Προβλήματα Κεφαλαίου 5 στην 6η Έκδοση

Κεφάλαιο 4 στην 3η Έκδοση

Πρόβλημα 5.1. (4.1). Δείξτε ότι η $y = f_2(ct+x)$ αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης.

Απάντηση: Λύνεται όπως και το παράδειγμα στη σελίδα 161 του βιβλίου (σελίδα 120 στην 3η έκδοση).

Πρόβλημα 5.2. (4.2). Δείξτε ότι η κυματική μορφή, δηλαδή η $y = f_1(ct-x)$ δε μεταβάλλεται με το χρόνο όταν *c* είναι η κυματική ταχύτητα. Επαναλάβετε για $y = f_2(ct+x)$.

Λύση: Η κυματική ταχύτητα δίδεται από την: $c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow c\Delta t = \Delta x$. Σε μια επόμενη χρονική στιγμή

$t_1 = t + \Delta t$ το κύμα θα έχει τη μορφή:

$$y = f_1\big(c(t+\Delta t) - x\big) = f_1\big(ct + c\Delta t - x\big) = f_1\big(ct + \Delta x - x\big) = f_1\big(ct - (x - \Delta x)\big),$$

δηλαδή η μορφή του κύματος είναι εκείνη που αυτό είχε τη χρονική στιγμή *t* στη θέση *x-Δx*. Άρα η κυματική μορφή δε μεταβάλλεται, απλά μετακινείται στο χώρο.

Ομοίως αποδεικνύεται και για $y = f_2(ct+x)$.

Πρόβλημα 5.3. (4.3). Δείξτε ότι για ένα κύμα που οδεύει προς τα αριστερά, ισχύει $\frac{\partial y}{\partial t} = +c\frac{\partial y}{\partial x}$

Απάντηση: Λύνεται όπως και το παράδειγμα στη σελίδα 164 του βιβλίου (σελίδα 123 στην 3η έκδοση).

Παράδειγμα: Σχέσεις ταχύτητας ομάδας-ταχύτητας φάσης.

Ορισμοί: Ταχύτητα φάσης: $u = \omega / k$. Ταχύτητα ομάδας: $u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(uk)}{dk} = u + k\frac{du}{dk}$.

Σχέση ως προς λ: $u_g = u + k\frac{du}{dk} = u + k\frac{du}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}$, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2}$, επομένως:

$u_g = u - \left(\cancel{\frac{2\pi}{k}}^{\lambda}\right)\frac{du}{d\lambda} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$. Εφαρμογή στην περίπτωση διηλεκτρικής συνάρτησης διηλεκτρικού:

$$\boxed{n = \varepsilon_r^{1/2} = \frac{c}{u}} \Rightarrow u = \frac{c}{\varepsilon_r^{1/2}}, \quad \frac{du}{d\varepsilon_r} = -\frac{c}{2\varepsilon_r^{3/2}} = -\frac{1}{2\varepsilon_r}\cancel{\frac{c}{\varepsilon_r^{1/2}}}^{u} = -\frac{u}{2\varepsilon_r} .$$

Οπότε: $u_g = u - \lambda\frac{du}{d\lambda} = u - \lambda\frac{du}{d\varepsilon_r}\frac{d\varepsilon_r}{d\lambda} = u - \lambda\left(-\frac{u}{2\varepsilon_r}\right)\frac{d\varepsilon_r}{d\lambda} \Rightarrow u_g = u\left(1 + \frac{\lambda}{2\varepsilon_r}\frac{d\varepsilon_r}{d\lambda}\right).$

Παράδειγμα: Διάδοση της κυματοομάδας σε μη διασπαρτικό μέσο και σε μέσο με διασπορά.

Η κυματοομάδα του θεωρήματος εύρους ζώνης έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 5.14, (4.14) στη θέση *x=0*.

Τη χρονική στιγμή *t=0* στη θέση *x=0*, η επαλληλία των κυμάτων με συνολική μετατόπιση:

$$y = a\cos(\omega t - kx) + a\cos\big((\omega+\delta\omega)t - (k+\delta k)x\big) + a\cos\big((\omega+2\delta\omega)t - (k+2\delta k)x\big) +$$
$$.... + a\cos\big((\omega+(n-1)\delta\omega)t - (k+(n-1)\delta k)x\big), \leftarrow n \text{ όροι}$$

γίνεται: $y(0,0) = a\cos 0 + a\cos 0 + ... + a\cos 0 = na$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Σε επόμενη χρονική στιγμή t_1, στη θέση *x=0* δεν ισχύει πλέον ότι *y=na*. Αν το μέσο είναι μη διασπαρτικό: $\omega = ck,\ \delta\omega = c\delta k$. Επομένως, στη θέση $x_1=ct_1$ τα ορίσματα των συνημιτόνων γίνονται (για $0 < m < n-1$):

$(\omega + m\delta\omega)t_1 - (k + m\delta k)x_1 \xrightarrow{\omega=ck,\ \delta\omega=c\delta k,\ x_1=ct_1} ckt_1 + mc\delta kt_1 - kct_1 - m\delta kct_1 = 0$ και παίρνουμε πάλι *y=na*. Αποδείξαμε λοιπόν ότι η κυματοομάδα «ταξιδεύει» αναλλοίωτη σε μη διασπαρτικό μέσο.

