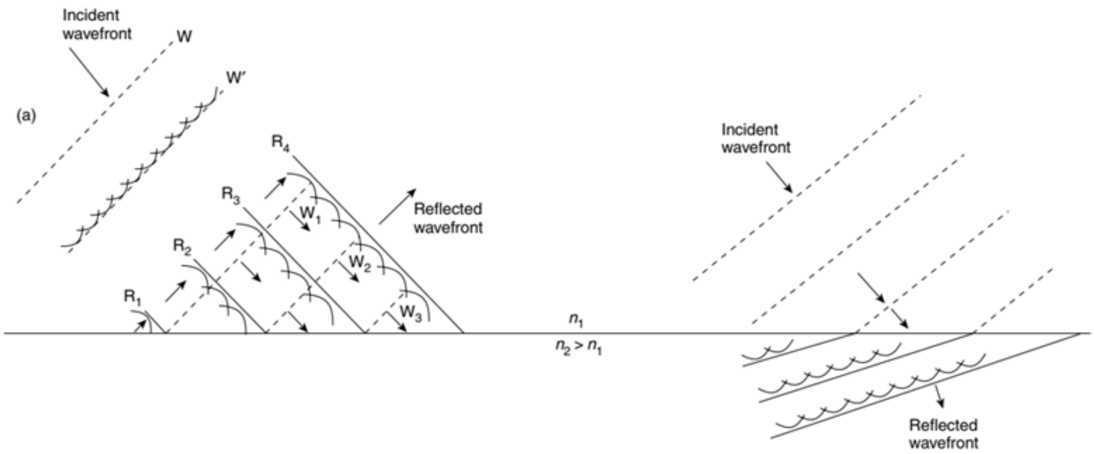
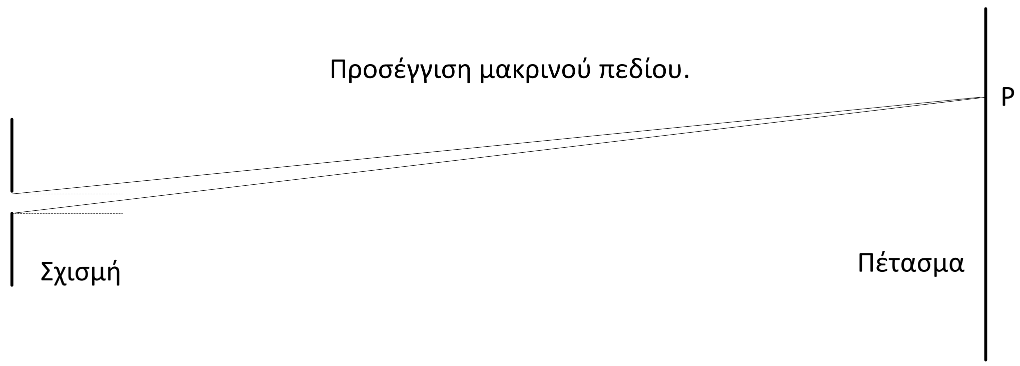
Κεφαλαίο 12 στην 6η Έκδοση

