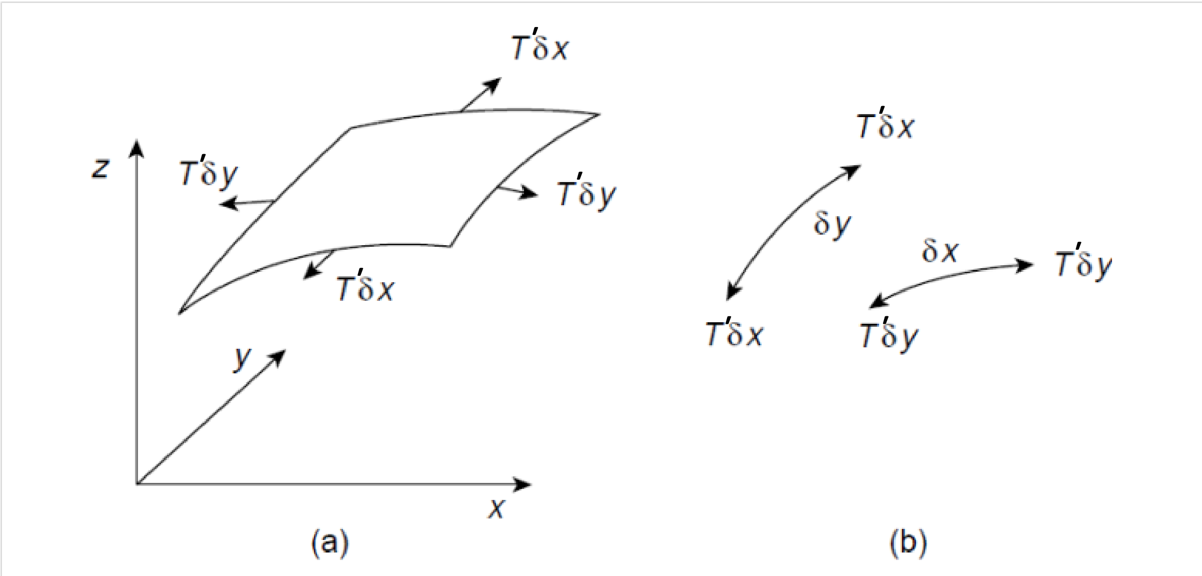
Προβλήματα Κεφαλαίου 9 στην 6η Έκδοση

Κεφάλαιο 8 στην 3η Έκδοση

Παράδειγμα: Η κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις.

Έστω μεμβράνη δύο διαστάσεων η οποία τείνεται με τάση *T* προς όλες τις κατευθύνσεις. Αν ένα στοιχειώδες τμήμα της μεμβράνης (με διαστάσεις *δx, δy*) έχει παραμορφωθεί και έχει μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας στην κατεύθυνση *–z-* με μετατόπιση *z(x,y,t),* για τη διατύπωση κατάλληλής διαφορικής εξίσωσης πρέπει να βρεθεί η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο στοιχειώδες τμήμα της μεμβράνης.



Στην μονοδιάστατη περίπτωση η Δ. Ε. μπορεί να γραφεί ως: $\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x$ όπου κάθε όρος έχει διαστάσεις δύναμης. Η δύναμη επαναφοράς είναι $T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x$.

Στην περίπτωση της μεμβράνης η γραμμική πυκνότητα *ρ* γίνεται επιφανειακή πυκνότητα $\rho' = \frac{\delta m}{\delta x\, \delta y}$ και η τάση *T* γίνεται δύναμη ανά μονάδα μήκους *T΄*, έτσι ώστε ο λόγος T'/ρ' να έχει διαστάσεις τετραγώνου ταχύτητας.

Στο τμήμα της μεμβράνης του παραπάνω σχήματος, η τάση αναλύεται σε δύο δυνάμεις, στους άξονες *x* και *y*: $T_x = T'\delta y,\ T_y = T'\delta x$ δηλαδή η δύναμη ανά μονάδα μήκους *T΄*, επί το μήκος κάθετα στο οποίο εφαρμόζεται, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Επομένως η συνολική δύναμη επαναφοράς (συγκρίνοντας με την 1D) είναι: $\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\delta x + T_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\delta y \Rightarrow \delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T'\delta y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\delta x + T'\delta x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\delta y$

$\Rightarrow \frac{\delta m}{T'\delta x \delta y}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \xrightarrow{\frac{\delta m}{\delta x \delta y}=\rho',\ \frac{T'}{\rho'}=c^2} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ή ισοδύναμα: $\boxed{\nabla^2 z = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}$.

Με παρόμοια επιχειρήματα, μπορεί να επεκταθεί και σε τρείς διαστάσεις: $\boxed{\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}}$ όπου φ οποιοδήποτε μονόμετρο μέγεθος.

Πρόβλημα 9.1. **(8.1).** Δείξτε ότι το $z = Ae^{i(\omega t-(k_1x+k_2y))}$ είναι λύση της $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, όπου $k^2=\omega^2/c^2=k_1^2+k_2^2$.

Απάντηση: Λύνεται με αντικατάσταση της z στη Δ.Ε.

Παράδειγμα: Επίλυση της 3D $\nabla^2\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών.