Όταν όμως έχουμε μέσο με (κανονική) διασπορά, $\omega = u(\omega)k,\ \delta\omega = u_g(\omega)\delta k,\ u \neq u_g$, οπότε η παραπάνω συνθήκη μηδενισμού ισχύει για διαφορετική θέση x_1 ανάλογα με τη συχνότητα της κάθε συνιστώσας. Η μετατόπιση της ομάδας δε γίνεται ποτέ ξανά *y=na* και η ομάδα φαίνεται να «απλώνει» δηλαδή να «διασπείρεται» με την πάροδο του χρόνου.

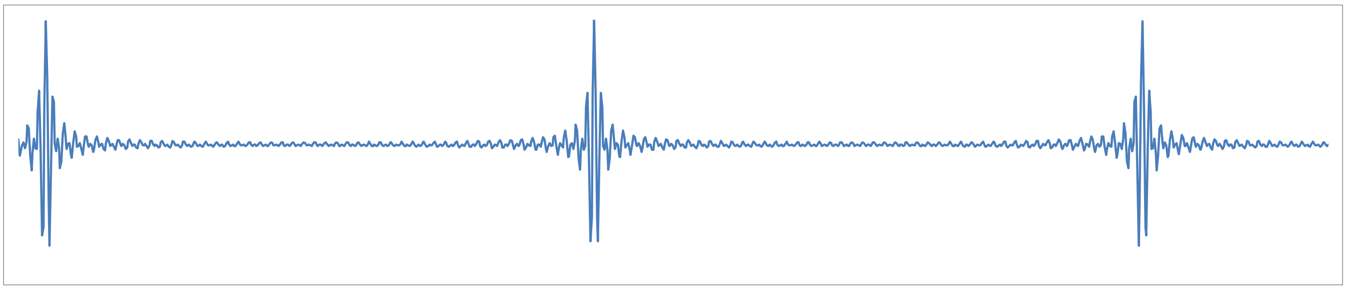
Παράδειγμα: Περίοδος επανάληψης κυματοομάδας. Το πλάτος της ομάδας του προηγούμενου παραδείγματος στη θέση *x=0*, δίνεται από τη σχέση:

$R = a\dfrac{\sin\left(\frac{n\delta\omega}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega}{2}t\right)}$. Τη χρονική στιγμή *t=0* η παράσταση γίνεται απροσδιόριστη και με τον κανόνα

L'Hospital: $R(t=0) = a\dfrac{\sin'\left(\frac{n\delta\omega}{2}t\right)}{\sin'\left(\frac{\delta\omega}{2}t\right)} = a\dfrac{\frac{n\delta\omega}{2}\cos(0)}{\frac{\delta\omega}{2}\cos(0)} = na$. Η ίδια συνθήκη εξασφαλίζεται και τη χρονική στιγμή $T = \dfrac{2\pi}{\delta\omega}$ καθώς και τότε: $\sin\left(\dfrac{n\delta\omega}{2}\dfrac{2\pi}{\delta\omega}\right) = \sin(n\pi) = 0,\ \sin\left(\dfrac{n\delta\omega}{2}\dfrac{2\pi}{\delta\omega}\right) = \sin(\pi) = 0$ και με άρση της απροσδιοριστίας προκύπτει ότι $R=\pm na$. Το «±» εδώ δε μας ενοχλεί γιατί ενδιαφερόμαστε για την «περιβάλλουσα». Έτσι καταλήγουμε σε δύο σημαντικά συμπεράσματα:

1. Η περίοδος επανάληψης κυματοομάδας σε μη διασπαρτικό μέσο είναι $T = \dfrac{2\pi}{\delta\omega}$.

2. Όσο μικρότερο είναι το $\delta\omega$ (δηλαδή η διαφορά μεταξύ των διαδοχικών συχνοτήτων) τόσο μεγαλύτερος ο χρόνος *T*. **Για μεμονωμένο παλμό ($T\to\infty$) απαιτείται συνεχής κατανομή συχνοτήτων ($\delta\omega\to 0$).** Παρακάτω φαίνεται μια κυματοομάδα που επαναλαμβάνεται:



Δείτε το αρχείο EXCEL «Κυματοομάδα NEO» στο e-class όπου αναπαριστά τη χρονική εξέλιξη κυματοομάδας που αποτελείται από 50 συνιστώσες. Ο υπολογισμός γίνεται με άθροιση των μετατοπίσεων κάθε χρονική στιγμή σε 1054 διαφορετικές θέσεις.

Στο φύλλο «προσομοίωση» δοκιμάστε τιμές [SI]: δω= 0,2 0,1 0,04 0,4 για διαφορετικό εύρος ομάδας. Επιβεβαιώστε ποιοτικά το θεώρημα εύρους ζώνης.

Επίσης δοκιμάστε δω=0,2 και δu=0,001 [SI] για διασπαρτικό μέσο.

Παρατηρείστε τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου με ctrl+g αφού ενεργοποιήσετε τις μακροεντολές.