Κεφάλαιο 10 στην 3η Έκδοση

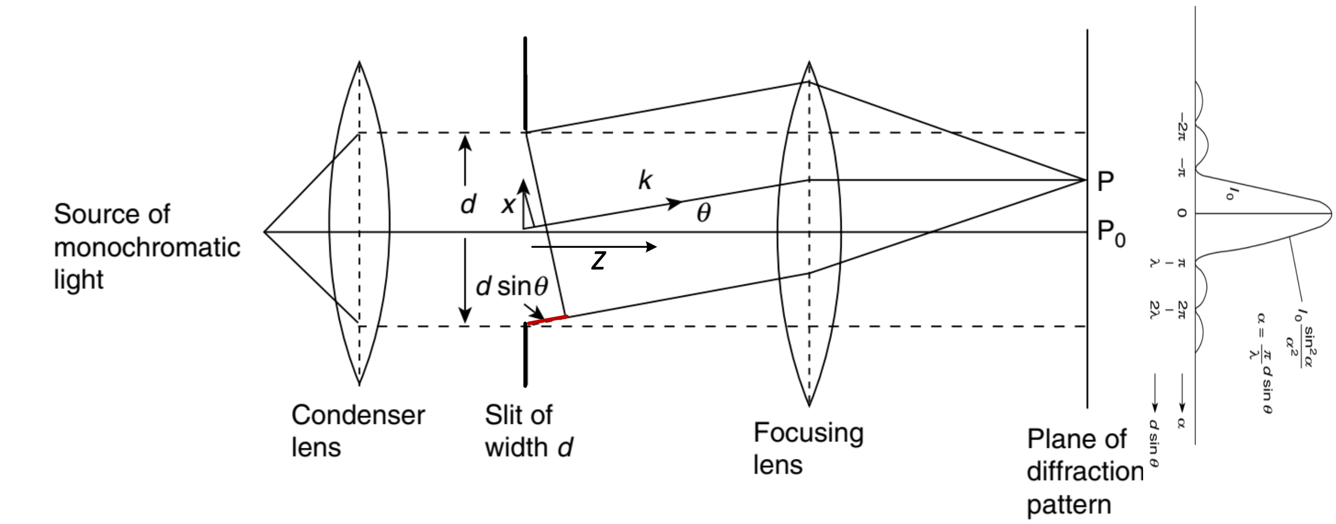
Η αρχή του Huygens. Η δημιουργία ενός επίπεδου μετώπου κύματος μπορεί να εξηγηθεί θεωρώντας κάθε σημείο του μετώπου ως δευτερογενή πηγή σφαιρικών (ή κυκλικών σε δύο διαστάσεις) κυμάτων. Οι πηγές συμβάλλουν με αποτέλεσμα να δημιουργείται επίπεδο μέτωπο, τόσο κατά την ανάκλαση όσο και κατά τη διάθλαση του επίπεδου κύματος όταν αυτό προσπίπτει σε επιφάνεια με διαφορετικό δείκτη διάθλασης (πρόβλημα που λύθηκε στο κεφάλαιο σχετικά με τα 2D-3D κύματα). Η εξέλιξη της διάδοσης του κύματος με χρήση της αρχής του Huygens φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Εδώ θα τη χρησιμοποιήσουμε στην περίπτωση της περίθλασης.



Περίθλαση από λεπτή σχισμή. Ένα διδιάστατο επίπεδο μονοχρωματικό κύμα, προσπίπτει σε αδιαφανή οθόνη η οποία έχει μια σχισμή με εύρος d συγκρίσιμο του μήκους λ του κύματος. Η ακτινοβολία που διέρχεται από τη σχισμή συγκεντρώνεται με κατάλληλο φακό σε πέτασμα αρκετά μήκη κύματος πίσω από τη σχισμή.



Πρακτικά, στην περίπτωση του «μακρινού πεδίου», όπου η απόσταση ανάμεσα στη σχισμή και το πέτασμα είναι πολύ μεγάλη, όπως φαίνεται στο σχήμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ακτίνες που καταλήγουν στο πέτασμα (πχ στη θέση P του σχήματος) αποτελούν κατά προσέγγιση παράλληλη δέσμη, με τις γωνίες που σχηματίζονται να είναι περίπου ίσες. Έτσι, παρατηρούμε φαινόμενα περίθλασης στο πέτασμα, χωρίς τη χρήση συγκεντρωτικού φακού, με κάπως θολή εικόνα. Η διάταξη με χρήση φακού, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Εξετάζουμε την ένταση της ακτινοβολίας σε διάφορες γωνίες *θ*, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θέτουμε την αρχή των αξόνων στο *d/2* όπως φαίνεται στο σχήμα, με τον άξονα *–x-* κατά μήκος της σχισμής, τον *–z-* κάθετο στη σχισμή, με κατεύθυνση από τη σχισμή προς το πέτασμα και τον *–y-* κάθετο στο επίπεδο, *-xz-*, να περιλαμβάνει τη μετατόπιση του κύματος. Σύμφωνα με την αρχή του Huygens, κάθε σημείο της σχισμής αποτελεί δευτερογενή πηγή που εκπέμπει ομοιόμορφα σε κύκλο (*φ=2π*). Για τα κύματα που εκπέμπονται από τη σχισμή, ορίζουμε πλάτος ανά μονάδα μήκους *h*, έτσι ώστε το συνολικό πλάτος της σχισμής να είναι $A_0=hd$.