Η εξίσωση λύνεται αν δεχτούμε ως λύση συνάρτηση *Φ(x,y,z,t)* η οποία είναι γινόμενο τεσσάρων συναρτήσεων *X(x), Y(y), Z(z), T(t)*. Επομένως, *Φ=XYZT*.

Εφαρμόζουμε στη Δ. Ε.: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\Rightarrow YZT\frac{d^2X}{dx^2}+XZT\frac{d^2Y}{dy^2}+XYT\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{XYZ}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}$

Διαιρώ δια *Φ*: $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{Tc^2}\frac{d^2T}{dt^2}$. Για να ισχύει για κάθε θέση και κάθε χρονική στιγμή, πρέπει κάθε όρος στο δεξί και αριστερό μέρος να είναι σταθερός:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_1^2,\qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k_2^2,\qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k_3^2,\qquad \frac{1}{Tc^2}\frac{d^2T}{dt^2}=-k^2\qquad \text{με: } k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$$

Αυτές δίνουν τις γνωστές:

$$\underbrace{\frac{d^2X}{dx^2}+k_1^2X=0,\quad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_2^2Y=0,\quad \frac{d^2Z}{dz^2}+k_3^2Z=0,}_{\text{Χρονικά ανεξάρτητες κυματικές εξισώσεις}}\qquad \underbrace{\frac{d^2T}{dt^2}+k^2c^2T=0 \text{ με } \omega^2=k^2c^2}_{\text{Εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή}}$$

Οι λύσεις είναι: $X = Ae^{\pm ik_1x}$, $Y=e^{\pm ik_2y}$, $Z=e^{\pm ik_3z}$, $T=e^{i\omega t}$ και $\Phi = Ae^{\pm ik_1x}e^{\pm ik_2y}e^{\pm ik_3z}e^{i\omega t}$

Μια αποδεκτή λύση είναι η $Ae^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}=Ae^{i(\omega t-k_1x-k_2y-k_3z)}$ με $\omega=kc, k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$. Αυτή περιγράφει επίπεδο κύμα που διαδίδεται στην κατεύθυνση $\vec{r}$ με κυματάριθμο $\vec{k}$, συχνότητα *ω* σε μη διασπαρτικό μέσο με ταχύτητα φάσης *c*.

Επίσης αποδεκτή λύση είναι η $\Phi = A\sin\omega t\sin k_1x\sin k_2y\sin k_3z$ που περιγράφει στάσιμα κύματα.

Πρόβλημα 9.2 (8.2). Να αποδειχτεί η ισχύς της $z = 2A\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\omega t - k_1 x\right)$ στην περίπτωση κυματοδηγού δύο διαστάσεων που αποτελείται από μεμβράνη πλάτους b και απείρου μήκους με πακτωμένα άκρα.

Λύση: Η μετατόπιση μπορεί να περιγραφή ως επαλληλία δύο κυμάτων: $z = Ae^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)} - Ae^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y)}$. Τα πλάτη έχουν προέλθει από την 1^{η} οριακή συνθήκη $z(x,0,t)=0$.

Συνεπώς: $z = A(e^{-ik_2 y} - e^{+ik_2 y})e^{i(\omega t - k_1 x)} = -2iA\sin k_2 y\, e^{i(\omega t - k_1 x)} \xrightarrow{z(x,b,t)=0} z = -2iA\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{i(\omega t - k_1 x)}$

Η σχέση αυτή περιγράφει ένα κύμα οδεύον στην κατεύθυνση –*x*- με διαμορφωμένο πλάτος *A(y)*, το οποίο προκύπτει από τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων στην κατεύθυνση –*y*-.

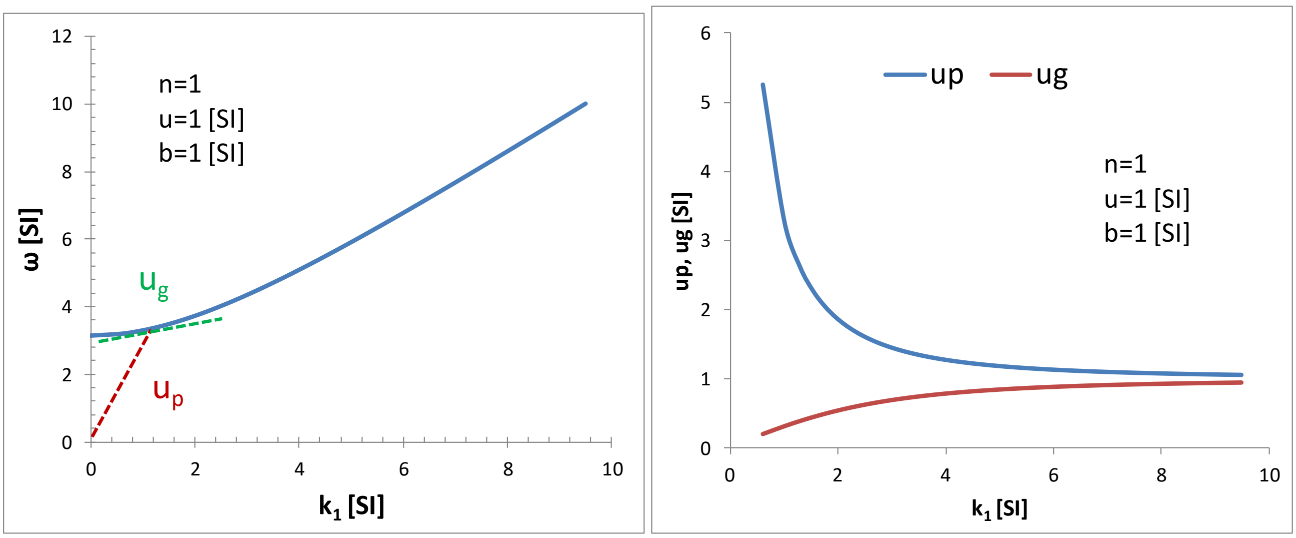
Παίρνοντας το πραγματικό μέρος:

$$z = -2iA\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\left[\cos(\omega t - k_1 x) + i\sin(\omega t - k_1 x)\right] \Rightarrow z_{\mathrm{Re}} = 2A\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin(\omega t - k_1 x).$$

Ενώ το φανταστικό μέρος δίνει: $z_{\mathrm{Im}} = -2A\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos(\omega t - k_1 x)$

Άσκηση εκτός βιβλίου: Ο 2D κυματοδηγός εμφανίζει διασπορά; Αν ναι, τι είδους;

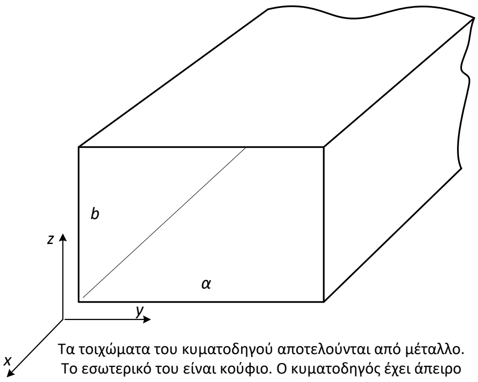
Απάντηση: Η εξίσωση διασποράς $\omega(k_1)$ είναι: $\omega = u\sqrt{k_1^2 + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$ που δεν είναι γραμμική, άρα είναι μέσο διασπαρτικό. Εφόσον $u_p = u\frac{k}{k_1} > u_g = u\frac{k_1}{k}$, η διασπορά είναι «κανονική» και επιτρέπεται η διάδοση κυμάτων για $\omega > \omega_{min}$. Παρακάτω φαίνεται η καμπύλη διασποράς και διάγραμμα των ταχυτήτων φάσης και ομάδας, για κυματοδηγό με *n=1, u=1 [SI], b=1 [SI]*.



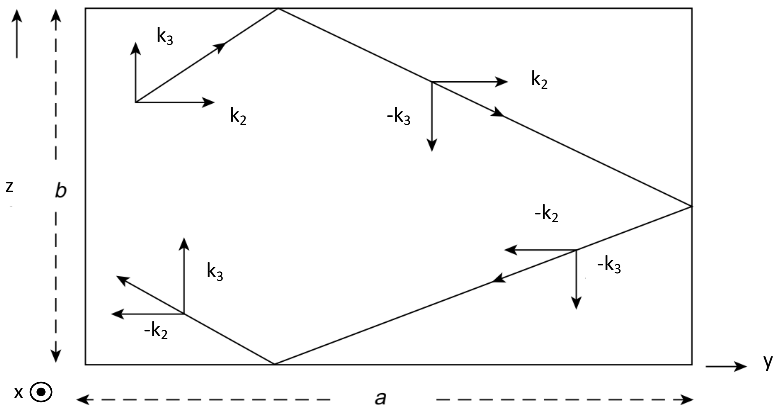
Στο παραπάνω διάγραμμα προσέξτε ότι η ω δεν ξεκινάει από το μηδέν (ελάχιστη συχνότητα αποκοπής) και ότι πάντα $u_p > u_g$. Επίσης για μεγάλα k_1 το μέσο τείνει να γίνει μη διασπαρτικό.

Προβλήματα 9.8, 9.9 και 9.10 (8.8, 8.9 και 8.10): Τρισδιάστατος κυματοδηγός με ορθογώνια διατομή. Εδώ έχουμε ένα μεταλλικό κουτί με ορθογώνια διατομή στο επίπεδο –*yz*- (πλάτους *a στον άξονα y*, ύψους *b στον άξονα z*) και απείρου μήκους στην κατεύθυνση –*x*-. Τα άκρα του κουτιού είναι γειωμένα, έτσι ώστε για τη –*x*- συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου να ισχύει: $E_x=0$. Αν $E_x = E_1 e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y - k_3 z)} + E_2 e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y + k_3 z)} + E_3 e^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y + k_3 z)} + E_4 e^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y - k_3 z)}$ η επαλληλία των κυμάτων που ανακλώνται στα τοιχώματα του κουτιού, να δείξετε ότι πρόκειται για οδεύον κύμα στη –*x*- και στάσιμο στο επίπεδο –*yz*-. Να βρείτε τις επιτρεπτές τιμές των k_2, k_3, την ελάχιστη συχνότητα αποκοπής, τις ταχύτητες φάσης και ομάδας και τη σχέση τους με την ταχύτητα διάδοσης των ΗΜ κυμάτων *c*.