Άσκηση εκτός βιβλίου: «Μήκος κύματος» ομάδας. Να αποδείξετε πως τη χρονική στιγμή *t=0* η κυματομορφή της ομάδας επαναλαμβάνεται στη θέση $\lambda = \dfrac{2\pi}{\delta k}$.

Υπόδειξη: Λύνεται με τα ίδια επιχειρήματα όπως το παράδειγμα με $R = a\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\delta k}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{\delta k}{2}x\right)}$.

Πρόβλημα 5.7 (4.7). Ένα κύμα διαδίδεται σε ελαστικό μέσο με μετατόπιση $y = a\sin(\omega t - kx)$. Να αποδείξετε ότι ο μέσος ρυθμός παραγωγής έργου W_{av} ισούται με το ρυθμό μεταφοράς ενέργειας P_{av} κατά μήκος της χορδής.

Λύση: Εφόσον έχουμε ημιτονοειδή μετατόπιση, η διεγείρουσα δύναμη θα είναι συνημιτονοειδής: $F = F_0\cos\omega t$. Από τη μιγαδική έκφραση για τη μετατόπιση $y = Ae^{i(\omega t - kx)} = \dfrac{F_0}{ikT}e^{i(\omega t - kx)}$ θα πάρουμε το πραγματικό μέρος $y = A\sin(\omega t - kx)$ και το πλάτος της μετατόπισης θα είναι: $A = \dfrac{F_0}{kT}$

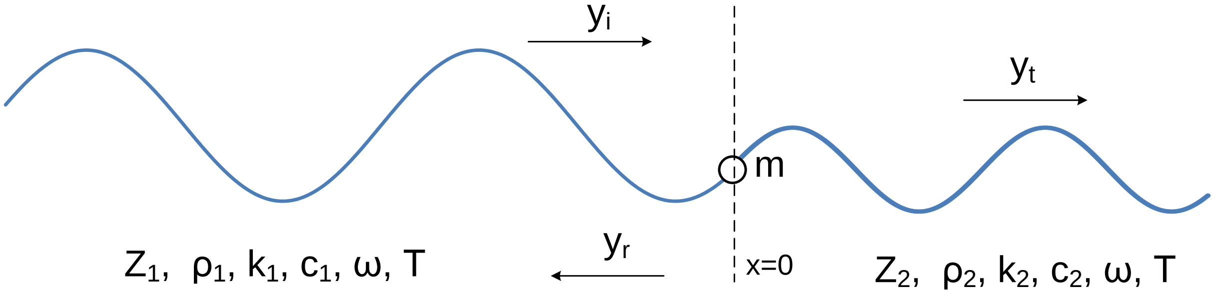
Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας κατά μήκος της χορδής είναι: $P_{av} = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 c$. Ξέρουμε ότι $A^2 = \dfrac{F_0^2}{k^2T^2} \xrightarrow{k=\frac{\omega}{c},\, T=\rho c^2} P_{av} = \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0^2}{\rho c} = \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0^2}{Z}$. Παρατηρούμε ότι προκύπτει σχέση παρόμοια με εκείνη στο τέλος της σελίδας 106 του βιβλίου (σχέση 2.70 στην 3η έκδοση) με *cosφ=0,* όπως στην περίπτωση συντονισμού εξαναγκασμένου ταλαντωτή.

Η σωματιδιακή ταχύτητα είναι: $\dot{y} = \omega A\cos(\omega t - kx) = \omega\dfrac{F_0}{kT}\cos(\omega t - kx) = \dfrac{F_0 c}{T}\cos(\omega t - kx)$

Το έργο που παράγεται από την διεγείρουσα δύναμη είναι: $W=\vec{F}\cdot\vec{V}=F_0\cos\omega t\cdot\frac{F_0c}{T}\cos(\omega t-kx)$. Στο σημείο επαφής ($x=0$) παίρνουμε: $W=\frac{F_0^2c}{T}\cos^2\omega t\xrightarrow{T=\rho c^2}W=\frac{F_0^2}{\rho c}\cos^2\omega t=\frac{F_0^2}{Z}\cos^2\omega t$. Για να βρούμε τη μέση τιμή του έργου, ολοκληρώνουμε σε μία περίοδο τ:

$W_{av}=\frac{1}{\tau}\frac{F_0^2}{\rho c}\int_0^{\tau}\cancel{\cos^2\omega t}^{\,\frac{\tau}{2}}\Rightarrow W_{av}=\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{\rho c}$. Βλέπουμε ότι $W_{av}=P_{av}$.

Παράδειγμα: Χορδή εμπέδησης Z_1 συνδέεται με άλλη χορδή εμπέδησης Z_2 στο σημείο $x=0$ μέσω μάζας m, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι δύο χορδές έχουν ημι-άπειρο μήκος και τείνονται με τάση T. Ένα εγκάρσιο κύμα συχνότητας ω που διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά ανακλάται και διέρχεται μερικώς όταν φτάνει στο $x=0$.

