Προβλήματα Κεφαλαίου 10 στην 6η Έκδοση

Κεφάλαιο 9 στην 3η Έκδοση

Παράδειγμα: Μερικά χρήσιμα ολοκληρώματα

$$\int_{0\ \acute{\eta}(-\pi)}^{2\pi\ \acute{\eta}(+\pi)} \sin n\pi x \sin m\pi x dx = \pi\,\delta_{n,m},\quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1(n=m) \\ 0(n\neq m) \end{cases}, \qquad \int_{0\ \acute{\eta}(-\pi)}^{2\pi\ \acute{\eta}(+\pi)} \cos n\pi x \cos m\pi x dx = \pi\,\delta_{n,m},$$

$$\int_{0\ \acute{\eta}(-\pi)}^{2\pi\ \acute{\eta}(+\pi)} \sin n\pi x \cos m\pi x dx = 0.$$

Επίσης:

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\ \sin\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}\delta_{n,m},\quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1(n=m) \\ 0(n\neq m) \end{cases}, \qquad \int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\ \cos\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}\delta_{n,m},$$

$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\ \cos\frac{m\pi x}{l} dx = 0$. Με αλλαγή μεταβλητής u=-x, επεκτείνουμε το διάστημα ολοκλήρωσης πχ:

$$\int_0^{-l} \sin\left(-\frac{n\pi u}{l}\right)\ \sin\left(-\frac{m\pi u}{l}\right)(-du) = \int_0^{-l}\left(\cancel{-}\sin\frac{n\pi u}{l}\right)\left(\cancel{-}\sin\frac{m\pi u}{l}\right)(-du) = \int_{-l}^{0} \sin\frac{n\pi u}{l}\sin\frac{m\pi x}{l} du = \frac{l}{2}\delta_{n,m}$$

$$\Rightarrow \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\ \sin\frac{m\pi x}{l} dx + \int_{-l}^{0} \sin\frac{n\pi u}{l}\sin\frac{m\pi x}{l} du \Rightarrow \boxed{\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\ \sin\frac{m\pi x}{l} dx = l\ \delta_{n,m}}$$ Ομοίως και:

$$\boxed{\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\ \cos\frac{m\pi x}{l} dx = l\,\delta_{n,m}}.$$

Παράδειγμα: Η σειρά Fourier. Οποιαδήποτε συνάρτηση *f(x)* με περίοδο 2π, μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων:

$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Οι συντελεστές a_n, b_n βρίσκονται χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραπάνω ολοκληρωμάτων. Για παράδειγμα, ο όρος b_5 υπολογίζεται ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση της *f(x)* με τον κατάλληλο τριγωνομετρικό αριθμό (εδώ *sin5x*) και ολοκληρώνουμε σε διάστημα *2π*:

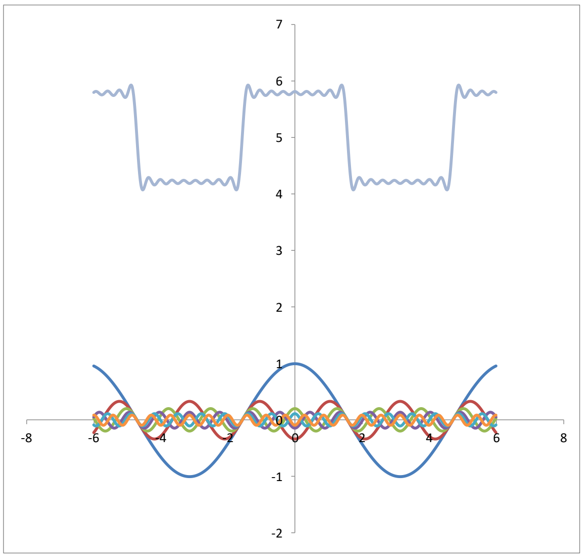
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin 5x\, dx = \frac{1}{2}a_0 \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \sin 5x\, dx} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\sin 5x\, dx.$$

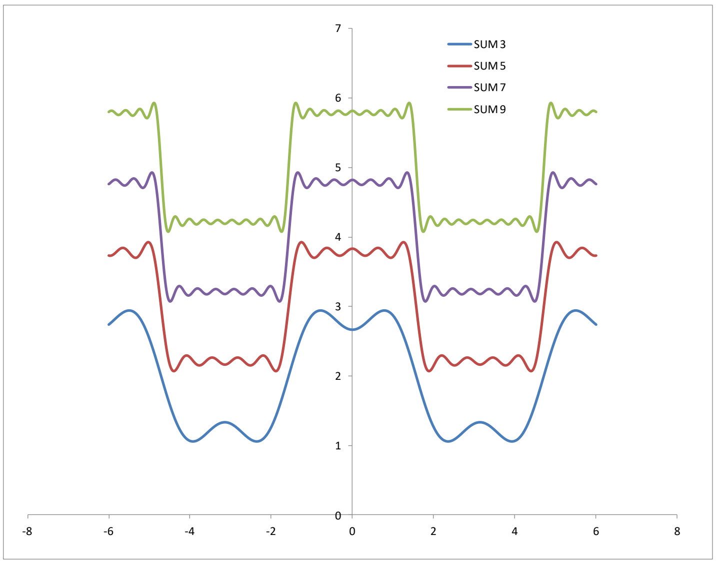
Από τους όρους του αθροίσματος, μη μηδενική τιμή θα πάρει μόνο εκείνος που περιλαμβάνει το b_5, καθώς όλοι οι άλλοι όροι, είναι γινόμενα ημιτόνων με $n\neq5$, ή γινόμενα ημίτονου-συνημίτονου των οποίων τα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Επομένως παίρνουμε:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin 5x\,dx = \cancel{\int_0^{2\pi} b_5 \sin^2 5x\,dx}^{\;\pi} \;\Rightarrow b_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin 5x\,dx\,.$$