Κάθε στοιχειώδες τμήμα *dx* της σχισμής συνεισφέρει στο συνολικό πλάτος (ανά *rad*) κατά $\frac{hdx}{2\pi}$. Η εξίσωση του κύματος είναι: $dy=\frac{hdx}{2\pi}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}=\frac{hdx}{2\pi}e^{i(\omega t-k_x x-k_z z)}$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, όλα τα σημεία της σχισμής ισαπέχουν από το πέτασμα, άρα ο όρος $k_z z$ είναι ίδιος για όλα, ενώ υπάρχει διαφορά δρόμου στην *–x-* κατεύθυνση. Σε τυχαία θέση *x*, η διαφορά δρόμου θα είναι *δl=xsinθ* (με μέγιστη τιμή *dsinθ* από το ένα στο άλλο άκρο της σχισμής). Η διαφορά φάσης θα είναι $\delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta l=\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta$. Αυτή η διαφορά εκφράζεται από τον κυματάριθμο $k_x=k\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta$, επομένως $k_x x=\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta=\delta\varphi$.

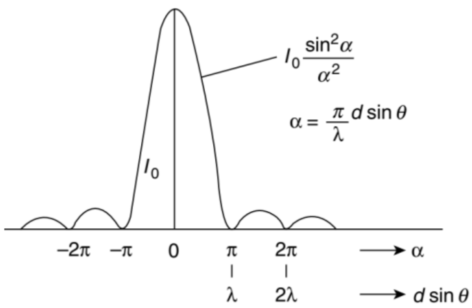
Το συνολικό κύμα θα προέλθει από τη συνεισφορά όλων των στοιχειωδών κυμάτων:

$$y=\frac{h}{2\pi}e^{i(\omega t-k_z z)}\int_{-d/2}^{+d/2}e^{-ik_x x}dx\xrightarrow{u=-ik_x x}y=\frac{h}{2\pi}e^{i(\omega t-k_z z)}\frac{1}{-ik_x}\int_{+ik_x d/2}^{-ik_x d/2}e^{u}du\Rightarrow$$

$$y=\frac{h}{2\pi}e^{i(\omega t-k_z z)}\frac{1}{-ik_x}\underbrace{\left(e^{-ik_x\frac{d}{2}}-e^{+ik_x\frac{d}{2}}\right)}_{-2i\sin(k_x\frac{d}{2})}\Rightarrow y=\frac{h}{2\pi}\frac{\sin\left(k_x\frac{d}{2}\right)}{\left(k_x\frac{d}{2}\right)}e^{i(\omega t-k_z z)}\xrightarrow{k_x=\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta}$$

$$y=\underbrace{\frac{h}{2\pi}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}_{A(\theta)}e^{i(\omega t-k_z z)},\ \alpha=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

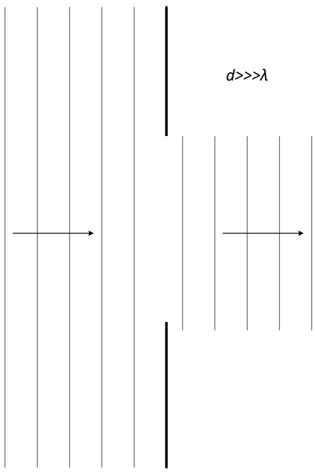
Η συνολική μετατόπιση έχει πλάτος *A(θ)* που είναι «διαμορφωμένο» ως προς τη γωνία *θ* με τον όρο $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και με μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης σχισμής, δείτε τη «Συνάρτηση σχισμής» στη σελίδα 371 του βιβλίου (ενότητα 9.9, σελίδα 304). Στο πέτασμα παρατηρούμε την ένταση *I* που είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους, επομένως θα πάρουμε: $I(\theta)=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2},\ \alpha=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$. Η εικόνα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνει ένα κύριο μέγιστο για *θ=0* και σειρά από δευτερεύοντα μέγιστα. Στις θέσεις μηδενικής έντασης, οι στοιχειώδεις πηγές συμβάλουν καταστροφικά.