α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$.
β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z_1, Z_2, m, ω.
γ) **Προβλήματα 5.5 και 5.6 (4.5 και 4.6).** Στην περίπτωση $Z_1=Z_2=\rho c$ και με A_1, A_2, B_1 τα πλάτη του προσπίπτοντος, μεταδιδόμενου και ανακλώμενου κύματος αντίστοιχα, να εκφράσετε τα t_A, r_A συναρτήσει της μεταβλητής $q=\frac{\omega m}{2\rho c}$ και να βρεθούν οι διαφορές φάσης μεταξύ των πλατών, θέτοντας $\tan\theta=q$. Ποια η φυσική σημασία των q, θ; Να βρεθούν σχέσεις για τα t, r.
δ) Τι είδους φίλτρο αποτελεί το σύστημα του γ) ερωτήματος;

ΛΥΣΗ:
α) Οι εξισώσεις μετατόπισης για το προσπίπτον, ανακλώμενο και διερχόμενο κύμα είναι:

$$y_i=A_1e^{i(\omega t-k_1x)},\quad y_r=B_1e^{i(\omega t+k_1x)},\quad y_t=A_2e^{i(\omega t-k_2x)}\qquad(1)$$

Η οριακή συνθήκη για τη μετατόπιση είναι:

$$y_i(t,0)+y_r(t,0)=y_t(t,0)\Rightarrow A_1+B_1=A_2\ (2a)\qquad ή\ \ 1+r_A=t_A\ (2b)$$

Για τη δύναμη ισχύει:

$$-T\frac{\partial}{\partial x}(y_i+y_r)|_{x=0}\;=\;m\frac{\partial^2y_t}{\partial t^2}|_{x=0}-T\frac{\partial y_t}{\partial x}|_{x=0}\qquad(3)$$

Η φυσική σημασία της παραπάνω σχέσης είναι: Η εγκάρσια συνιστώσα της τάσης της χορδής *-1-* $-T\frac{\partial}{\partial x}(y_i+y_r)|_{x=0}$ ενεργεί ως διεγείρουσα δύναμη στη μάζα η οποία εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με δύναμη $F=m\frac{\partial^2y_t}{\partial t^2}|_{x=0}$ και θέτει σε ταλάντωση τη χορδή *-2-* με εγκάρσια συνιστώσα τάσης $-T\frac{\partial y_t}{\partial x}|_{x=0}$ μέσω της οποίας διαδίδεται το κύμα. Γεωμετρική ερμηνεία: Υπάρχει ασυνέχεια της εφαπτομένης στο $x=0$.

β) Αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις της (1) στην (3) και λύνοντας έχουμε:

$$ik_1TA_1 - ik_1TB_1 = ii\omega^2 mA_2 + ik_2TA_2$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma\ \ k_1 = \frac{\omega}{c_1}, T = \rho_1 c_1^2, Z_1 = \rho_1 c_1 \Rightarrow k_1T = \omega Z_1\ \kappa\alpha\iota\ k_2T = \omega Z_2\ \kappa\alpha\iota\ \ \ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu\omega:$$

$$Z_1A_1 - Z_1B_1 = Z_2A_2 + i[\omega m]A_2 = Z_2A_2 + iX_mA_2,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ X_m = \omega m,\ \ \eta\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\delta\rho\alpha\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma$$

Πολλαπλασιάζω την (2α) με Z_1 και προσθέτω στην παραπάνω: $t_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2 + iX_m}$ (4)

Από την εξίσωση (2b) ισχύει: $r_A = t_A - 1 \Rightarrow r_A = \frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2 - iX_m}{Z_1 + Z_2 + iX_m}$ (5)

Παρατηρείστε πως τώρα οι t_A και r_A είναι μιγαδικοί, άρα οι διαφορές φάσης δεν είναι πλέον 0 ή π.

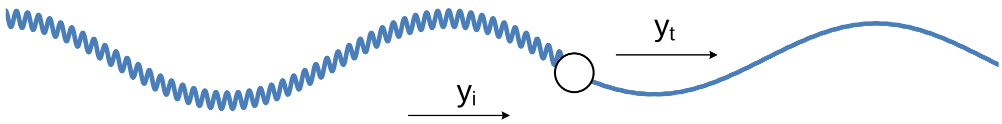
Για τους συντελεστές ενέργειας:

$$t = \frac{Z_2}{Z_1}t_At_A^* = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2 + X_m^2} \quad (6)$$

$$r = r_Ar_A^* = \frac{(Z_1-Z_2)^2 + X_m^2}{(Z_1+Z_2)^2 + X_m^2} \quad (7)$$

Προφανώς ισχύει: $t + r = 1$.

Επίσης παρατηρούμε ότι καθώς $X_m = \omega m$, η διαπερατότητα είναι: $t = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2 + \omega^2 m^2}$. Άρα όσο αυξάνεται η μάζα, τόσο μειώνεται η t και αυξάνεται η r. Επιπλέον, αποτελεί βαθυπερατό φίλτρο, αφού η διαπερατότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη του ω^2, με δράση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Όταν $m=0$, οι σχέσεις (4), (5), (6) και (7) δίνουν τις γνωστές σχέσεις ανακλαστικότητας-διαπερατότητας.