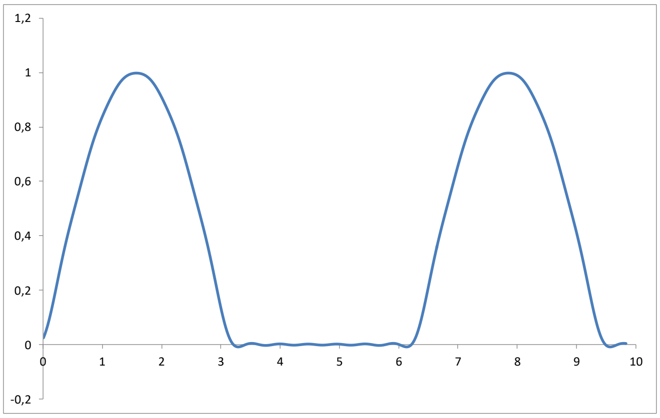
Ομοίως, $\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx}$, $\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx}$.

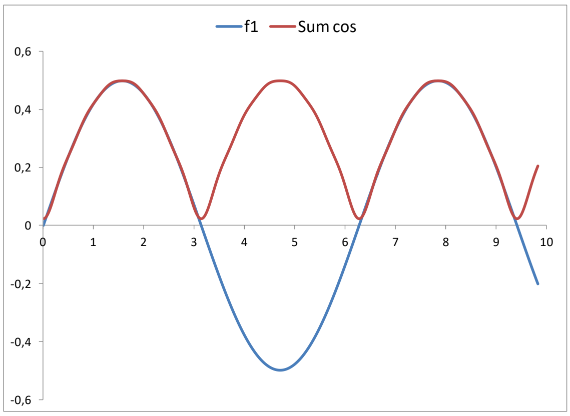
Παραδείγματα ανάλυσης περιοδικών συναρτήσεων δίνονται στα επόμενα σχήματα:





Τετραγωνικός παλμός, ανάλυση σε σειρά συνημιτόνων. Αριστερά, οι 9 πρώτοι όροι και το αποτέλεσμα της άθροισής τους. Δεξιά, ο παλμός προσεγγίζει το τετράγωνο, όσο προσθέτουμε όρους.



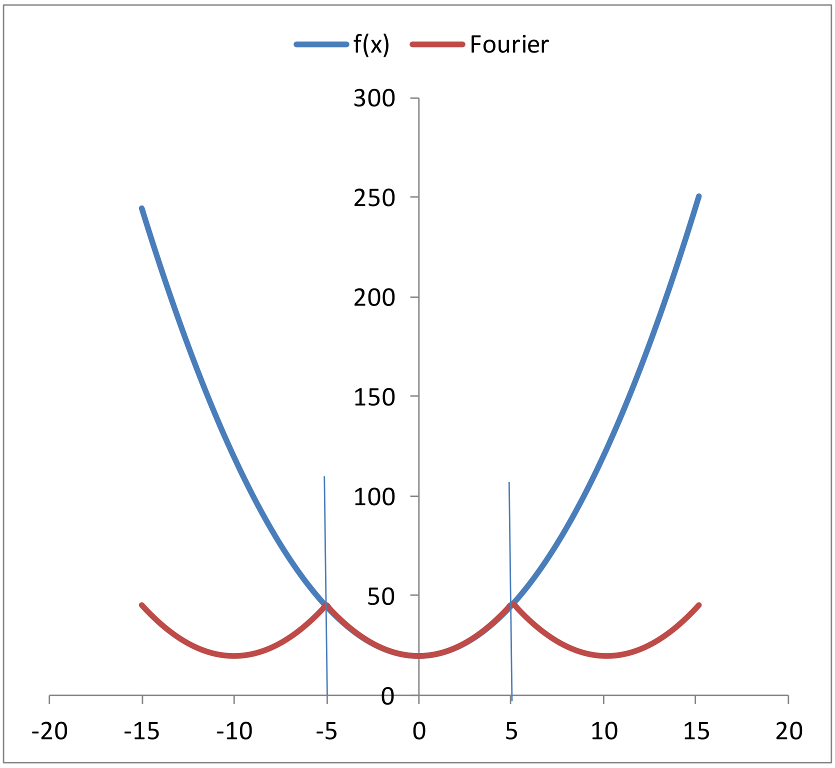


Ημιανόρθωση ημιτονοειδούς σήματος. Αριστερά: Χρησιμοποιήθηκαν οι όροι συνημίτονων *n=0, 2, 4, 6, 8, 10, 12* και ο όρος ημιτόνου *n=1*. Δεξιά, ο όρος ημιτόνου *n=1(μπλέ)* συντίθεται με τους όρους συνημίτονου *n=0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 (κόκκινο)* για ημιανόρθωση. Οι όροι συνημίτονου (χωρίς τον όρο *n=1*) δίνουν πλήρη ανόρθωση.