Λύση: Η εικόνα της διάδοσης του κύματος στο επίπεδο –*yz*- φαίνεται στο σχήμα. Σε κάθε σημείο έχουμε την επαλληλία τεσσάρων κυμάτων, του αρχικού και τριών ανακλώμενων στις επιφάνειες του κουτιού: $E_x = \left[E_1 e^{i(-k_2 y - k_3 z)} + E_2 e^{i(-k_2 y + k_3 z)} + E_3 e^{i(+k_2 y + k_3 z)} + E_4 e^{i(+k_2 y - k_3 z)} \right] e^{i(\omega t - k_1 x)}$.



Τα τοιχώματα του κυματοδηγού αποτελούνται από μέταλλο. Το εσωτερικό του είναι κούφιο. Ο κυματοδηγός έχει άπειρο μήκος στη -*x*- διάσταση.



Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες *E(x,0,z,t)=0, E(x,y,0,t)=0*:

$$E_x = \left[E_1 e^{i(-k_2 y - k_3 z)} + E_2 e^{i(-k_2 y + k_3 z)} + E_3 e^{i(+k_2 y + k_3 z)} + E_4 e^{i(+k_2 y - k_3 z)} \right] e^{i(\omega t - k_1 x)}$$
$$E_x(x,0,z,t) = 0 \Rightarrow \left(E_1 + E_4\right) e^{i(-k_3 z)} + \left(E_2 + E_3\right) e^{i(k_3 z)} = 0$$
$$E_x(x,y,0,t) = 0 \Rightarrow \left(E_1 + E_2\right) e^{i(-k_2 y)} + \left(E_3 + E_4\right) e^{i(k_2 y)} = 0$$

Για να ισχύουν οι οριακές συνθήκες για κάθε *y*, *z* θα πρέπει τα αθροίσματα των πλατών στις παρενθέσεις να μηδενίζονται: $E_1 = -E_2$, $E_3 = -E_4$, $E_1 = -E_4$, $E_2 = -E_3 \Rightarrow E_1 = -E_2 = E_3 = -E_4$ που αντιστοιχούν στη συνθήκη πλήρους ανάκλασης με αντιστροφή φάσης.

Επομένως:

$$E_x = \left[E_1 e^{i(-k_2 y - k_3 z)} - E_1 e^{i(-k_2 y + k_3 z)} + E_1 e^{i(+k_2 y + k_3 z)} - E_1 e^{i(+k_2 y - k_3 z)} \right] e^{i(\omega t - k_1 x)} \Rightarrow$$
$$E_x = E_1 \left[e^{i(-k_2 y - k_3 z)} - e^{i(-k_2 y + k_3 z)} + e^{i(+k_2 y + k_3 z)} - e^{i(+k_2 y - k_3 z)} \right] e^{i(\omega t - k_1 x)} \Rightarrow$$
$$E_x = E_1 \left[e^{-ik_3 z} \underbrace{\left(e^{-ik_2 y} - e^{+ik_2 y} \right)}_{-2i\sin k_2 y} + e^{+ik_3 z} \underbrace{\left(-e^{-ik_2 y} + e^{+ik_2 y} \right)}_{2i\sin k_2 y} \right] e^{i(\omega t - k_1 x)} \Rightarrow$$
$$E_x = 2iE_1 \underbrace{\left[-e^{-ik_3 z} + e^{+ik_3 z} \right]}_{2i\sin k_3 z} \sin k_2 y \; e^{i(\omega t - k_1 x)} \Rightarrow E_x = -4E_1 \sin k_2 y \sin k_3 z \; e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες *E(x,a,z,t)=0, E(x,y,b,t)=0*:

$\sin k_2 a = 0 \Rightarrow k_2 = \dfrac{m\pi}{a}, \quad \sin k_3 b = 0 \Rightarrow k_3 = \dfrac{n\pi}{b}$ και τελικά παίρνουμε:

$E_x = -4E_1 \sin\left(\dfrac{m\pi}{a} y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b} z\right) e^{i(\omega t - k_1 x)}$ Παίρνοντας το πραγματικό μέρος:

$E_{x,\mathrm{Re}} = -4E_1 \sin\left(\dfrac{m\pi}{a} y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b} z\right)\cos(\omega t - k_1 x)$ που παριστά ένα οδεύον κύμα στην κατεύθυνση *–x-* και στάσιμα στο επίπεδο *–yz-* με επιτρεπτούς κυματάριθμους $k_2 = \dfrac{m\pi}{a}$ $k_3 = \dfrac{n\pi}{b}$ και $k^2 = k_1^2 + \pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)$ Η ελάχιστη συχνότητα προκύπτει από την απαίτηση ο k_1 να είναι πραγματικός:

$$k^2 = k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \geq 0 \Rightarrow \omega \geq \pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Το οποίο δίνει: $\omega_{\min} = \pi c\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}$.

Ταχύτητα φάσης: $u_p = \dfrac{\omega}{k_1} = c\dfrac{k}{k_1} > c$ (!!)