γ) Όταν $Z_1 = Z_2 = \rho c$:

$$t_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\rho c}{2\rho c + i\omega m} = \frac{1}{1 + iq}$$

$$r_A = \frac{B_1}{A_1} = \frac{-i\omega m}{2\rho c + i\omega m} = \frac{-iq}{1 + iq},\ \acute{o}\pi o\upsilon\ q = \frac{\omega m}{2\rho c}$$

Θέτω $\tan\theta = q = \frac{\omega m}{2\rho c}$ και έχω:

$$t_A=\frac{\vec{A}_2}{\vec{A}_1}=\frac{1}{1+i\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta\; e^{-i\theta}$$

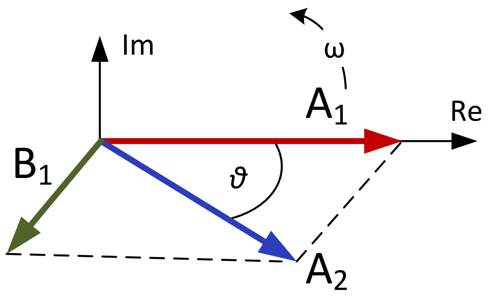
$$r_A=\frac{\vec{B}_1}{\vec{A}_1}=\frac{-iq}{1+iq}=\frac{-i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}=-i\sin\theta\; e^{-i\theta}=\sin\theta\; e^{-i(\pi/2+\theta)}$$

Τα πλάτη $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{B}_1$ είναι μιγαδικά

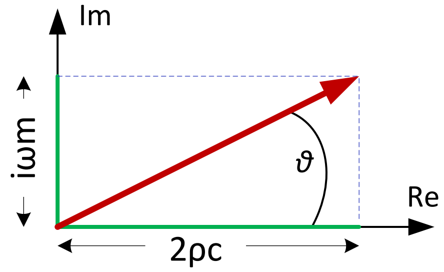
Επομένως το A_2 καθυστερεί του A_1 κατά θ και το B_1 καθυστερεί του A_1 κατά $\pi/2+\theta$.
Παρατηρούμε ότι εδώ τα πλάτη προστίθενται διανυσματικά ως φάσορες:

$\vec{A}_1+\vec{B}_1=\vec{A}_2,\ \vec{A}_2=\vec{A}_1\cos\theta e^{-i\theta},\ \vec{B}_1=\vec{A}_1\sin\theta e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$. Για τα μέτρα των φασόρων ισχύει:

$A_2=A_1\cos\theta,\ B_1=A_1\sin\theta$, και παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:



Η φυσική σημασία των q και θ: Το q εκφράζει το λόγο της αντίδρασης $i\omega m$ προς τη συνολική εμπέδηση της χορδής $2\rho c$ (που είναι πραγματικός αριθμός). Επειδή τα δύο είναι κάθετα στο μιγαδικό επίπεδο, το q μπορεί να θεωρηθεί και ως η εφαπτομένη της γωνίας θ μεταξύ τους:



Η ανακλαστικότητα- διαπερατότητα ως προς την ενέργεια δίνεται από:

$$r=r_A r_A^*=\cos\theta e^{-i\theta}\cos\theta e^{+i\theta}=\cos^2\theta$$

$$t=\frac{Z}{Z}t_A t_A^*=\sin\theta\; e^{-i(\pi/2+\theta)}\sin\theta\; e^{+i(\pi/2+\theta)}=\sin^2\theta$$

Προφανώς, $t+r=1$

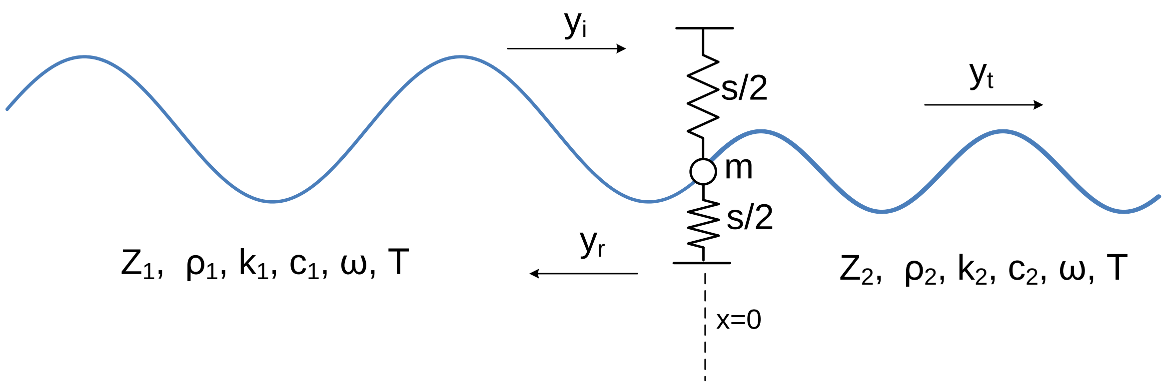
δ) Από το συντελεστή διάδοσης ενέργειας, εξίσωση (6) προκύπτει όταν $Z_1=Z_2=\rho c$:

$t=\dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2+X_m^2}=\dfrac{1}{1+(\frac{\omega m}{2\rho c})^2}$. Επομένως όταν $\omega\to 0$, $ο\, παρονομαστής \to 1\; και\; η\;\; t\to 1$

Ενώ όταν $\omega\to\infty$, $ο\, παρονομαστής\to\infty\;\; και\; η\;\; t\to 0$

Άρα πρόκειται για φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (βαθυπερατό).