Δείτε τα αρχεία EXCEL «Ημιανόρθωση Fourier» και «Σειρά Fourier Τετραγωνικός παλμός» στο e-class

Για εξάσκηση στις ολοκληρώσεις, λύστε τα προβλήματα 9.3, 9.4, 9.5, 9.7, 9.8 του βιβλίου.

Παράδειγμα. Επέκταση της σειράς Fourier για οποιοδήποτε διάστημα. Έστω συνάρτηση μη περιοδική (πχ $f(x)=C_1x^2 + C_2$). Η συνάρτηση αυτή μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier στο διάστημα $(-l,+l)$. Έξω από αυτό το διάστημα, η συνάρτηση διαφέρει από την περιοδική σειρά Fourier, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για διάστημα (-5, +5).



Ορίζω μια συνάρτηση $g(z)$ με περίοδο $(-\pi,+\pi)$, με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, πχ στο παραπάνω παράδειγμα του σχήματος, $f(x)=C_1x^2+C_2$, $g(z)=\left(\frac{C_1l^2}{\pi^2}\right)z^2+C_2$, έτσι ώστε $f(\pm l)=g(\pm\pi)$ και την αναλύω σε σειρά Fourier:

$$g(z)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nz+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nz\text{, όπου } a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(z)\cos nz\,dz\text{, } b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(z)\sin mz\,dz\text{.}$$

Με αλλαγή μεταβλητής, $x=\frac{l}{\pi}z,\ dz=\frac{\pi}{l}dx$, προκύπτει εφόσον ισχύει $f(x)=g(z)=g\left(\frac{\pi}{l}x\right)$:

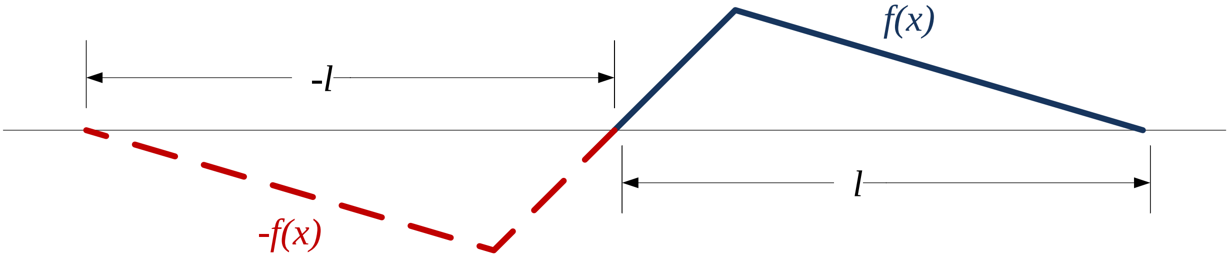
$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\text{, όπου } a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\text{, } b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Αν στην παραπάνω ανάλυση ορίσουμε το διάστημα ως $(-S/2,+S/2)$ τότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{S}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{S}\quad a_n=\frac{2}{S}\int_{-S/2}^{S/2}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{S}\,dx\quad b_n=\frac{2}{S}\int_{-S/2}^{S/2}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{S}\,dx$$

Αυτές οι σχέσεις (με l αντί για S) χρησιμοποιούνται και στο βιβλίο.

Παράδειγμα: Χρήση περιττής συνάρτησης *f(x)=-f(x)* για υπολογισμό της σειράς Fourier στο διάστημα *(0,l)*. Για να αποφύγουμε τη χρήση όλων των όρων της σειράς, όταν θέλουμε ανάλυση συνάρτησης στο διάστημα *(0,l)* θεωρούμε ότι η συνάρτηση *f(x)* είναι περιττή, δηλαδή ισχύει *f(x)=-f(x)* και την επεκτείνουμε στο διάστημα *(-l, l)*, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τότε θα ισχύει: $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \underbrace{\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx}_{\mathrm{I}_1} + \underbrace{\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx}_{\mathrm{I}_2}$.

Το ολοκλήρωμα I_2 γίνεται:

$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{1}{l}\int_{0}^{-l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$. Θέτω $u=-x$ και παίρνω,

$\mathrm{I}_2 = \cancel{-}\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(-u)\sin\left(-\frac{n\pi u}{l}\right)\left(\cancel{-}du\right) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du = I_1$, γιατί οι συναρτήσεις *f(x), sin(x)* είναι περιττές. Επομένως, προκύπτει: $b_n = 2I_1 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$ και η ολοκλήρωση γίνεται στο *(0,l)*. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι όροι α_n συνημίτονων μηδενίζονται, καθώς το *cos(x)* είναι άρτια συνάρτηση. Τελικά, παίρνουμε:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx .$$

Παράδειγμα. Εφαρμογή της μεθόδου Fourier στα στάσιμα κύματα χορδής.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι στην περίπτωση στάσιμων κυμάτων χορδής μήκους *l* με πακτωμένα άκρα, η συνολική μετατόπιση βρίσκεται με άθροιση όλων των αρμονικών (τρόπων ταλάντωσης):

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \text{ αν } k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{l}.$$

Η ταχύτητα δίνεται από:

$$\dot{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\omega_n A_n\sin\omega_n t + \omega_n B_n\cos\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Οι εκφράσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση Fourier για την εύρεση των A_n, B_n, αν γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες.

