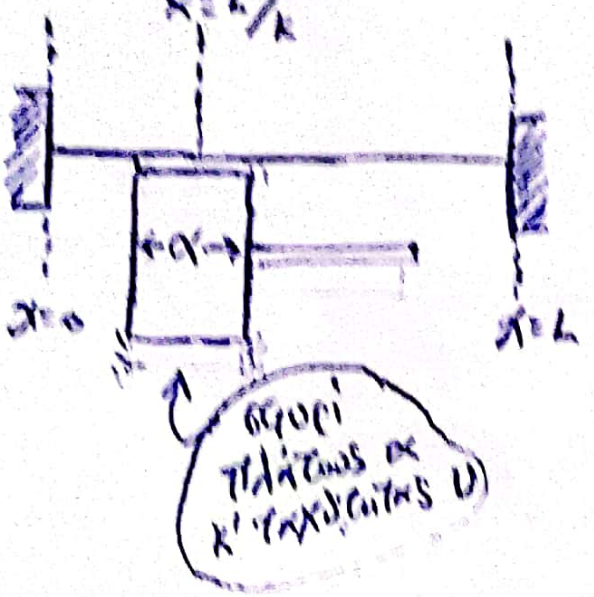
▶ Έστω χορδή μήκους L και μάζας m με πακτωμένα άκρα.

▶ Η χορδή δέχεται κτύπημα από σφυρί πλάτους α στην θέση $x = L/\kappa$ με αποτέλεσμα να τεθεί σε ταλάντωση.

▶ 

▶ Την στιγμή της κρούσης το σφυρί έχει ταχύτητα υ κ' η απομάκρυνση της χορδής από την θέση ισορροπίας της είναι μηδενική.

▶ Υποθέτουμε ότι επί της χορδής δεν αναπτύσσονται οδεύοντα κύματα.

▶ Συνεπώς επί της χορδής θα αναπτυχθεί ένα στάσιμο κύμα που θα περιγράφεται από την έκφραση

$$y(t,x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu(t,x), \quad y_\nu \equiv [A_\nu \cos(\omega_\nu t) + B_\nu \sin(\omega_\nu t)] \cdot \sin\left(\frac{\omega_\nu x}{c}\right) \quad (1)$$

όπου $\omega_\nu = \dfrac{\nu \pi c}{L}$ (2).

▶ Άρα την χρονική στιγμή t η ταχύτητα του σημείου της χορδής που βρίσκεται στην θέση x θα δίδεται από την έκφραση

$$\upsilon(t,x) = \frac{\partial y}{\partial t} \overset{(1)}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} [\omega_\nu B_\nu \cos(\omega_\nu t) - \omega_\nu A_\nu \sin(\omega_\nu t)] \sin\frac{\omega_\nu x}{c} \quad (3)$$

▶ Εφεξής υιοθετούμε τους συμβολισμούς $\upsilon_0(x) \equiv \upsilon(t=0,x)$ και $y_0(x) \equiv y(t=0,x)$.

▶ $$y_0(x) \overset{(1)}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cdot \sin\left(\frac{\omega_\nu x}{c}\right) \overset{(*!)}{=} 0 \;\; \forall x \Rightarrow \boxed{A_\nu = 0 \;\; \forall \nu} \quad (4)$$

(*!) $y_0(x) = 0 \;\; \forall x$ αφού αρχικά η χορδή βρίσκεται στην θέση ισορροπίας της.

▶ $\upsilon_0(x) \equiv \upsilon(t=0,x) \overset{(3)}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu B_\nu \sin\left(\frac{\omega_\nu x}{c'}\right) \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \upsilon_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu B_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \quad (5)$$

▶ Κατά τα γνωστά $\omega_\nu B_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L \upsilon_0(x)\cdot\sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)dx$ (6)

▶ Θεωρούμε ότι την αρχική στιγμή $t=0$ το σφυρί προσδίδει μια αρχική ταχύτητα υ στα σημεία με τα οποία έρχεται σε επαφή, δηλαδή

$$\upsilon_0(x) = \begin{cases} \upsilon, & \left|x - \frac{L}{k}\right| \leq \alpha/2 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (7)$$

