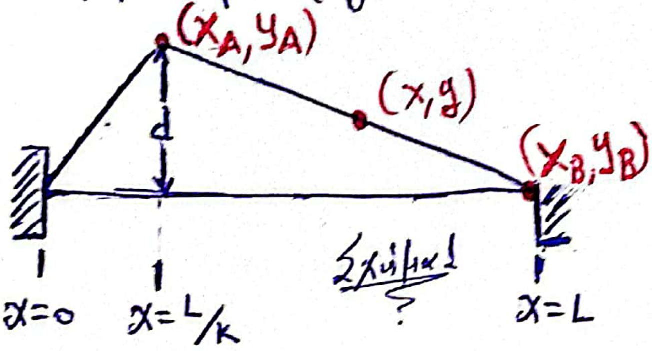
▶ Χορδή μήκους L και μάζας m με πακτωμένα άκρα, εκκινεί από την ηρεμία με τριγωνικό σχήμα ύψους d στην θέση $x=L/k$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

▶



▶ Η χορδή εκκινεί από την ηρεμία. Συνεπώς $v_0(x) \equiv \left.\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ (1)

▶ Επίσης από το σχήμα προκύπτει:

$$y_0(x) \equiv y(t=0,x) = \begin{cases} \frac{k\cdot d}{L}\cdot x, & 0 \le x \le L/k \\ \frac{k\cdot d}{(k-1)\cdot L}\cdot(L-x), & L/k \le x \le L \end{cases} \quad (2)$$

▶ Πώς προκύπτει το δεύτερο σκέλος της (2);

▶ Κάθε ευθεία προσδιορίζεται μονοσήμαντα από δύο σημεία της, εν προκειμένω τα $(x_A,y_A)=(L/k,d)$ (3) κ' $(x_B,y_B)=(L,0)$ (4). Τούτων δοθέντων για οποιοδήποτε άλλο σημείο (x,y) της ευθείας ισχύει

$$\frac{y-y_B}{x-x_B} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Longrightarrow}} \frac{y-0}{x-L} = \frac{d-0}{\frac{L}{k}-L} = \frac{kd}{L(1-k)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{k\cdot d}{L\cdot(k-1)}\cdot(L-x) \quad (5) \Rightarrow (2) \text{ για } \frac{L}{k} \le x \le L$$

▶ Κατά τα γνωστά $B_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L \cancelto{0}{v_0(x)}\cdot ημ\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)dx \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{B_\nu = 0}$ (6)

▶ Επίσης $A_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L y_0(x)\cdot ημ\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)dx \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \frac{L\cdot A_\nu}{2} = \int_0^{L/k} \frac{k\cdot d}{L}\cdot x\cdot ημ\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)dx + \int_{L/k}^{L} \frac{k\cdot d\cdot(L-x)}{(k-1)\cdot L}\cdot ημ\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu^2\cdot\pi^2}{\cancel{L}\cdot k\cdot d}\cdot\frac{\cancel{L}\cdot A_\nu}{2} = \int_{x=0}^{x=L/k}\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)\cdot d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) +$$

$$+\frac{\nu\cdot\pi}{(k-1)}\cdot\int_{x=L/k}^{x=L}\eta\mu\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)\cdot d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) - \frac{1}{(k-1)}\int_{x=L/k}^{x=L}\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) d\left(\overbrace{\frac{\nu\pi x}{L}}^{\alpha}\right) =$$

$$\overset{(9)}{=} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\nu\pi/k}\alpha\cdot\eta\mu\alpha\cdot d\alpha + \frac{\nu\pi}{(k-1)}\cdot\int_{\alpha=\nu\pi/k}^{\alpha=\nu\pi}\eta\mu\alpha\, d\alpha - \frac{1}{(k-1)}\int_{\alpha=\nu\pi/k}^{\nu\pi}\alpha\cdot\eta\mu\alpha\cdot d\alpha =$$

$$\overset{(10)}{=} \Big[\eta\mu\alpha - \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\Big]_0^{\nu\pi/k} + \frac{\nu\pi}{(k-1)}\Big[-\sigma\upsilon\nu\alpha\Big]_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\nu\pi} + \frac{1}{k-1}\Big[-\eta\mu\alpha+\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\Big]_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\nu\pi} =$$