Αν η χορδή εκκινεί με μηδενική ταχύτητα και **αρχική μετατόπιση** (χορδή κιθάρας) τότε ισχύει:

$y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cancel{\cos\omega_n t}^{1} + B_n \cancel{\sin\omega_n t}^{0}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$. Για την ταχύτητα ισχύει:

$\dot{y}(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\omega_n A_n \cancel{\sin\omega_n t}^{0} + \omega_n B_n \cancel{\cos\omega_n t}^{1}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0 \Rightarrow B_n = 0$.

Επομένως αρκεί να γνωρίζουμε την αρχική μορφή της χορδής {συνάρτηση *f(x)*} και υπολογίζουμε τους συντελεστές από τη σειρά ημιτόνων: $y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ με $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, θεωρώντας ότι η *f(x)* είναι περιττή στο διάστημα *(-l, l)* και ολοκληρώνοντας στο διάστημα *(0,l)*.

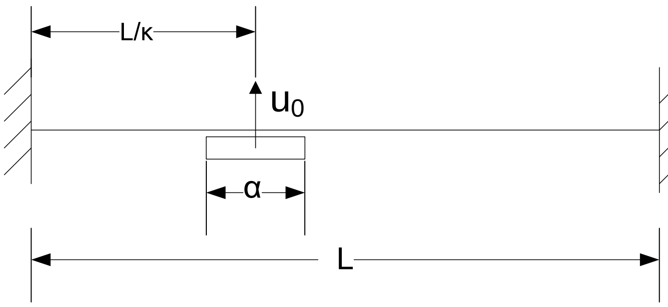
Αν η χορδή εκκινεί με μηδενική μετατόπιση και **αρχική ταχύτητα** (χορδή πιάνου) τότε ισχύει:

$y(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cancel{\cos\omega_n t}^{1} + B_n \cancel{\sin\omega_n t}^{0}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \Rightarrow A_n = 0$. Για την ταχύτητα ισχύει:

$\dot{y}(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\omega_n A_n \cancel{\sin\omega_n t}^{0} + \omega_n B_n \cancel{\cos\omega_n t}^{1}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Επομένως αρκεί να γνωρίζουμε την αρχική κατανομή της ταχύτητας στη χορδή {συνάρτηση *f(x)*} και υπολογίζουμε τους συντελεστές από τη σειρά ημιτόνων: $\dot{y}(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ με $\omega_n B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, θεωρώντας ότι η *f(x)* είναι περιττή στο διάστημα *(-l, l)*, όπως πριν και ολοκληρώνοντας στο διάστημα *(0,l)*.

Πρόβλημα (εκτός βιβλίου): Χορδή πιάνου, μήκους *L*, μάζας *m*, τίθεται σε ταλάντωση από σφυρί με μήκος α και ταχύτητα u_0 στη θέση *x=L/κ*. α) Να βρεθούν οι συντελεστές



$$\omega_n B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$ που προκύπτουν από την ανάλυση της αρχικής ταχύτητας σε σειρά Fourier ημιτόνων $\dot{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$.

β) Ποιες αρμονικές μηδενίζονται και γιατί; γ) Να βρεθεί έκφραση για την ενέργεια κάθε αρμονικής. Να εξετάσετε την περίπτωση *κ=2*.

Υπόδειξη: $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

Λύση: α) Πρώτα βρίσκουμε τη συνάρτηση *f(x)*: $f(x) = \begin{cases} u_0, & \frac{L}{\kappa} - \frac{a}{2} \le x \le \frac{L}{\kappa} + \frac{a}{2} \\ 0, \text{ οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$

Επομένως: $\omega_n B_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \sin\dfrac{n\pi x}{L}\ dx = \dfrac{2u_0}{L}\int_{\frac{L}{\kappa}-\frac{a}{2}}^{\frac{L}{\kappa}+\frac{a}{2}} \sin\dfrac{n\pi x}{L}\ dx$.

