα όταν το σύστημα ταλαντώνεται με κανονικό τρόπο προκύπτει

$$x = A e^{i\omega t} \quad y = B e^{i\omega t} \quad z = C e^{i\omega t} \quad (10)$$

όπου ω η κοινή συχνότητα ταλάντωσης των μαζών, ή η ιδιοσυχνότητα του Κ.Τ.Τ.

▶ Ο φοιτητής που δεν καταλαβαίνει τα *1 - *3 μπορεί να έχει ως σημείο

Σαρώθηκε με το CamScanner

εκκίνησης το *4.

▶ Θέτοντας $m_2 = m$ κ' εφόσον $m_1 = m_3 = \mu$ κ' $s_1 = s_2 = s$ οι

⑥ γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\ddot{x} + s(x-y) = 0 \\ &m\ddot{y} + s(y-x) + s(y-z) = 0 \\ &\mu\ddot{z} + s(z-y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \mu/s &= \alpha \\ m/s &= \gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\ddot{x} + x - y = 0 & (11\alpha) \\ \gamma\ddot{y} + 2y - x - z = 0 & (11\beta) \\ \alpha\ddot{z} + z - y = 0 & (11\gamma) \end{cases}$$

▶ (10) $\Rightarrow \dot{x} = i\omega \cdot Ae^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{x} = i\omega \cdot i\omega \cdot \underbrace{Ae^{i\omega t}}_{x} \overset{i^2=-1}{=} -\omega^2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ldots \text{ομοίως} \ldots \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \quad (12) \\ \ddot{z} = -\omega^2 z \end{cases}$$

▶ (11) $\overset{(12)}{\Longrightarrow} \begin{cases} (\omega^2\alpha - 1)x + y = 0 \\ x + (\omega^2\gamma - 2)y + z = 0 \\ y + (\omega^2\alpha - 1)z = 0 \end{cases} \overset{(10)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} (\omega^2 \cdot \alpha - 1)A + B + 0 \cdot C = 0 \\ A + (\omega^2\gamma - 2)B + C = 0 \\ 0 \cdot A + B + (\omega^2\alpha - 1)C = 0 \end{cases}} \ (15) \Rightarrow$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} (\omega^2\alpha-1) & 1 & 0 \\ 1 & (\omega^2\gamma-2) & 1 \\ 0 & 1 & (\omega^2\alpha-1) \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

▶ Τα ω προκύπτουν από την συνθήκη

$$0 = \det M = (\omega^2\alpha-1)\cdot\left[(\omega^2\gamma-2)\cdot(\omega^2\alpha-1)-1\right] +$$

$$+ \; 1\cdot\left[1\cdot 0 - 1\cdot(\omega^2\alpha-1)\right] \; +$$

$$+ \; 0\cdot[\text{δεν έχει σημασία}] \; =$$

$$= (\omega^2\alpha-1)\cdot\left[(\omega^2\gamma-2)(\omega^2\alpha-1)-1\right] - 1\cdot(\omega^2\alpha-1) =$$

$$= (\omega^2\alpha-1)\cdot\left[(\omega^2\gamma-2)(\omega^2\alpha-1)-2\right] =$$

$$= (\omega^2\alpha-1)\cdot\left[\omega^4\alpha\gamma-2\omega^2\alpha-\omega^2\gamma\right] =$$

$$= \omega^2\cdot(\omega^2\alpha-1)\cdot(\alpha\gamma\omega^2-2\alpha-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2=0 \;\; ή \;\; \omega^2\alpha-1=0 \;\; ή \;\; \omega^2\alpha\gamma-2\alpha-\gamma=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega=0 \;\; ή \;\; \omega=\sqrt{1/\alpha} \;\; ή \;\; \omega=\sqrt{\frac{2\alpha+\gamma}{\alpha\gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega=0 \;\; ή \;\; \omega=\sqrt{s/\mu} \;\; ή \;\; \omega=\sqrt{\frac{(2\mu+m)\cdot s}{\mu\cdot m}} \quad (14)$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

▶ $\underset{(16\alpha)}{\omega = 0} \overset{(15)}{\Longrightarrow} \begin{cases} -A + B = 0 \\ A - 2B + C = 0 \\ B - C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -B = A \\ B = C \\ -B - 2B + B = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A = B = C = 0}$ (16β) $\longrightarrow$ (γ)