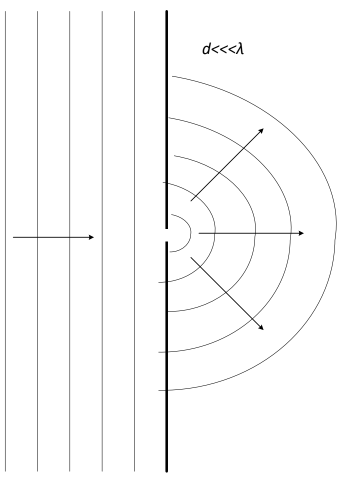


α	$\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$	$\frac{I_0\sin^2\alpha}{\alpha^2}$
0	1	I_0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4}{9\pi^2}$	$\frac{I_0}{22.2}$
$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{4}{25\pi^2}$	$\frac{I_0}{61.7}$
$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{4}{49\pi^2}$	$\frac{I_0}{121}$

Τα μέγιστα μπορούν να βρεθούν από $\frac{dI}{da}=0\Rightarrow\frac{d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)}{da}\Rightarrow\boxed{\alpha=\tan\alpha}$ Η εικόνα και οι τιμές των μεγίστων φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Είναι προφανές, ότι τα δευτερεύοντα μέγιστα έχουν πολύ μικρότερη ένταση από την I_0 και παρατηρείται ραγδαία μείωση της έντασης με αυξανόμενο *α*.

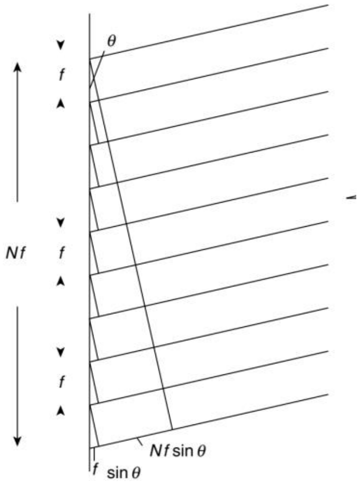
Τέλος θα εξετάσουμε δύο οριακές περιπτώσεις: Εάν <u>*d>>>λ*</u>, δηλαδή οι διαστάσεις της σχισμής είναι πολύ μεγαλύτερες του μήκους κύματος, το $\alpha=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$ παίρνει μεγάλες τιμές για όλες τις τιμές *θ* εκτός από *θ→0*. Αυτό σημαίνει πως η ένταση *I(θ)* θα είναι αμελητέα εκτός από την κατεύθυνση *θ=0*, δηλαδή έχουμε ευθύγραμμη διάδοση επίπεδου κύματος μέσα από τη σχισμή, χωρίς να παρατηρούμε φαινόμενα περίθλασης. Αντίθετα, όταν <u>*d<<<λ*</u>, δηλαδή οι διαστάσεις της σχισμής είναι πολύ μικρότερες του μήκους κύματος, το *α* παίρνει μικρές τιμές για όλες τις τιμές *θ*. Αυτό σημαίνει πως η ένταση *I(θ)* θα είναι σταθερή περίπου ίση με I_0 σε κάθε κατεύθυνση, δηλαδή η σχισμή λειτουργεί ως σημειακή πηγή που εκπέμπει κύμα με κυκλικό μέτωπο.





Η μορφή των κυμάτων στις δύο οριακές περιπτώσεις φαίνεται στα παραπάνω σχήματα.