Αλλαγή μεταβλητής: $u = \dfrac{n\pi x}{L},\quad dx = \dfrac{L}{n\pi}du,\quad \dfrac{L}{\kappa}\pm\dfrac{a}{2} \to \dfrac{n\pi}{\kappa}\pm\dfrac{n\pi a}{2L}$. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\omega_n B_n = \frac{2u_0}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{n\pi}\int_{\frac{n\pi}{\kappa}-\frac{n\pi a}{2L}}^{\frac{n\pi}{\kappa}+\frac{n\pi a}{2L}} \sin u\ du = \frac{2u_0}{n\pi}\left(-\cos u\right)\Bigg|_{\frac{n\pi}{\kappa}-\frac{n\pi a}{2L}}^{\frac{n\pi}{\kappa}+\frac{n\pi a}{2L}} = \frac{2u_0}{n\pi}\underbrace{\left[\underbrace{-\cos\left(\frac{n\pi}{\kappa}+\frac{n\pi a}{2L}\right)}_{-\cos(\alpha+\beta)}+\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{\kappa}-\frac{n\pi a}{2L}\right)}_{\cos(\alpha-\beta)}\right]}_{2\sin\alpha\sin\beta=2\sin\left(\frac{n\pi}{\kappa}\right)\sin\left(\frac{n\pi a}{2L}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n B_n = \frac{4u_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{\kappa}\right)\sin\left(\frac{n\pi a}{2L}\right)}.$$

Διαιρώντας με $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$ παίρνουμε τους συντελεστές $\boxed{B_n = \dfrac{4u_0 L}{n^2\pi^2 c}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\kappa}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi a}{2L}\right)}$.

Έλεγχος: Έχει το $\omega_n B_n$ διαστάσεις ταχύτητας και το B_n διαστάσεις μήκους;

β) Παρατηρούμε πως αν το κ είναι ακέραιος, τότε μηδενίζονται οι όροι που είναι πολλαπλάσια του κ, καθώς $\sin\left(\dfrac{n\pi}{\kappa}\right) = 0 \Rightarrow n = s\kappa,\ s = 1,2,3....$ Για παράδειγμα, αν το σφυρί χτυπάει στη θέση *L/3* *(κ=3)* τότε θα μηδενίζονται οι όροι *n=3, 6, 9…* Η φυσική σημασία του αποτελέσματος είναι πως οι όροι αυτοί έχουν δεσμό στη θέση *L/3* *(κ=3)* και δεν είναι συμβατοί με την εικόνα της χορδής που εμφανίζει μέγιστη ταχύτητα σε αυτή τη θέση. Οι κατασκευαστές πιάνων τοποθετούν τα σφυράκια στο 1/7 του μήκους των χορδών, ώστε να αποκλείουν την 7η αρμονική και τα πολλαπλάσιά της που θεωρείται ότι δημιουργούν παραφωνία. Ο όρος $\sin\left(\dfrac{n\pi a}{2L}\right)$ γενικά δε μηδενίζεται, καθώς τα *L, a* είναι τυχαία, ανεξάρτητα μεταξύ τους. Θα είχαμε μηδενισμό κάποιων αρμονικών, στην περίπτωση που ο λόγος *a/L* είναι ρητός αριθμός (1/3, 2/10 κλπ).

γ) Γνωρίζουμε ότι $E_n = \dfrac{1}{4}m\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)$, εδώ $A_n=0$, επομένως,

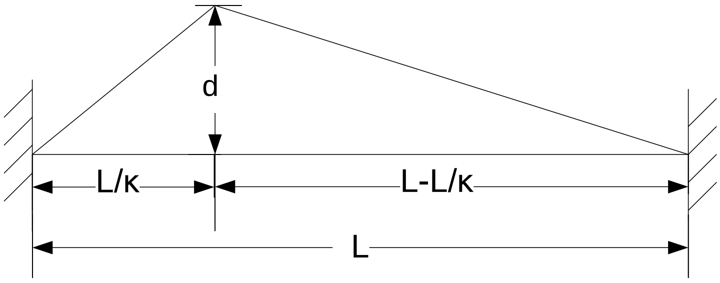
$E_n = \dfrac{1}{4}m\omega_n^2 B_n^2 = \dfrac{4mu_0^2}{n^2\pi^2}\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{\kappa}\right)\sin^2\left(\dfrac{n\pi a}{2L}\right)$. Στην περίπτωση *κ=2* έχουμε μόνο περιττούς όρους και το $\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{\kappa}\right)$ γίνεται $\sin^2\left((2s+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, οπότε η ενέργεια γίνεται: $E_n = \dfrac{4mu_0^2}{n^2\pi^2}\sin^2\left(\dfrac{n\pi a}{2L}\right)$. Η συχνότητα ω_n είναι: $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$, η σχέση γίνεται:

$$E_n = \frac{4mu_0^2c^2}{L^2}\frac{L^2}{n^2\pi^2c^2}\sin^2\left(\frac{n\pi c}{L}\frac{a}{2c}\right) = \frac{4mu_0^2c^2}{L^2\omega_n^2}\sin^2\left(\frac{\omega_n a}{2c}\right) = \frac{mu_0^2a^2}{L^2}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_n a}{2c}\right)}{\left(\frac{\omega_n a}{2c}\right)^2}$$

$$\boxed{E_n = E_1\frac{\sin^2 z}{z^2}},\ z = \frac{\omega_n a}{2c}$$

Επομένως, $E_3 \approx E_1/9$, $E_5 \approx E_1/25$, αφού $\omega_3 = 3\omega_1$, $\omega_5 = 5\omega_1$.