Ταχύτητα ομάδας:

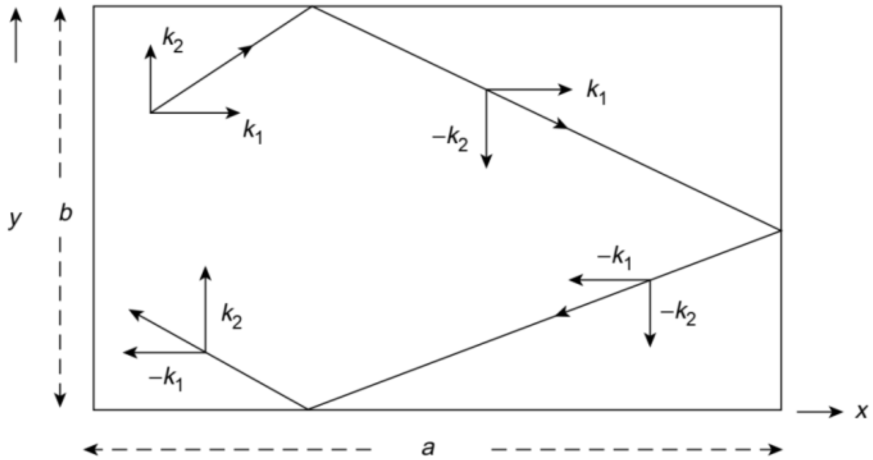
$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_1} \xrightarrow{\omega = c\sqrt{k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}} u_g = c\frac{\partial\sqrt{k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}}{\partial\left[k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right]}\frac{\partial\left[k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right]}{\partial k_1} \Rightarrow$$

$$u_g = c\frac{1}{2\sqrt{k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}}2k_1 \xrightarrow{k = \sqrt{k_1^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}} u_g = \frac{k_1}{k}c < c$$

Προφανώς ισχύει $u_p u_g = c^2$.

Πρόβλημα 9.11 (8.11): Να αποδειχτεί η σχέση για τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε μεμβράνη με ορθογώνιο σχήμα, πλάτους *a* και ύψους *b*΄, με πακτωμένα άκρα, θεωρώντας την επαλληλία κυμάτων έπειτα από πολλαπλές ανακλάσεις στα τοιχώματα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$z = 0 \quad \text{at} \quad y = 0 \quad \text{and} \quad y = b$$



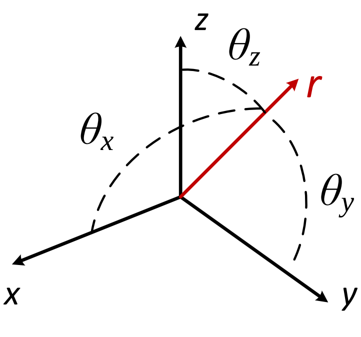
Απάντηση: Η μετατόπιση σε ένα σημείο της μεμβράνης, προσθέτοντας τα τέσσερα κύματα που προκύπτουν από τις ανακλάσεις είναι:

$$z(x,y,t) = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)} + A_2 e^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y)} + A_3 e^{i(\omega t + k_1 x + k_2 y)} + A_4 e^{i(\omega t + k_1 x - k_2 y)}$$

Λύνεται με τον ίδιο τρόπο όπως το προηγούμενο πρόβλημα (αλλάζοντας το *y* σε *x* και το *z* σε *y*) και με χρήση των οριακών συνθηκών, δίνει:

$$z_{\mathrm{Re}} = -4A_1 \sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right)\cos\omega t \text{ , όπου } k_1 = \frac{n_1\pi}{a}, k_1 = \frac{n_2\pi}{b}.$$

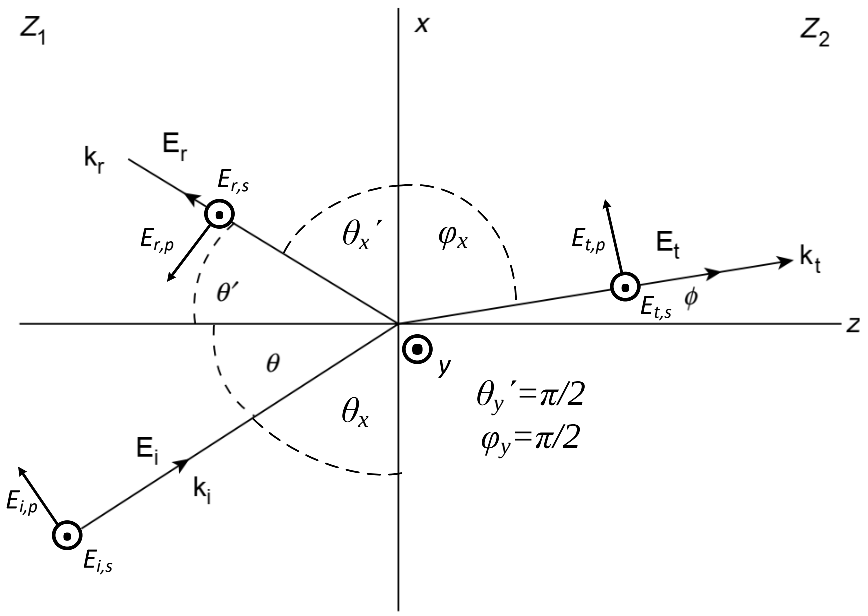
Παράδειγμα: Κατευθύνοντα συνημίτονα. Ένα διάνυσμα $\vec{r}$ μπορεί να παρασταθεί σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, χρησιμοποιώντας τις γωνίες $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ που αυτό σχηματίζει με τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε η προβολή του $\vec{r}$ σε κάθε άξονα εκφράζεται με τα «κατευθύνοντα» συνημίτονα:



$$\vec{r}:\begin{Bmatrix} r_x = r\cos\theta_x \\ r_y = r\cos\theta_y \\ k_z = k\cos\theta_z \end{Bmatrix} \text{ Ομοίως για τον κυματάριθμο: } \vec{k}:\begin{Bmatrix} k_x = k\cos\theta_x \\ k_y = k\cos\theta_y \\ k_z = k\cos\theta_z \end{Bmatrix}$$

Παράδειγμα: Επίπεδο ΗΜ κύμα που προσπίπτει υπό γωνία σε επίπεδη διεπιφάνεια η οποία χωρίζει δύο ημιάπειρα ελαστικά μέσα.

Η περίπτωση της κάθετης πρόσπτωσης, έχει ήδη μελετηθεί (ισοδύναμα) με τη μονοδιάστατη περίπτωση διάδοσης κυμάτων σε χορδή. Στην περίπτωση πλάγιας πρόσπτωσης υπό γωνία θ, όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να μελετήσουμε το πρόβλημα ξεχωριστά.



Το προσπίπτον κύμα βρίσκεται στο επίπεδο –*xz*- (επίπεδο διάδοσης). Η διεπιφάνεια βρίσκεται στο επίπεδο –*xy*-. Τα δύο ελαστικά μέσα με εμπεδήσεις Z_1 και Z_2 χωρίζονται από τη διεπιφάνεια στο $z=0$.

Εδώ θα πρέπει να ξεχωρίσουμε τις δύο πολώσεις του κύματος: Την ***s*** όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο διάδοσης και την ***p*** όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στο επίπεδο διάδοσης, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Σε κάθε πόλωση, το προσπίπτον, το ανακλώμενο και το διερχόμενο κύμα, εκφράζονται ως:

$E_i = A_i e^{i\left(\omega t - \vec{k}_i \vec{r}\right)}$, $E_r = A_r e^{i\left(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}\right)}$, $E_t = A_t e^{i\left(\omega t - \vec{k}_t \vec{r}\right)}$ όπου k_i, k_r, k_t οι αντίστοιχοι κυματάριθμοι, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Η οριακή συνθήκη στο $z=0$ είναι ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού (και του μαγνητικού) πεδίου που είναι παράλληλες στη διεπιφάνεια, (το επίπεδο –*xy*-) πρέπει να είναι συνεχείς.

Επομένως για την ***s*** πόλωση, θα ισχύει: $E_{s,i}(x,y,0,t) + E_{s,r}(x,y,0,t) = E_{s,t}(x,y,0,t)$, δηλαδή μια συνθήκη παρόμοια με εκείνη για τη μετατόπιση στο πρόβλημα της μονοδιάστατης χορδής. Για την ***p*** πόλωση, μόνο οι προβολές των *E* στον άξονα –*x*- θα πρέπει να είναι συνεχείς: $E_{p,i}(x,y,0,t)\cos\theta - E_{p,r}(x,y,0,t)\cos\theta' = E_{p,t}(x,y,0,t)\cos\varphi$.

Για κάθε πόλωση παίρνουμε δύο οριακές συνθήκες μία για το ηλεκτρικό και μία για το μαγνητικό πεδίο, οι οποίες οδηγούν σε σχέσεις για την ανακλώμενη και διαδιδόμενη (διαθλώμενη) ένταση.

Εδώ, όμως θα εξετάσουμε μόνο τους συντελεστές φάσης και όχι τα πλάτη.

Αναπτύσσοντας τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{k}\,\vec{r}$ και χρησιμοποιώντας τα κατευθύνοντα συνημίτονα:

$$\vec{k}_i:\begin{Bmatrix} k_{i,x}=k_i\cos\overbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}^{\theta_x}=k_i\sin\theta \\ k_{i,y}=k_i\cos\theta_y=0\ \ (\theta_y=\frac{\pi}{2}) \\ k_{i,z}=k_i\cos\theta \end{Bmatrix}\ \vec{k}_r:\begin{Bmatrix} k_{r,x}=k_r\cos\theta'_x \\ k_{r,y}=k_r\cos\theta'_y \\ k_{r,z}=k_r\cos\theta'_z \end{Bmatrix}\ \vec{k}_t:\begin{Bmatrix} k_{t,x}=k_t\cos\varphi_x \\ k_{t,y}=k_t\cos\varphi_y \\ k_{t,z}=k_t\cos\varphi_z \end{Bmatrix}$$ Επομένως θα πάρουμε:

$$\vec{k}_i\,\vec{r}=k_{i,x}x+k_{i,y}y+k_{i,z}z=k_ix\sin\theta\quad+\quad 0\quad+\quad k_iz\cos\theta$$
$$\vec{k}_r\,\vec{r}=k_{r,x}x+k_{r,y}y+k_{r,z}z=k_rx\cos\theta'_x+k_ry\cos\theta'_y+k_rz\cos\theta'_z$$
$$\vec{k}_t\,\vec{r}=k_{t,x}x+k_{t,y}y+k_{t,z}z=k_tx\cos\varphi_x+k_ty\cos\varphi_y+k_tz\cos\varphi_z$$

Το προσπίπτον κύμα έχει $\theta_y=\pi/2$ γιατί βρίσκεται στο επίπεδο –*xz*- (επίπεδο διάδοσης). Τα άλλα δύο, μπορούν καταρχήν να έχουν και συνιστώσα στην –*y*- κατεύθυνση.

