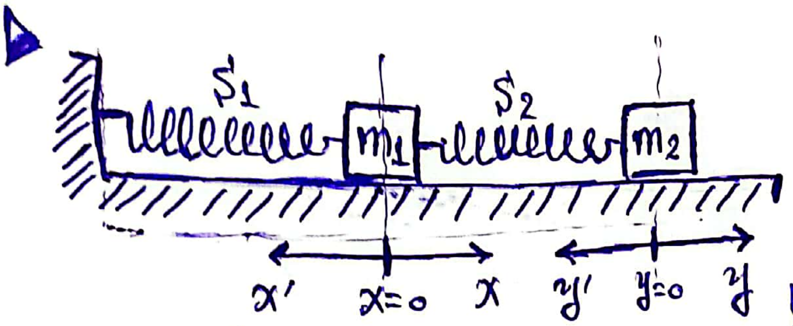
Δίδεται σύστημα 2 μαζών m_1 κ' m_2 συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας s_1 κ' s_2 αντίστοιχα όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Οι μάζες ολισθαίνουν σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, τα ελατήρια δεν υφίστανται κάμψη, κ.ο.κ.

Οποιαδήποτε διαδικασία διάχυσης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος στους μικροσκοπικούς βαθμούς ελευθερίας του ή ανταλλαγής ενέργειας με το περιβάλλον θεωρείται αμελητέα. *!...

α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

β) Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες των κ.τ.τ. εφόσον $m_1 = m_2 \equiv m$ κ' $s_1 = s_2 \equiv s$.

γ) Βρείτε τους λόγους των πλατών των ανωτέρω κ.τ.τ.

δ) Περιγράψτε ποιοτικά την κάθε κ.τ.τ.

α) (α' τρόπος)

Η κινητική ενέργεια K του συστήματος υπολογίζεται ως

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (1)$$

όπου v_1 κ' v_2 οι ταχύτητες των μαζών m_1 κ' m_2 αντίστοιχα

εξ' ορισμού $v_1 = \dot{x}$ κ' $v_2 = \dot{y}$ (2)

*!... Προσαρμόζουμε στο οριζόντιο επίπεδο δύο συστήματα αναφοράς $x'x$ κ' $y'y$ ούτως ώστε όταν το σύστημα ισορροπεί οι θέσεις ισορροπίας των m_1 κ' m_2 ταυτίζονται με τις αρχές $x=0$ κ' $y=0$ αντίστοιχα.

▶ ① $\overset{②}{\Longrightarrow}$ $K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2$ ③

▶ Η επιμήκυνση του 1ου ελατηρίου (σκληρότητας s_1) ισούται με x ενώ του 2ου ελατηρίου (σκληρότητας s_2) ισούται με $y-x$. Συνεπώς

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}s_1x^2}_{\text{συνεισφορά 1ου ελατηρίου}} + \underbrace{\frac{1}{2}s_2(y-x)^2}_{\text{συνεισφορά 2ου ελατηρίου}} \quad ④$$

όπου U η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

▶ Παρατηρείστε ότι η δυναμική ενέργεια αποδίδεται στα ελατήρια κ' όχι στις μάζες. Δηλαδή η έκφραση

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}s_1x^2 + \frac{1}{2}s_2(x-y)^2}_{\text{Δυναμική ενέργεια 1ης μάζας}} + \underbrace{\frac{1}{2}s_2(y-x)^2}_{\text{Δυναμική ενέργεια 2ης μάζας}}$$

είναι λανθασμένη.

▶ $E = K + U \overset{③}{\underset{④}{\Longrightarrow}} E = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 +$

$\frac{1}{2}s_1x^2 + \frac{1}{2}s_2(x-y)^2$ ⑤

όπου E η μηχανική ενέργεια του συστήματος.

▶ Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται ⇒

$$\Rightarrow \dot{E}=0 \Rightarrow 0=\dot{E} \overset{5}{=} m_1\dot{x}\ddot{x}+m_2\dot{y}\ddot{y}+s_1\cdot x\cdot\dot{x}+$$
$$+\,s_2(x-y)(\dot{x}-\dot{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=\dot{x}\,[m_1\ddot{x}+s_1\cdot x+s_2(x-y)\,]+$$
$$+\,\dot{y}\,[m_2\ddot{y}+s_2(y-x)] \quad (6)$$

▶ Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στην m_1 είναι $m_1\ddot{x}$. Αυτή οφείλεται αποκλειστικά σε δυνάμεις ελατηρίων. Άρα μπορεί να εξαρτάται από τα x y και θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη των $\dot{x},\dot{y},\ddot{y}$. Ομοίως η συνισταμένη $m_2\ddot{y}$ θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη των $\dot{x},\dot{y},\ddot{x}$. (7)

▶ Ο μόνος τρόπος να ισχύει η (7) είναι στην (6) να μηδενίζονται οι αγκύλες [...] δηλ.

$$m_1\ddot{x}+s_1x+s_2(x-y)=0 \quad (8\alpha)$$

και $$m_2\ddot{y}+s_2(y-x)=0 \quad (8\beta)$$

▶ Αυτές είναι οι ζητούμενες εξισώσεις κίνησης.