Πρόβλημα (εκτός βιβλίου): Χορδή μήκους *L*, μάζας *m* με σταθερά άκρα, εκκινεί από την ηρεμία με τριγωνικό σχήμα ύψους *d* στη θέση *x=L/κ*. α) Να δείξετε ότι η σχέση για τους συντελεστές $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$ που προκύπτουν από την ανάλυση σε σειρά Fourier ημιτόνων της *y(x,t=0)=f(x)*, είναι $A_n = \frac{2d\kappa^2}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\sin\left(\frac{n\pi}{\kappa}\right)$.



β) Για $\kappa=3$ να γραφούν 5 πρώτοι όροι A_n. Τι παρατηρείτε;

γ) Να βρεθεί έκφραση για την ενέργεια κάθε αρμονικής. Να βρεθεί η συνολική ενέργεια της χορδής για $\kappa=2$ με χρήση του $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Σχολιάστε.

δ) Ποια η μορφή της χορδής τη χρονική στιγμή $\tau = 2\pi/\omega_1$;

Υπόδειξη: $\int u\sin u\,du = \sin u - u\cos u + C \qquad \int \sin u\,du = -\cos u + C$

Λύση: α) Πρώτα θα βρούμε τη συνάρτηση *f(x)*: $f(x) = \begin{cases} \frac{d}{L/\kappa}x = \frac{\kappa d}{L}x, & 0 \le x \le \frac{L}{\kappa} \\ B - \frac{d}{L-L/\kappa}x = B - \frac{\kappa d}{L(\kappa-1)}x, & \frac{L}{\kappa} \le x \le L \end{cases}$

Επειδή η φθίνουσα ευθεία (από *L/κ* έως *L*) μηδενίζεται όταν *x=L*, παίρνουμε ότι $B - \frac{\kappa d}{L(\kappa-1)}L = 0 \Rightarrow B = \frac{\kappa d}{\kappa-1}$ και τελικά προκύπτει:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\kappa d}{L}x, & 0 \le x \le \frac{L}{\kappa} \\ \frac{\kappa d}{\kappa-1}\left(1-\frac{x}{L}\right), & \frac{L}{\kappa} \le x \le L \end{cases}$$

Η αρχική μορφή της χορδής {συνάρτηση *f(x)*} μας δίνει τους συντελεστές από τη σειρά ημιτόνων:

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx=\frac{2\kappa d}{L^2}\int_0^{L/\kappa} x\sin\frac{n\pi x}{L}\ dx+\frac{2\kappa d}{L(\kappa-1)}\int_{L/\kappa}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\ dx-\frac{2\kappa d}{L^2(\kappa-1)}\int_{L/\kappa}^{L} x\sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

Με αλλαγή μεταβλητής $u=\dfrac{n\pi x}{L},\ dx=\dfrac{L}{n\pi}du,\ \dfrac{L}{\kappa}\to\dfrac{n\pi}{\kappa},\ L\to n\pi$ παίρνουμε:

$$A_n=\frac{2\kappa d}{L^2}\frac{L^2}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi/\kappa} u\sin u\ du+\frac{2\kappa d}{L(\kappa-1)}\frac{L}{n\pi}\int_{n\pi/\kappa}^{n\pi}\sin u\ du-\frac{2\kappa d}{L^2(\kappa-1)}\frac{L^2}{n^2\pi^2}\int_{n\pi/\kappa}^{n\pi} u\sin u\ du\Rightarrow$$

Με χρήση των $\int u\sin u\,du=\sin u-u\cos u+C \quad \int\sin u\,du=-\cos u+C$ παίρνουμε:

$$A_n=\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi}{\kappa}-\cancel{\sin 0}^{\,0}-\frac{n\pi}{\kappa}\cos\frac{n\pi}{\kappa}+0\cos 0\right]+\frac{2\kappa d}{n\pi(\kappa-1)}\left[-\cos n\pi+\cos\frac{n\pi}{\kappa}\right]$$
$$-\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\left[\cancel{\sin n\pi}^{\,0}-\sin\frac{n\pi}{\kappa}-n\pi\cos n\pi+\frac{n\pi}{\kappa}\cos\frac{n\pi}{\kappa}\right]$$

Αναλύοντας τους όρους παίρνουμε:

$$A_n=\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{\kappa}-\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2}\frac{n\pi}{\kappa}\cos\frac{n\pi}{\kappa}-\frac{2\kappa d}{n\pi(\kappa-1)}\cos n\pi+\frac{2\kappa d}{n\pi(\kappa-1)}\cos\frac{n\pi}{\kappa}$$
$$+\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\sin\frac{n\pi}{\kappa}+\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2(\kappa-1)}n\pi\cos n\pi-\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\frac{n\pi}{\kappa}\cos\frac{n\pi}{\kappa}\Rightarrow$$

$$A_n=\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{\kappa}-\frac{2d}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\kappa}-\frac{2\kappa d}{n\pi(\kappa-1)}\cos n\pi+\frac{2\kappa d}{n\pi(\kappa-1)}\cos\frac{n\pi}{\kappa}$$
$$+\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\sin\frac{n\pi}{\kappa}+\frac{2\kappa d}{n\pi(\kappa-1)}\cos n\pi-\frac{2d}{n\pi(\kappa-1)}\cos\frac{n\pi}{\kappa}\Rightarrow$$

$$A_n=\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2}\left(1+\frac{1}{\kappa-1}\right)\sin\frac{n\pi}{\kappa}+\frac{2d}{n\pi}\left[-1+\frac{\kappa}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa-1}\right]\cos\frac{n\pi}{\kappa}\Rightarrow$$
$$A_n=\frac{2\kappa d}{n^2\pi^2}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)\sin\frac{n\pi}{\kappa}+\frac{2d}{n\pi}\cancel{\left[-\frac{\kappa-1}{\kappa-1}+\frac{\kappa}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa-1}\right]}^{\,0}\cos\frac{n\pi}{\kappa}\Rightarrow\boxed{A_n=\frac{2\kappa^2 d}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\sin\frac{n\pi}{\kappa}}$$