Για να ισχύουν οι οριακές συνθήκες για κάθε *x,y,t* στο *z=0* θα πρέπει οι αντίστοιχες εκφράσεις για τη φάση να είναι ίσες:

$e^{i\left(\omega t-\vec{k}_i\vec{r}\right)}=e^{i\left(\omega t-\vec{k}_r\vec{r}\right)}=e^{i\left(\omega t-\vec{k}_t\vec{r}\right)}$ στο *z=0* , επομένως τα ορίσματα κάθε συντεταγμένης θα είναι ίσα:

$$k_{i,x}x=k_{r,x}x=k_{t,x}x\Rightarrow k_ix\sin\theta=k_rx\cos\theta'_x=k_tx\cos\varphi_x$$
$$k_{i,y}y=k_{r,y}y=k_{t,y}y\Rightarrow 0=k_ry\cos\theta'_y=k_ty\cos\varphi_y$$

Από τη 2η συνθήκη παίρνουμε ότι: $\cos\theta'_y=\cos\varphi_y=0\Rightarrow\theta'_y=\varphi_y=\frac{\pi}{2}$ Άρα, και ***τα τρία κύματα***, προσπίπτον, ανακλώμενο και διαθλώμενο***, βρίσκονται στο επίπεδο διάδοσης –xz***.

Από την 1η συνθήκη: $k_i\sin\theta=k_r\cos\theta'_x=k_r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)=k_r\sin\theta'$. Όμως $k_i=\frac{\omega}{c_1},k_r=\frac{\omega}{c_1}\Rightarrow k_i=k_r$

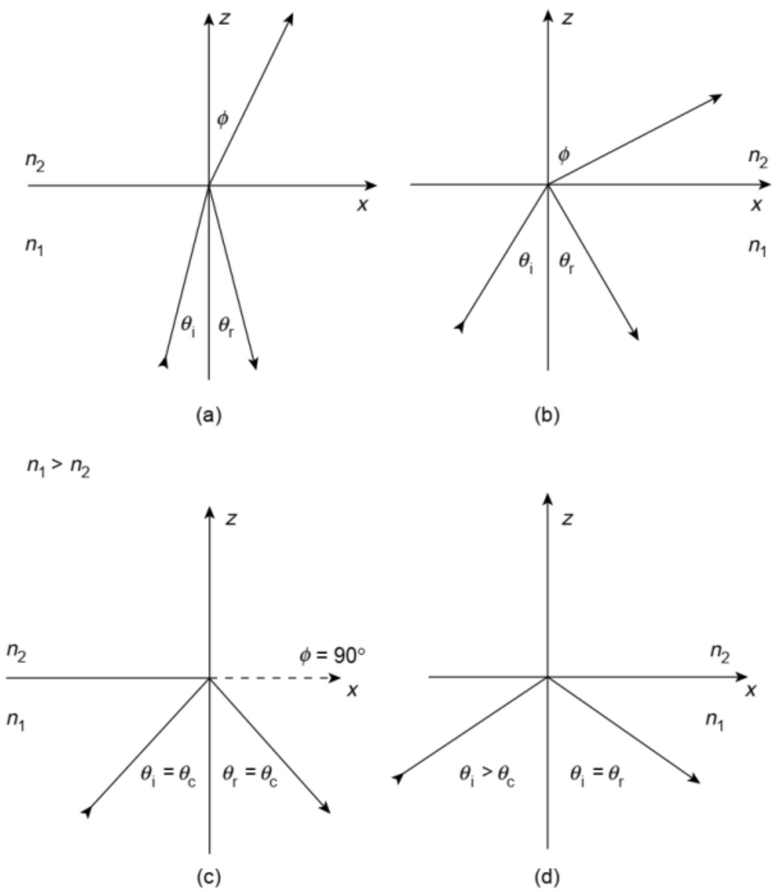
Έτσι, $\sin\theta=\sin\theta'\Rightarrow\boxed{\theta=\theta'}$ ***Γωνία ανάκλασης = γωνία πρόσπτωσης.***

Επίσης: $k_i\sin\theta=k_t\cos\varphi_x=k_t\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=k_t\sin\varphi$. Όμως $k_i=\frac{\omega}{c_1},\ k_t=\frac{\omega}{c_2}$, και η σχέση γίνεται:

$$k_i\sin\theta=k_t\sin\varphi\Rightarrow\frac{\cancel{\omega}}{c_1}\sin\theta=\frac{\cancel{\omega}}{c_2}\sin\varphi\Rightarrow\frac{c}{c_1}\sin\theta=\frac{c}{c_2}\sin\varphi\Rightarrow\boxed{n_1\sin\theta=n_2\sin\varphi}$$ ***Νόμος Snell***

Εδώ, *c* η ταχύτητα του φωτός στο κενό, *n₁, n₂* οι δείκτες διάθλασης των μέσων 1 και 2 αντίστοιχα.