▶ α) <u>β' τρόπος</u>

Υπολογίζουμε την Λαγκρανζιανή $L \equiv K-U \overset{(3),(4)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow 2L=m_1\dot{x}^2+m_2\dot{y}^2-s_1x^2-s_2(x-y)^2 \quad (9)$$

▶ Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -s_1 x - s_2(x-y) \quad (10\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\bullet} = m_1 \ddot{x} \quad (10\beta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -s_2(y-x) \quad (11\alpha)$$

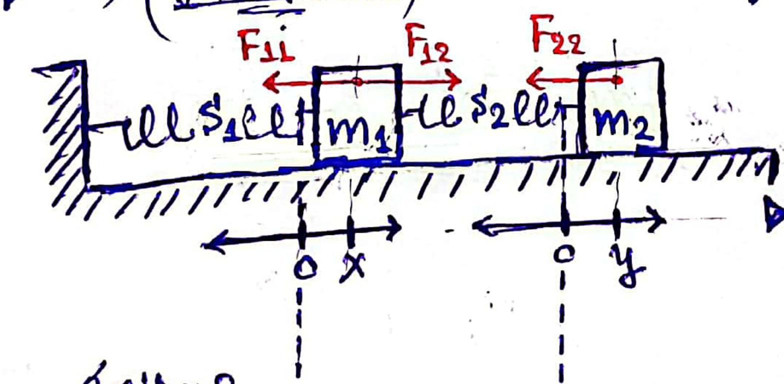
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)^{\bullet} = m_2 \ddot{y} \quad (11\beta)$$

▶ Αντικαθιστούμε τις παραγώγους στις εξισώσεις Όιλερ-Λαγκράνζ.

▶ $$\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\bullet} \xRightarrow{(10)} (8\alpha)\ !$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)^{\bullet} \xRightarrow{(11)} (8\beta)\ !$$

▶ α) (γ' τρόπος)



Σχήμα 2

▶ Έστω προς τα θετικά (δεξιά) μετατόπιση της μεν m_1 κατά x της δε m_2 κατά $y>x$.

▶ Τότε το ελατήριο σκληρότητας s_1 υφίσταται επιμήκυνση x το δε ελατήριο σκληρότητας s_2 υφίσταται επιμήκυνση $(y-x)$.

▶ Υπό αυτές τις συνθήκες το 1ο ελατήριο ασκεί στην μάζα m_1 δύναμη F_{11} με αρνητική (προς τα αριστερά) φορά άρα $F_{11} = -s_1 \cdot x$.

(12α)

▶ Το 2ο ελατήριο ασκεί στην μάζα m_1 δύναμη F_{21} με φορά προς τα δεξιά άρα $F_{12} = s_2(y-x)$. (12β)

▶ Το 2ο ελατήριο ασκεί στην μάζα m_2 δύναμη F_{22} με με φορά προς τ' αριστερά άρα $F_{22} = -s_2(y-x)$ (12γ)

▶ Β' Νόμος Νεύτωνα για μάζα m_1: $m_1\ddot{x} = F_{11} + F_{12} \overset{12α,\,12β}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow m_1\ddot{x} = -s_1 x + s(y-x) \Rightarrow (8α)$$

▶ Β' Νόμος Νεύτωνα για μάζα m_2: $m_2\ddot{y} = F_{21} \overset{12γ}{=} -s_2(y-x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (8β)$$

▶ β) $\left.\begin{array}{l} m_1 = m_2 \equiv m \\ s_1 = s_2 \equiv s \end{array}\right\} \overset{(8)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m\ddot{x} + 2sx - sy = 0 \\ m\ddot{y} + sy - sx = 0 \end{array}\right\} (9)$$

▶ Θέτω $x = Ae^{i\omega t}$ *100 κ' $y = B\cdot e^{i\omega t}$ *100 όπου A κ' B (πιθανώς μιγαδικές) σταθερές.