Έλεγχος: Έχει το A_n διαστάσεις μήκους;

Και σε αυτή την περίπτωση, μηδενίζονται οι όροι που είναι πολλαπλάσια του κ, καθώς $\sin\left(\dfrac{n\pi}{\kappa}\right)=0\Rightarrow n=s\kappa,\ s=1,2,3....$ Η φυσική σημασία του αποτελέσματος είναι πως οι όροι αυτοί έχουν δεσμό στη θέση L/κ *(κ ακέραιος)* και δεν είναι συμβατοί με την εικόνα της χορδής που εμφανίζει μέγιστη αρχική μετατόπιση σε αυτή τη θέση.

$$A_n = \frac{\cancel{2}\ 9d}{n^2\pi^2\ \cancel{2}}\sin\frac{n\pi}{3} \qquad A_3 = \frac{9d}{9\pi^2}\sin\frac{3\pi}{3} = 0$$

β) Για $\kappa=3$, $A_1 = \dfrac{9d}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{9d}{\pi^2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad A_4 = \dfrac{9d}{16\pi^2}\sin\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{9d}{16\pi^2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{A_1}{16}$

$$A_2 = \frac{9d}{4\pi^2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{9d}{4\pi^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A_1}{4} \qquad A_5 = \frac{9d}{25\pi^2}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{9d}{25\pi^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{A_1}{25}$$

Παρατηρούμε ότι το A_3 μηδενίζεται και όσο αυξάνεται το n τόσο μικραίνουν οι τιμές των συντελεστών, ενώ μερικές γίνονται αρνητικές.

γ) Γνωρίζουμε ότι $E_n = \frac{1}{4}m\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)$, εδώ $B_n=0$, επομένως,

$$E_n = \frac{1}{4}m\omega_n^2 A_n^2,\ \omega_n = \frac{n\pi c}{L},\ A_n = \frac{2\kappa^2 d}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\sin\frac{n\pi}{\kappa} \Rightarrow E_n = \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)^2\frac{md^2c^2}{l^2}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{\kappa}\right)}{\left(\frac{n\pi}{\kappa}\right)^2}$$

Και πάλι παίρνουμε έκφραση της μορφής $E_n \sim \dfrac{\sin^2 z}{z^2},\quad z = \dfrac{n\pi}{\kappa}$.

Για $\kappa=2$ συμμετέχουν μόνο οι περιττές αρμονικές $n=2s+1$ και η συνολική ενέργεια είναι:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty}E_n = \sum_{n=1}^{\infty}E_n = \frac{16md^2c^2}{\pi^2 l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$$. Όμως για $n=2s+1$, $\sin^2\left(\frac{2s+1}{2}\pi\right) = 1$ και παίρνουμε:

$$E = \frac{16md^2c^2}{\pi^2 l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2s+1)^2} = \frac{16md^2c^2}{\pi^2 l^2}\frac{\pi^2}{8} \Rightarrow E = \frac{2md^2c^2}{l^2} \xrightarrow{\frac{m}{l}=\rho,\ \rho c^2=T} \boxed{E = \frac{2Td^2}{l}}$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια ΔΕΝ εξαρτάται από τη μάζα της χορδής. Δηλαδή, οποιαδήποτε χορδή με ίδιο μήκος, τάση και αρχική μετατόπιση, θα έχει την ίδια ενέργεια, ανεξάρτητα από τη μάζα της. Αυτό εξηγείται αν σκεφτούμε πως η χορδή εκκινεί με αρχική μετατόπιση και η αρχική ενέργειά της είναι δυναμική.

δ) Μια επόμενη χρονική στιγμή, η μετατόπιση δίδεται από την: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\ \cos\omega_n t\ \ \sin\dfrac{n\pi x}{L}$.

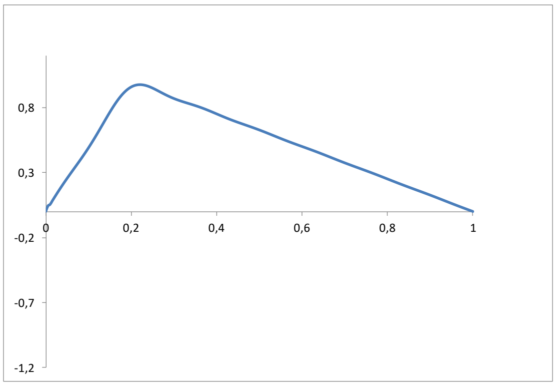
Τη χρονική στιγμή $\tau = 2\pi/\omega_1$ αφού $\omega_n = n\omega_1$ οι όροι των συνημίτονων γίνονται

$\cos\omega_n\tau = \cos\dfrac{n\omega_1 2\pi}{\omega_1} = \cos 2n\pi = 1$, και η μετατόπιση γίνεται $y(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi x}{L} = y(x,0)$ και η χορδή επιστρέφει στην αρχική της μορφή.