Παράδειγμα: Χορδή εμπέδησης Z_1 συνδέεται με άλλη χορδή εμπέδησης Z_2 στο σημείο $x=0$ μέσω μάζας m, η οποία συγκρατείται από δύο ίδια ελατήρια σκληρότητας $s/2$ το καθένα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι δύο χορδές έχουν ημι-άπειρο μήκος και τείνονται με τάση T. Ένα εγκάρσιο κύμα συχνότητας ω που διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά ανακλάται και διέρχεται μερικώς όταν φτάνει στο $x=0$.

α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$.
β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z_1, Z_2, m, s, ω.
γ) Να δείξετε ότι όταν $m=0$, $Z_1=Z_2=\rho c$ και A_1, A_2, B_1 τα πλάτη του προσπίπτοντος, μεταδιδόμενου και ανακλώμενου κύματος αντίστοιχα, το A_2 προηγείται του A_1 κατά φ και το B_2 προηγείται του A_1 κατά $\pi/2+\varphi$, όπου: $\tan\varphi = \dfrac{s}{2\rho c\omega}$.
δ) Τι είδους φίλτρο αποτελεί το σύστημα του γ) ερωτήματος;

ΛΥΣΗ:
α) Οι εξισώσεις μετατόπισης για το προσπίπτον, ανακλώμενο και διερχόμενο κύμα είναι:

$$y_i = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)}, \quad y_r = B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}, \quad y_t = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \qquad (1)$$

Η οριακή συνθήκη για τη μετατόπιση είναι:

$$y_i(t,0) + y_r(t,0) = y_t(t,0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 \; (2a) \qquad ή \;\; 1 + r_A = t_A \; (2b)$$

Για τη δύναμη ισχύει:

$$-T\frac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r)|_{x=0} \;=\; m\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}|_{x=0} + 2(\frac{s}{2})y_t|_{x=0} - T\frac{\partial y_t}{\partial x}|_{x=0} \qquad (3)$$

Η φυσική σημασία της παραπάνω σχέσης είναι: Η εγκάρσια συνιστώσα της τάσης της χορδής -*1*- $-T\frac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r)|_{x=0}$ ενεργεί ως διεγείρουσα δύναμη στη μάζα η οποία εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση $F = m\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}|_{x=0} + 2(\frac{s}{2})y_t|_{x=0}$ και θέτει σε ταλάντωση τη χορδή -*2*- με εγκάρσια συνιστώσα τάσης $-T\frac{\partial y_t}{\partial x}|_{x=0}$ μέσω της οποίας διαδίδεται το κύμα.

β) Αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις της (1) στην (3) και λύνοντας έχουμε:

$$ik_1TA_1 - ik_1TB_1 = ii\omega^2 mA_2 + sA_2 + ik_2TA_2$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma\ \ k_1 = \frac{\omega}{c_1},\ T = \rho_1 c_1^2,\ Z_1 = \rho_1 c_1 \Rightarrow k_1T = \omega Z_1\ \ \kappa\alpha\iota\ k_2T = \omega Z_2\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu\omega:$$

$$Z_1A_1 - Z_1B_1 = Z_2A_2 + i\left[\omega m - \frac{s}{\omega}\right]A_2 = Z_2A_2 + iX_mA_2,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ X_m = \omega m - \frac{s}{\omega},\ \ \eta\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\delta\rho\alpha\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma$$

Πολλαπλασιάζω την (2α) με Z_1 και προσθέτω στην παραπάνω: $t_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2 + iX_m}$ (4)

Από την εξίσωση (2b) ισχύει: $r_A = t_A - 1 \Rightarrow r_A = \frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2 - iX_m}{Z_1 + Z_2 + iX_m}$ (5)

Για τους συντελεστές ενέργειας:

$$t = \frac{Z_2}{Z_1} t_A t_A^* = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 + X_m^2} \quad (6)$$

$$r = r_A r_A^* = \frac{(Z_1 - Z_2)^2 + X_m^2}{(Z_1 + Z_2)^2 + X_m^2} \quad (7)$$

γ) Όταν $m=0,\ Z_1=Z_2=\rho c$:

$$t_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\rho c}{2\rho c - i\, s/\omega} = \frac{1}{1 - iq}$$

$$r_A = \frac{B_1}{A_1} = \frac{i\, s/\omega}{2\rho c - i\, s/\omega} = \frac{iq}{1 - iq},\ \acute{o}\pi o\upsilon\ q = \frac{s}{2\rho c\omega}$$

Θέτω $\tan\varphi = q = \frac{s}{2\rho c\omega}$ και έχω:

$$t_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1 - i\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \cos\varphi\ e^{i\varphi}$$

$$r_A = \frac{B_1}{A_1} = \frac{iq}{1 - iq} = \frac{i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = i\sin\varphi\ e^{i\varphi} = \sin\varphi\ e^{i(\pi/2+\varphi)}$$

Επομένως το A_2 προηγείται του A_1 κατά φ και το B_2 προηγείται του A_1 κατά $\pi/2+\varphi$.