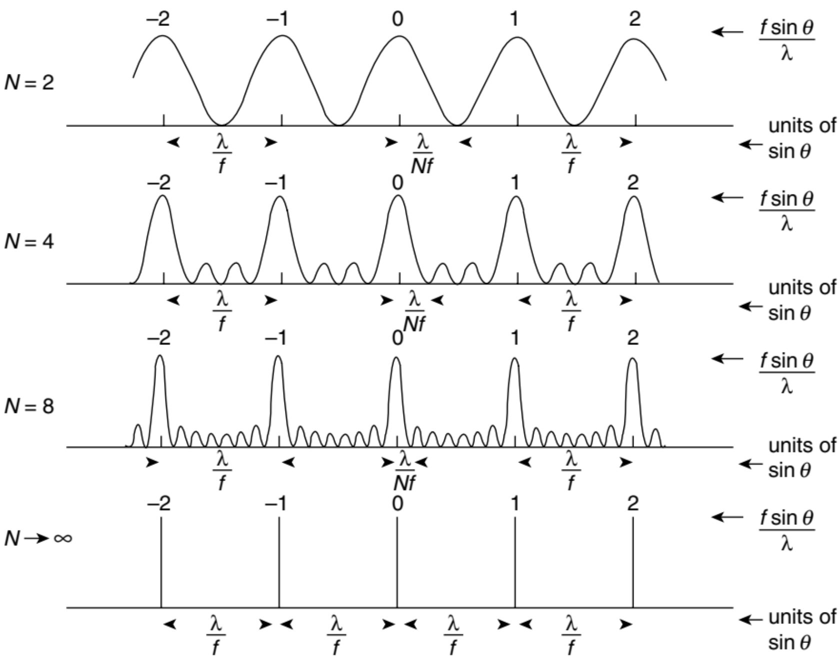
Συμβολή από γραμμική διάταξη N πανομοιότυπων σημειακών πηγών. Η διάταξη αυτή, όπως φαίνεται στο σχήμα, αποτελείται από ένα φράγμα με οπές εύρους $d<<<\lambda$, σε αποστάσεις f μεταξύ τους. Οι σημειακές πηγές εκπέμπουν ακτινοβολία ίσης έντασης προς όλες τις κατευθύνσεις και συμβάλουν σε πέτασμα σε μεγάλη απόσταση πίσω από το φράγμα. Για πλάγια εκπομπή, υπό γωνία θ, η διαφορά δρόμου μεταξύ διαδοχικών πηγών είναι $l=f\sin\theta$ και εισάγει διαφορά φάσης $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}l=\frac{2\pi}{\lambda}f\sin\theta$. Το πρόβλημα έχει ήδη λυθεί ως σύνθεση N ταλαντώσεων με ίσο πλάτος a και σταθερή διαφορά φάσης δ μεταξύ διαδοχικών ταλαντωτών, στις σελίδες 49-52 του βιβλίου (σελίδα 24), με πλάτος R που δίνεται στη σελίδα 51 του βιβλίου (εξίσωση 1.86):



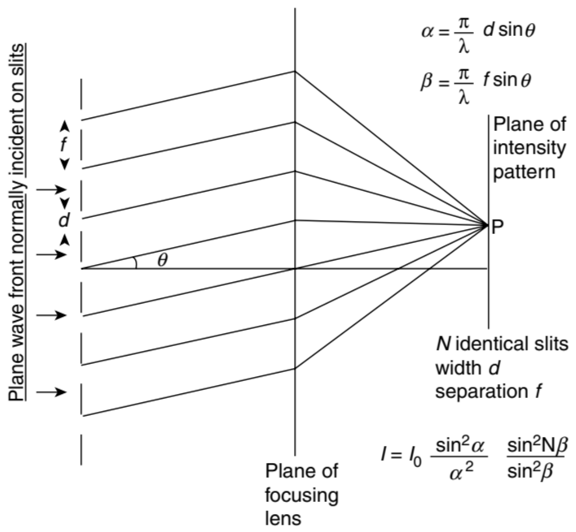
$R=a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$. Η ένταση που παρατηρούμε στο πέτασμα είναι:

$$I\sim R^2=I_0\frac{\sin^2\left(N\frac{\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}=I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\pi f}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi f}{\lambda}\sin\theta\right)}=I_0\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta},\ \beta=\frac{\pi f}{\lambda}\sin\theta.$$

Η σχέση αυτή δίνει αλληλουχία μεγίστων και ελαχίστων που ονομάζονται «κροσσοί συμβολής», ανάλογα με το αν οι πηγές συμβάλουν ενισχυτικά ή καταστροφικά. Η παρουσία περισσότερων των δύο πηγών ($N>2$) έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση (N-2) δευτερευόντων μεγίστων και (N-1) σημείων μηδενισμού, ανάμεσα σε δύο κυρίως μέγιστα όπως φαίνεται στο σχήμα. **Η «τάξη» *n* των κροσσών** συμβολής δίνεται από τη συνθήκη μεγιστοποίησης: $f\sin\theta=n\lambda$ ή $n=\frac{f}{\lambda}\sin\theta$, όπου n ακέραιος (1,2,3,…).