▶ $x = Ae^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x} = i\omega A e^{i\omega t} \overset{13}{=} i\omega x \Rightarrow \ddot{x} = i\omega\dot{x} \overset{13}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \ddot{x} = i\omega\cdot(i\omega x) = i^2\omega^2 x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$, αφού $i^2 = -1$ (14)

▶ $y = Be^{i\omega t} \Rightarrow$ ...ομοίως... $\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\omega^2 y}$

▶ $(9) \overset{(14)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} (-\gamma+2)x - y = 0 \\ (-\gamma+1)y - x = 0 \end{array}\right\} (15)$ όπου $\gamma \equiv \dfrac{m\omega^2}{s}$ (16)

▶ (15) $\xrightarrow{*100}$ $\left.\begin{aligned}&[(2-\gamma)\cdot A - B]\cdot e^{i\omega t} = 0\\&[(1-\gamma)\cdot B - A]\cdot e^{i\omega t} = 0\end{aligned}\right\} \overset{\cdot(e^{-i\omega t})}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned}&(2-\gamma)A - B = 0\\&(1-\gamma)B - A = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}&2-\gamma-\lambda = 0\\&(1-\gamma)\lambda - 1 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned}&\gamma+\lambda-2 = 0\\&\gamma\lambda - \lambda + 1 = 0\end{aligned}\right\}$ (17) όπου $\lambda \equiv B/A$ (18)

▶ (17) $\Rightarrow \left.\begin{aligned}&-\gamma\lambda-\lambda^2+2\lambda = 0\\&\gamma\lambda-\lambda+1 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow -\lambda^2+\lambda+1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2-\lambda-1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1+4 = 5 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (19)

▶ (17) $\Rightarrow \lambda = 2-\gamma \overset{(19)}{=} \dfrac{4}{2} - \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \dfrac{4}{2} + \dfrac{-1\mp\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma = \dfrac{3\mp\sqrt{5}}{2}$ (20)

▶ Από τις (19) κ' (20) βλέπω ότι έχω δύο ζεύγη λύσεων:

$\gamma_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ κ' $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (21)

και

$\gamma_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ κ' $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (22)

▶ (21) $\overset{(16)}{\underset{(18)}{\Longrightarrow}}$ $\omega_1^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{s}{m}$ κ' $\frac{B}{A} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ (23)

▶ (22) $\overset{(16)}{\underset{(18)}{\Longrightarrow}}$ $\omega_2^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{s}{m}$ κ' $\frac{B}{A} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (24)

▶ Οι (23) κ' (24) απαντούν ταυτόχρονα στα ερωτήματα (β) κ' (γ).

δ)

▶ (23) $\Longrightarrow$ $B/A > 0$. Αυτό σημαίνει ότι οι μάζες m_1 κ' m_2 σε αυτόν τον κ.τ.τ. κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Άρα το ελατήριο που τις ενώνει υφίσταται την ελάχιστη δυνατή συσπείρωση ή επιμήκυνση. Άρα η αλληλεπίδραση των δύο μαζών είναι μειωμένη.

▶ (24) $\Longrightarrow$ $\frac{B}{A} < 0$. Άρα όταν η m_1 κινείται προς τ' αριστερά η m_2 κινείται προς τα δεξιά κ' τανάπαλιν. Συνεπώς το ελατήριο που συνδέει τις δύο μάζες υφίσταται εντονότερες παραμορφώσεις. Άρα η επίδραση του ελατηρίου στην ταλάντωση είναι αυξημένη σε σχέση με τον κ.τ.τ. (23)

▶ Και στους δύο κ.τ.τ. η αδράνεια των μαζών είναι ίδια ωστόσο στον (24) η επίδραση των ελατηρίων είναι εντονότερη για αυτόν τον λόγο $\omega_2 > \omega_1$.

▶ Εν γένει μπορεί να προκύψει $B/A = \rho \cdot e^{i\varphi}$, $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή οι μάζες ταλαντώνονται με διαφορά φάσης φ.

▶ Εν προκειμένω αυτό εξειδικεύεται ως εξής:

$\varphi = 0$ στον κ.τ.τ. (23) (ταλάντωση "σε φάση")

$\varphi = \pi$ στον κ.τ.τ. (24) (ταλάντωση με "αντίθετες" φάσεις)

▶ Προσοχή!!! κ' στις δύο περιπτώσεις $|B/A| \neq 1$ άρα τα πλάτη ταλάντωσης των m_1 κ' m_2 διαφέρουν.