δ) Από το συντελεστή διάδοσης ενέργειας, εξίσωση (6) προκύπτει όταν $m=0,\ Z_1=Z_2=\rho c$:

$t = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 + X_m^2} = \frac{1}{1 + (\frac{s}{2\rho c\omega})^2}$. Επομένως όταν $\omega \to 0,\ o\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma \to \infty\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \ t \to 0$

Ενώ όταν $\omega \to \infty,\ o\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma \to 1\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \ t \to 1$

Άρα πρόκειται για φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων (υψιπερατό).

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι η μετατόπιση του *n*-οστού τρόπου στάσιμων κυμάτων χορδής μήκους *l* δίδεται από τη σχέση: $y_n = \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

Λύση: Η σχέση 5.9 (4.78) που προκύπτει από τη συμβολή κυμάτων που οδεύουν σε διαφορετικές κατευθύνσεις επάνω στη χορδή είναι: $y = -2ai\, e^{i\omega t}\sin kx$ και από τις οριακές συνθήκες, προκύπτουν στάσιμα κύματα με συχνότητα $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{l}$ και κυματάριθμο $k_n = \dfrac{\omega_n}{c} = \dfrac{n\pi}{l}$.

Επομένως, ο *n*-οστός τρόπος έχει μετατόπιση: $y_n = -2ai\, e^{i\omega_n t}\sin k_n x = -2ai\left(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t\right)\sin k_n x$

Η έκφραση αυτή δεν είναι εύχρηστη, καθώς το πλάτος είναι μιγαδικός αριθμός.

Θέτουμε (αυθαίρετα) $-2ia = A_n - iB_n$ και προκύπτει: $(-2ia)(2ia) = 4a^2 = A_n^2 + B_n^2 \Rightarrow 2a = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$.

Αντικαθιστώντας στη μετατόπιση: $y_n = \left(A_n - iB_n\right)\left(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t\right)\sin k_n x$.

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος: $y_n = \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)\sin k_n x$. Η έκφραση αυτή δίνει αρχικές συνθήκες με αρχική μετατόπιση για $A_n \neq 0, B_n = 0$ και με αρχική ταχύτητα για $A_n = 0, B_n \neq 0$.

Η συνολική μετατόπιση βρίσκεται με άθροιση όλων των αρμονικών (τρόπων ταλάντωσης):

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\ , \text{ αν } k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{l}.$$

Η ταχύτητα δίνεται από:

$$\dot{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\omega_n A_n \sin\omega_n t + \omega_n B_n \cos\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Οι εκφράσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση Fourier για την εύρεση των A_n, B_n.

Πρόβλημα 5.12 (4.12). Να αποδειχτεί η σχέση για την ενέργεια του *n*-οστού τρόπου στάσιμων κυμάτων χορδής μήκους *l*, ξεκινώντας από την μηχανική ενέργεια ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής με μήκος *dx*.

Λύση: Το στοιχειώδες τμήμα έχει μάζα *dm* και μηχανική ενέργεια: $dE_n = \dfrac{1}{2}dm\,\omega_n^2\left(y_n\right)_{\max}^2$ όπου $\left(y_n\right)_{\max}$ το πλάτος της μετατόπισης: $\left(A_n - iB_n\right)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ και $\left(y_n\right)_{\max}^2 = \left(A_n^2 + B_n^2\right)\sin^2\dfrac{n\pi x}{l}$. Εδώ ο όρος ημιτόνου στο πλάτος εκφράζει το γεγονός ότι ανάλογα με τη θέση του *dm* στη χορδή, θα έχουμε δεσμούς, κοιλίες ή τιμές μεταξύ αυτών.

Η μάζα είναι $dm = \rho dx$ και αντικαθιστώντας τα παραπάνω παίρνουμε:

$dE_n = \dfrac{1}{2}\rho dx\,\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)\sin^2\dfrac{n\pi x}{l}$. Με ολοκλήρωση σε όλο το μήκος της χορδής:

$$E_n = \int_0^l dE_n = \frac{1}{2}\rho\,\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Είναι γνωστό ότι: $\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{l}{2}\delta_{n,m}, \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1(n=m) \\ 0(n\neq m) \end{cases}$. Εδώ $n=m$ επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται $l/2$ και η ενέργεια: $E_n = \frac{1}{4}\rho l\,\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right) \xrightarrow{\rho l=m} E_n = \frac{1}{4}m\omega_n^2\left(A_n^2+B_n^2\right)$.

Πρόβλημα 5.11 (4.11). Δείξτε ότι η έκφραση $y_n = \left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)\sin k_n x$ της μετατόπισης του n-οστού τρόπου στάσιμων κυμάτων χορδής μήκους l ικανοποιεί τη χρονικά ανεξάρτητη μορφή της κυματικής εξίσωσης $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k^2 y = 0$.

Απάντηση: Λύνεται με εκτέλεση των πράξεων.

Παράδειγμα: Κύματα σε περιοδικές δομές, απόδειξη σχέσης διασποράς, ταχύτητα ομάδας, ταχύτητα φάσης, οριακές περιπτώσεις (περιλαμβάνει το πρόβλημα 5.15 ή 4.15 του βιβλίου).