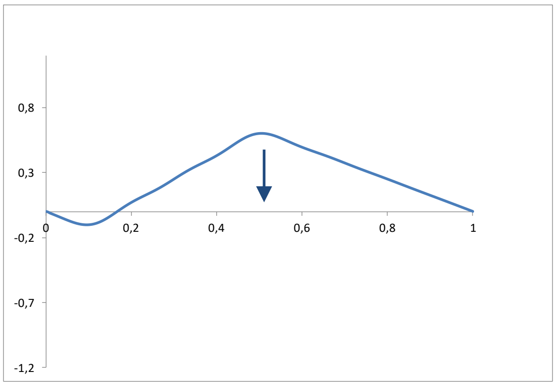
Άσκηση: Να βρείτε τη μορφή της χορδής για *κ=2* τη χρονική στιγμή $\tau' = \pi/\omega_1$.

Απάντηση: $y(x,\tau') = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} = -\,y(x,0)$.

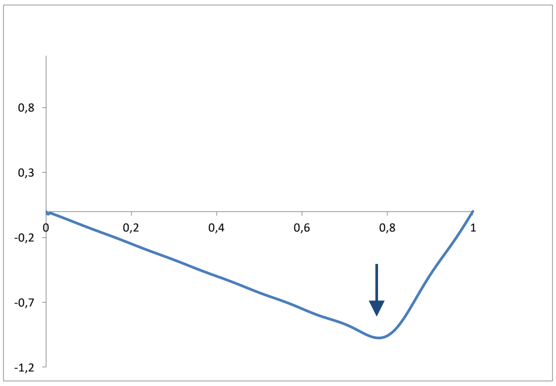
Στιγμιότυπα χορδής που εκκινεί με αρχική μετατόπιση στη θέση *L/5 (κ=5)* για διαφορετικά *t*



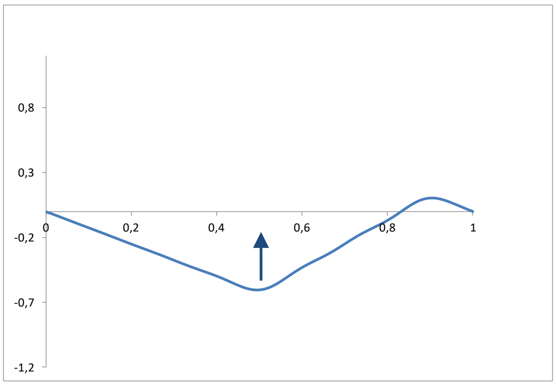
t=0



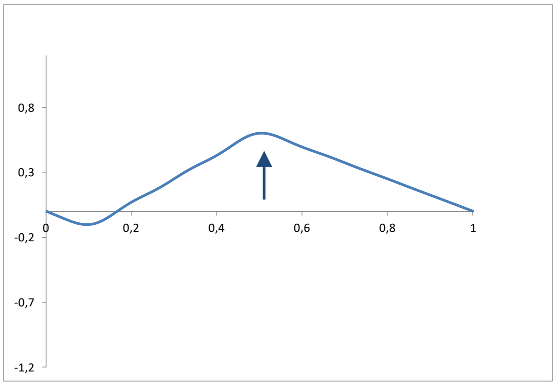
t=3



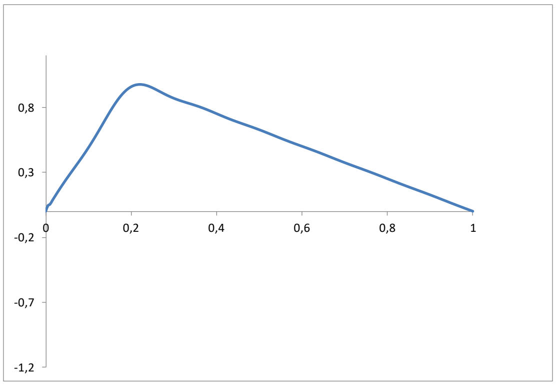
t=10



t=13



t=17



t=20

Δείτε το αρχείο EXCEL «Χορδή 4 Fourier με στιγμιότυπα» στο e-class
Στο φύλλο «Συντελεστές» δοκιμάστε διαφορετικές τιμές του κ και παρατηρείστε την αρχική μετατόπιση της χορδής, όπως προκύπτει από άθροιση των πρώτων 14 όρων.

Παρατηρείστε στο διάγραμμα «φάσμα» τα πλάτη των αρμονικών και ποιες μηδενίζονται κάθε φορά

Στο φύλλο «Στιγμιότυπα» παρατηρείστε τη χρονική εξέλιξη της ταλάντωσης της χορδής πατώντας "ctrl+g" αφού πρώτα ενεργοποιήσετε τις μακροεντολές.