▶ $$\omega_\nu B_\nu \overset{(6)}{\underset{(7)}{=}} \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{k}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{L}{k}+\frac{\alpha}{2}} \upsilon\cdot\sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)\cdot dx = \frac{2\upsilon}{\nu\pi}\cdot\int_{\frac{\nu\pi}{k}-\frac{\nu\pi\alpha}{2L}}^{\frac{\nu\pi}{k}+\frac{\nu\pi\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)\cdot d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &\equiv \frac{\nu\pi}{k} \\ \gamma &\equiv \frac{\nu\pi\alpha}{2L} \\ y &\equiv \frac{\nu\pi x}{L} \end{aligned}}$$

$$= \frac{2\upsilon}{\nu\pi}\int_{\beta-\gamma}^{\beta+\gamma} \sin y\, dy \Rightarrow \frac{\nu\pi\cdot\omega_\nu\cdot B_\nu}{2\upsilon} = \left[-\cos y\right]_{\beta-\gamma}^{\beta+\gamma} =$$

$$= \cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) =$$

$$= \cancel{\cos\beta\cdot\cos\gamma} + \sin\beta\cdot\sin\gamma - \cancel{\cos\beta\cos\gamma} + \sin\beta\sin\gamma =$$

$$= 2\sin\beta\sin\gamma \Rightarrow \boxed{\omega_\nu B_\nu = \frac{4\upsilon}{\nu\pi}\cdot\sin\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)\cdot\sin\left(\frac{\nu\pi\alpha}{2L}\right)} \quad (8)$$

▶ (1) $\xRightarrow[(4)]{(2)}$ $y_\nu(t,x) = B_\nu \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi c}{L}\cdot t\right)\cdot \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)$ (9)

▶ Έστω ότι για κάποιο ν έχω $\sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)=0$ για $x=\frac{L}{k}$.

Δηλ. $\sin\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)=0$ (10) $\xRightarrow[(9)]{}$ $y_\nu\left(t,\frac{L}{k}\right)=0$ (11)

▶ Δηλ. το αντίστοιχο y_ν είναι λύση της κυματικής εξίσωσης όπου το $x=L/k$ είναι ακίνητο. (12)

▶ Ωστόσο το $x=L/k$ είναι το σημείο στο οποίο κτυπάμε την χορδή κ' περιμένουμε να βρίσκεται σε διαρκή κίνηση (13)

▶ Οι (12) κ' (13) μοιάζουν ασυμβίβαστες.

▶ Ωστόσο $\sin\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)=0 \xRightarrow{(8)} \omega_\nu B_\nu=0 \Rightarrow B_\nu=0$ (14)

▶ Δηλ. εκείνα τα y_ν που χαρακτηρίζονται απ' το σημείο $x=L/k$ έχουν $B_\nu=0$ κ' άρα δε συνεισφέρουν στο άθροισμα (1).

▶ Άρα όλα τα ν όπου ν = ακέραιο πολλαπλάσιο του k έχουν $B_\nu=0$.

▶ Επί παραδείγματι εάν $k=7$ τότε $\sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)=0$ για $\nu=7,14,21,\dots$ άρα -με το παραπάνω σκεπτικό- $B_7=B_{14}=B_{21}=B_{28}=\dots=0$ κ' τα $y_7, y_{14}, y_{21},\dots$ δεν συνεισφέρουν στο άθροισμα (1).

▶ Σε κάθε ν αντιστοιχεί ενέργεια

$$E_\nu = \frac{1}{4} m\omega_\nu^2 (A_\nu^2 + B_\nu^2) \overset{(4)}{=} \frac{1}{4} m\omega_\nu^2 B_\nu^2 \overset{(8)}{=}$$

$$= \frac{1}{4} m \frac{16 u^2}{\nu^2 \pi^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\nu\pi\alpha}{2L}\right) \quad (15)$$

▶ Έστω $k=2$. Τότε $\sin\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) = \begin{cases} 0, & \nu \text{ άρτιος} \\ 1, & \nu = 1,5,9,\ldots \\ -1, & \nu = 3,7,11,\ldots \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) = \begin{cases} 0, & \nu \text{ άρτιος} \\ 1, & \nu \text{ περιττός} \end{cases} \quad (16)$$

▶ (15), (16) $\Rightarrow E_\nu = 0$ αν ν άρτιος

▶ (15), (16), ν περιττός $\Rightarrow E_\nu = \frac{4 m u^2}{\nu^2 \pi^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\nu\pi\alpha}{2L}\right) =$

$$= \frac{\cancel{4} m u^2}{\cancel{\nu^2 \cdot \pi^2}} \cdot \frac{\cancel{\nu^2 \pi^2} \alpha^2}{\cancel{4} L^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\nu\pi\alpha}{2L}\right)}{\left(\frac{\nu\pi\alpha}{2L}\right)^2} \Rightarrow z_\nu \equiv \frac{\nu\pi\alpha}{2L}$$

$$\Rightarrow E_\nu = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} m u^2\right) \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \cdot \frac{\sin(z_\nu^2)}{(z_\nu)^2} \quad (17)$$

ενέργεια που θα είχε η χορδή αν κινούνταν με ταχύτητα u

«ποσοστό» της χορδής που έρχεται σε επαφή με το σφυρί.

όρος ανάλογος (περίπου) του $\frac{1}{\nu^2}$.