Απάντηση: Πρώτα βρίσκουμε τις σχέσεις των μετατοπίσεων, θεωρώντας πως όλες έχουν το ίδιο πλάτος A_r, αφού πρόκειται για οδεύον κύμα:

$$y_r = A_r e^{i(\omega t - kra)}$$
$$y_{r+1} = A_r e^{i(\omega t - k(r+1)a)} = A_r e^{i(\omega t - kra)}e^{-ika} = y_r e^{-ika}$$
$$y_{r-1} = A_r e^{i(\omega t - k(r-1)a)} = A_r e^{i(\omega t - kra)}e^{+ika} = y_r e^{+ika}$$

Αντικαθιστούμε στη Δ. Ε. και παίρνουμε τη σχέση διασποράς $\omega(k)$:

$$m\ddot{y}_r = \frac{T}{a}\left(y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r\right) \Rightarrow -\omega^2 m\,\cancel{y_r} = \frac{T}{a}\left(e^{-ika} + e^{+ika} - 2\right)\cancel{y_r}$$

Θέτω: $e^{-ika} + e^{+ika} - 2 = \left(e^{-\frac{ika}{2}}\right)^2 + \left(e^{+\frac{ika}{2}}\right)^2 - 2\cancel{e^{-\frac{ika}{2}}}\,\cancel{e^{+\frac{ika}{2}}} = \left(e^{+\frac{ika}{2}} - e^{-\frac{ika}{2}}\right)^2 = -4\sin^2\frac{ka}{2}$

$$\Rightarrow -\omega^2 m = -\frac{4T}{a}\sin^2\frac{ka}{2} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{4T}{ma}\sin^2\frac{ka}{2}}$$

Προκύπτει διασπαρτικό μέσο.

Εναλλακτική λύση (ευκολότερη):

$$m\ddot{y}_r = \frac{T}{a}\left(y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r\right) \Rightarrow -\omega^2 m\,\cancel{y_r} = \frac{T}{a}\left(\underbrace{e^{-ika} + e^{+ika}}_{2\cos ka} - 2\right)\cancel{y_r} \Rightarrow$$

$$\omega^2 = -\frac{2T}{ma}\left(\cos ka - 1\right) \xrightarrow{\cos ka = 1 - 2\sin^2\frac{ka}{2}} \boxed{\omega^2 = \frac{4T}{ma}\sin^2\frac{ka}{2}}$$

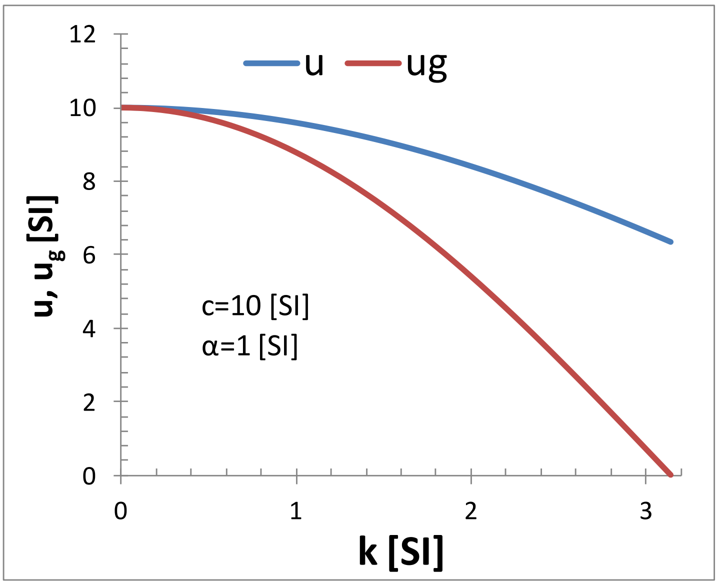
Ταχύτητες φάσης και ομάδας: $u = \frac{\omega}{k} = 2\sqrt{\frac{Ta^2}{ma}} \frac{\sin\frac{ka}{2}}{ka} \xrightarrow{m/a=\rho, c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}} c \frac{\sin\frac{ka}{2}}{\left(\frac{ka}{2}\right)}$.

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = 2\sqrt{\frac{T}{ma}} \frac{a}{2} \cos\frac{ka}{2} = c\cos\frac{ka}{2}$$

Προκύπτει κανονική διασπορά, καθώς:

Για k μικρό, $\sin\frac{ka}{2} \simeq \frac{ka}{2}$, $\cos\frac{ka}{2} \simeq 1$ και έχουμε: $u = u_g = c$ (μη διασπαρτικό μέσο για μικρά k).

Στην περίπτωση του μέγιστου κυματάριθμου, $k_{\max} = \frac{\pi}{a}$, $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{T}{ma}}$, $u = \frac{2}{\pi}c \simeq \frac{2}{3}c$, $u_g = c\cos\frac{\pi}{2} = 0$ άρα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα, η ταχύτητα ομάδας είναι μικρότερη της ταχύτητας φάσης, επομένως προκύπτει κανονική διασπορά. Είναι δυνατή η διάδοση κυμάτων με συχνότητα μικρότερη της συχνότητας αποκοπής, $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{T}{ma}}$, στην οποία διαδοχικές μάζες έχουν διαφορά φάσης π, καθώς $\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{k_{\max}} = 2a$.



.