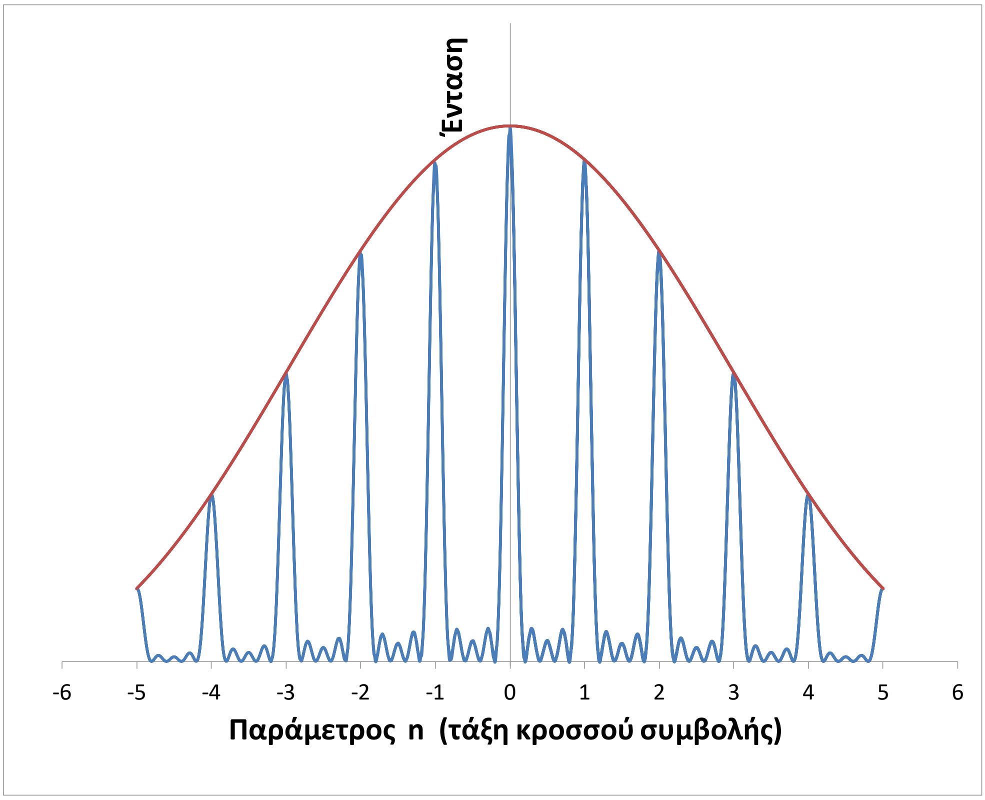


Συμβολή από γραμμική διάταξη N πανομοιότυπων πηγών με εύρος d. Η διάταξη αυτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αποτελείται από ένα φράγμα με οπές εύρους $d \approx \lambda$, σε αποστάσεις f μεταξύ τους. Οι πηγές δεν είναι πλέον σημειακές, επομένως κάθε μία εκπέμπει ακτινοβολία διαφορετικής έντασης σε κάθε κατεύθυνση, καθώς συμβαίνει το φαινόμενο της περίθλασης. Η ακτινοβολία από τις πηγές φτάνει σε πέτασμα σε μεγάλη απόσταση πίσω από το φράγμα. Η ένταση που παρατηρούμε στο πέτασμα θα έχει τον όρο $\dfrac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}, \beta = \dfrac{\pi f}{\lambda}\sin\theta$ λόγω συμβολής, με πλάτος όχι πλέον I_0, αλλά «διαμορφωμένο» ως προς τη γωνία θ λόγω περίθλασης: $I_0\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}, \alpha = \dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$.



Επομένως η ένταση θα δίνεται από τη σχέση: $I(\theta) = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}}_{\text{Περίθλαση}} \underbrace{\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}}_{\text{Συμβολή}}, \ \alpha = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta, \ \beta = \frac{\pi f}{\lambda}\sin\theta$.

Η σχέση αυτή δίνει συνδυασμό συμβολής και περίθλασης. Ουσιαστικά, επαναλαμβάνεται η εικόνα των κροσσών συμβολής, με μια περιβάλλουσα που μειώνει το πλάτος σύμφωνα με τον όρο $\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$ από την περίθλαση.