▶ Άρα ο κ.τ.τ. με $\omega = 0$ αντιστοιχεί σε απουσία ταλάντωσης; → (δ)

▶ $\underset{(17\alpha)}{\omega = \sqrt{\kappa/m} = \sqrt{1/\alpha}} \overset{(15)}{\Longrightarrow} \begin{cases} B = 0 \\ A + (\gamma/\alpha) \cdot B + C = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{-A = C}$ κ' $\underline{B = 0}$ (17β) $\Rightarrow$ $A/C = -1$ κ' $B/C = 0$ ⟶ (γ)

▶ $\left. \begin{array}{l} x = A e^{i\omega t} \\ y = B e^{i\omega t} \\ z = C e^{i\omega t} \end{array} \right\} \overset{(17\beta)}{\Longrightarrow}$ $x = -z$ και $y = 0$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ Η κεντρική μάζα είναι ακίνητη ενώ οι ακραίες ταλαντώνονται με ίσα πλάτη κ' προς αντίθετες κατευθύνσεις.
(ή όπως λέμε με αντίθετες φάσεις) ⟶ (δ)

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$w = \sqrt{\frac{2s}{m} + \frac{s}{\mu}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}} \overset{15}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2\alpha}{\gamma} + 1 - 1\right) A + B = 0 \\ A + \left(2 + \frac{\gamma}{\alpha} - 2\right) B + C = 0 \\ B + \left(\frac{2\alpha}{\gamma} + 1 - 1\right) C = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2\alpha}{\gamma} \cdot A + B = 0 & (18\alpha) \\ A + \frac{\gamma}{\alpha} B + C = 0 & (18\beta) \\ B + \frac{2\alpha}{\gamma} C = 0 & (18\gamma) \end{cases}$$

$(18\alpha) - (18\gamma) \Rightarrow \frac{2\alpha}{\gamma} A + B - B - \frac{2A}{\gamma}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\alpha}{\gamma} \cdot A + B\right) - \left(B + \frac{2\alpha}{\gamma} C\right) = 0 \Rightarrow A - C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = C} \; (19) \overset{10}{\Rightarrow} \boxed{x = z} \; (20) \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{A}{C} = 1} \; (21)$$

$(18\alpha) \Rightarrow B = -\frac{2\alpha}{\gamma} A = -2 \frac{\mu/s}{m/s} A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{B = -2 \frac{\mu}{m} A} \; (22) \Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = -2 \frac{\mu}{m}} \; (23)$$

$(22) \overset{10}{\Rightarrow} \boxed{y = -2 \frac{\mu}{m} x \overset{20}{=} -2 \frac{\mu}{m} z} \; (24)$

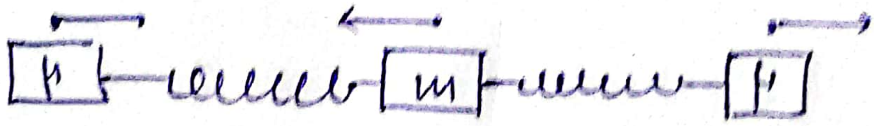
Σαρώθηκε με το CamScanner

γ) (21), (23) $\rightarrow \begin{cases} \dfrac{B}{A} = -2\dfrac{\mu}{m} \\ \dfrac{C}{A} = 1 \end{cases}$

δ) (20) → οι ακραίες ~~μάζες~~ μάζες ταλαντώνονται προς την ίδια κατεύθυνση κ' με το ίδιο πλάτος συγχρονισμένα.

(24) → η κεντρική μάζα αντισταθμίζει την κίνηση των ακραίων κινούμενη προς την αντίθετη κατεύθυνση ώστε το κέντρο μάζας του συστήματος να παραμένει ακίνητο. (δεν χρειάζεται να το αποδείξετε) +!/100

Σχηματικά:



Και μια απόδειξη που δεν χρειάζεται να κάνετε!

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας είναι

$$\frac{\mu\cdot x + m\cdot y + \mu\cdot z}{\mu + m + \mu} \overset{(20)}{\underset{(24)}{=}} \frac{\mu z + \left(-\frac{2\mu}{m}z\right)\cdot m + \mu z}{2\mu + m} =$$

$= \dots = 0!$ → το κέντρο μάζας είναι ακίνητο. +!/100

Σαρώθηκε με το CamScanner