$$= \eta\mu\frac{\nu\pi}{k} - \frac{\nu\pi}{k}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{k} - \cancelto{0}{\eta\mu 0} + \cancelto{0}{0\cdot\sigma\upsilon\nu 0} + \frac{\nu\pi}{k-1}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{k} - \frac{\nu\pi}{k-1}\sigma\upsilon\nu\,\nu\pi$$

$$+\frac{1}{k-1}\cdot\nu\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\,\nu\pi - \cancelto{0}{\frac{\eta\mu(\nu\pi)}{k-1}} + \frac{1}{k-1}\cdot\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) - \frac{1}{k-1}\cdot\frac{\nu\pi}{k}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{k}$$

$$= \left(1+\frac{1}{k-1}\right)\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) + \underbrace{\left(\frac{\nu\pi}{k-1} - \frac{\nu\pi}{k\cdot(k-1)} - \frac{\nu\pi}{k}\right)}_{0}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) =$$

$$= \frac{k}{k-1}\cdot\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) \Rightarrow \boxed{A_\nu = \frac{2\cdot k^2\cdot d}{\nu^2\cdot\pi^2\cdot(k-1)}\cdot\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)} \quad (7)$$

▶ Άρα $y(t,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu(t,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\cdot\eta\mu\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\cdot\pi\cdot c}{L}\cdot t\right)$ (8) όπου τα A_ν προκύπτουν από την (7).

▶ $\alpha \equiv \frac{\nu\pi x}{L} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 0 & \gamma\iota\alpha\ x=0\\ \alpha = \frac{\nu\pi}{k} & \gamma\iota\alpha\ x = L/k\\ \alpha = \nu\pi & \gamma\iota\alpha\ x = L\end{cases}$ (9)

▶ $(\eta\mu\alpha - \alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)' = \alpha\cdot\eta\mu\alpha$ (10)

▶ Έστω $k=2$. Αυτό σημαίνει ότι η κορυφή της χορδής στο σχήμα 1 θα βρίσκεται ακριβώς πάνω από το μέσον της θέσης ισορροπίας δηλαδή στο $x = L/2$.

▶ Εμπειρικά, περιμένουμε το σημείο αυτό να ταλαντώνεται γύρω από μια θέση ισορροπίας κ' όχι να παραμένει ακίνητο. (11)

▶ [illegible]

▶ Παράλληλα παρατηρούμε ότι για τα y_ν της εξίσωσης (8) ισχύει $y_\nu(t, L/2) = 0 \ \forall$ άρτιο ν. Δηλαδή τα y_ν για ν άρτιο αντιστοιχούν σε λύσεις όπου το μέσον της χορδής παραμένει ακίνητο (12)

▶ Δεδομένου ότι τα y_ν δεν πολλαπλασιάζονται αλλά αθροίζονται οι (11) κ' (12) σε πρώτη ανάλυση δεν είναι ασυμβίβαστες. Ωστόσο...

▶ ...(7) $\xrightarrow{k=2}$ $A_\nu = 0 \ \forall$ άρτιο ν. Δηλαδή τα y_ν που αντιστοιχούν σε ακίνητο μέσο της χορδής δεν συνεισφέρουν στο άθροισμα (8).

▶ Η ιδιότητα αυτή είναι ανεξάρτητη του k. Πράγματι!

▶ Έστω τυχαίο y_ν για το οποίο το σημείο $x = L/k$ στο οποίο κτυπούμε την χορδή είναι ακίνητο $\forall t$. Δηλ. έστω $y_\nu(t, L/k) = 0$ (13)

$$(13) \Rightarrow A_\nu \cdot \eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi c}{L} \cdot t\right) = 0 \Rightarrow$$ ισχύει $\forall t$

$$(8) \Rightarrow y_\nu = A_\nu \cdot \eta\mu\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi c}{L} \cdot t\right)$$

$$\Rightarrow A_\nu \cdot \eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\nu = 0 \text{ ή } \eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\nu = 0 \text{ ή } A_\nu = 0 \;(7) \Rightarrow \boxed{A_\nu = 0}$$

Άρα τα y_ν για τα οποία η κορυφή της χορδής στο σχήμα 1 είναι ακίνητη στην θέση ισορροπίας της έχουν $A_\nu = 0$ κ' δεν συνεισφέρουν στο άθροισμα της εξίσωσης (8).