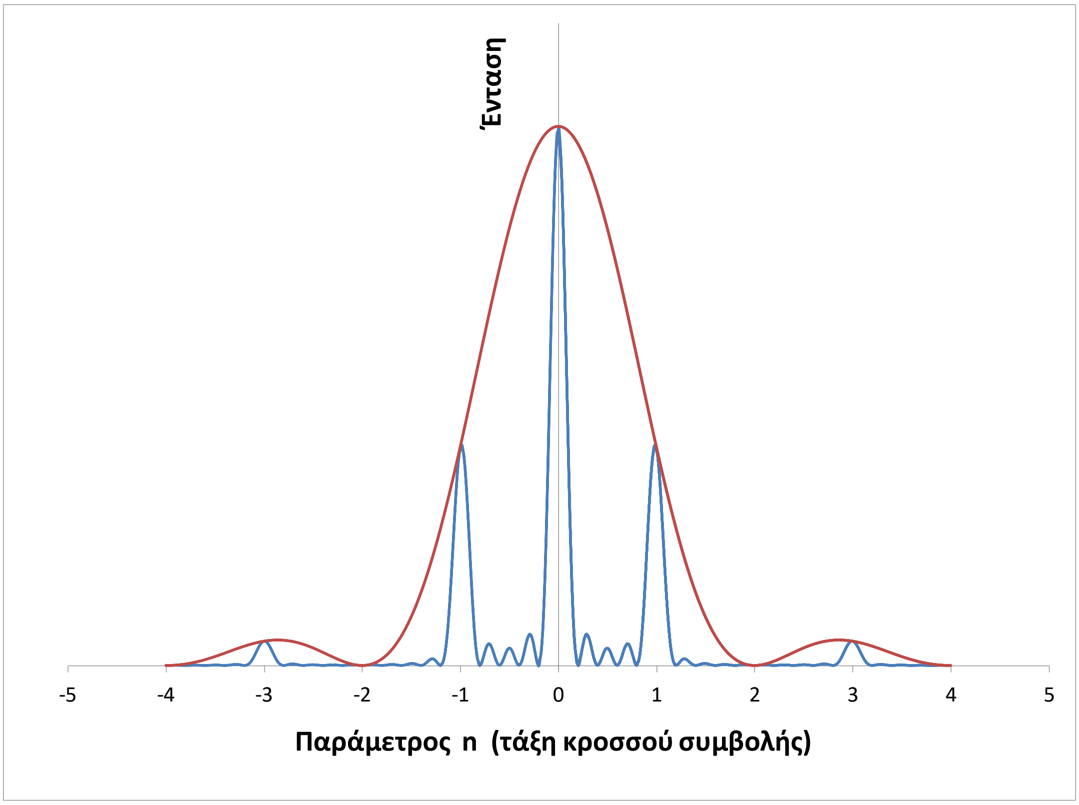


Εικόνα συμβολής από πηγές με $N=5$, $\lambda=1$ [SI], $d=0,7$ [SI], $f=5$ [SI].

Η «τάξη» n κάθε κροσσού συμβολής δίνεται από τη συνθήκη μεγιστοποίησης: $f\sin\theta = n\lambda$ ή $n = \frac{f}{\lambda}\sin\theta$, όπου n ακέραιος (1,2,3,…). Αντίστοιχα, οι μηδενισμοί της περίθλασης δίνονται από τη συνθήκη: $d\sin\theta = m\lambda$ ή $m = \frac{d}{\lambda}\sin\theta$, όπου m ακέραιος (1,2,3,…).

<u>Ελλείπουσα τάξη κροσσού.</u> Όταν το μέγιστο της συμβολής και το ελάχιστο της περίθλασης συμπίπτουν, τότε ο κροσσός (και τα πολλαπλάσιά του) εξαφανίζεται.

Μέγιστο συμβολής: $f\sin\theta = n\lambda$, ελάχιστο περίθλασης: $d\sin\theta = m\lambda$. Επομένως: $\frac{n\lambda}{m\lambda} = \frac{f\sin\theta}{d\sin\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{n}{m} = \frac{f}{d}}$ Όταν ο λόγος *f/d* είναι ακέραιος, πχ, *f/d=2*, εξαφανίζεται ό $2^{ος}$ κροσσός και τα πολλαπλάσιά του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα συμβολής από πηγές με *N=5, λ=1 [SI], d=1 [SI], f=2 [SI]. Ελλείπουσα τάξη n=2.*

Δείτε και το αρχείο excel «Φράγμα περίθλασης» στο e-class.

Δοκιμάστε διαφορετικές τιμές για τα N (=2, 5, 10), d (=0.05, 0.5, 2), f(=2, 3, 6 όταν d=2) και παρατηρείστε τη μορφή των κροσσών και τις ελλείπουσες τάξεις κροσσών που εμφανίζονται κάθε φορά.