Ολική ανάκλαση. Αν $n_1 > n_2 \Rightarrow \varphi > \theta$. Τότε για μία «οριακή» γωνία πρόσπτωσης $\theta_{o\rho}$, θα ισχύει $\varphi = \frac{\pi}{2}$ και επομένως το κύμα δεν εισέρχεται στο μέσο -*2*-. Για μεγαλύτερες γωνίες πρόσπτωσης έχουμε ολική ανάκλαση, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Η γωνία $\theta_{o\rho}$ δίνεται ως: $\sin\theta_{o\rho} = \frac{n_2}{n_1}$. Στην περίπτωση της ολικής ανάκλασης $\theta > \theta_{o\rho}$, η οριακή συνθήκη στο επίπεδο $z=0$ δεν ικανοποιείται, αν δεν υπάρχει διαθλώμενο κύμα, καθώς στο μέσον 1 υπάρχει κύμα που διαδίδεται στην –*x*- κατεύθυνση, ενώ στο μέσο 2 όχι. Επομένως, θα πρέπει να υφίσταται κύμα $E_t(x,0,z,t)$. Η έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο είναι $E_t = A_t e^{i(\omega t - xk_t \sin\varphi - zk_t \cos\varphi)}$.

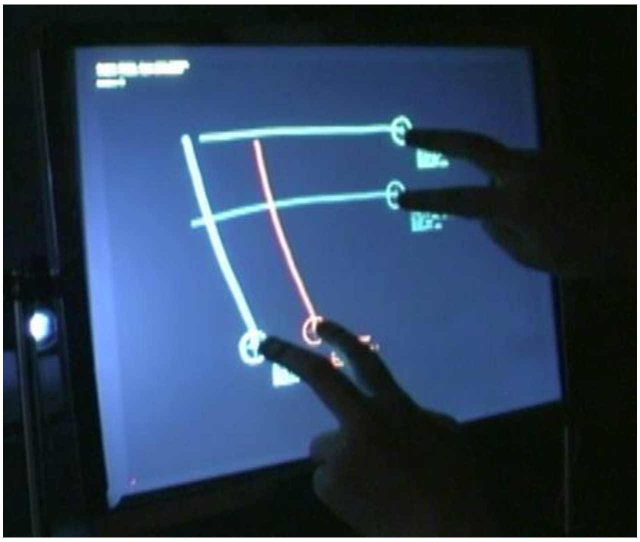
Η γωνία φ δεν ορίζεται, γιατί έχουμε ολική ανάκλαση. Επομένως θα τη βρούμε μέσω της θ:

Από Snell: $n_2 \sin\varphi = n_1 \sin\theta$ ή $\boxed{k_t \sin\varphi = k_i \sin\theta}$. Επίσης: $\left.\begin{array}{l} \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi \\ \sin\varphi = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta \\ \sin\theta_{o\rho} = \frac{n_2}{n_1} \end{array}\right\} \cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \frac{\sin\theta}{\sin\theta_{o\rho}}}$

Όμως, $\theta > \theta_{o\rho}$, άρα η υπόρριζος ποσότητα είναι αρνητική και $\cos\varphi = \pm i\sqrt{\frac{\sin\theta}{\sin\theta_{o\rho}} - 1} = \pm i\beta$.

Επομένως: $E_t = A_t e^{\pm z k_t \beta} e^{i(\omega t - x k_i \sin\theta)}$. Εδώ προφανώς είναι αποδεκτή η λύση με το $e^{-z k_t \beta}$ και προκύπτει ένα κύμα που διαδίδεται στο μέσο 2 κατά τη –*x*- κατεύθυνση, με πλάτος που εξασθενεί εκθετικά όσο προχωράμε στην κατεύθυνση –*z*-.Πρόκειται για επιφανειακό «αποσβαινόμενο» κύμα (evanescent wave).

Ανολοκλήρωτη ολική εσωτερική ανάκλαση (Frustrated Total Internal Reflection). Συνήθως, το αποσβαινόμενο επιφανειακό κύμα της ολικής ανάκλασης δε μεταφέρει ενέργεια στο μέσο στο οποίο διαδίδεται. Ωστόσο, αν υπάρχει τρίτο μέσο με κατάλληλο δείκτη διάθλασης σε μικρή απόσταση από τη διεπιφάνεια, το επιφανειακό κύμα μπορεί να μην αποσβεστεί, αλλά να μεταδοθεί στο 3^{ο} μέσο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται «ανολοκλήρωτη ολική εσωτερική ανάκλαση» γιατί δεν έχουμε πλέον ολική ανάκλαση, αλλά ένα μέρος της ενέργειας περνάει στο μέσο 3.

Το φαινόμενο αυτό οπτικοποιείται, όταν πιάνουμε με βρεγμένα χέρια ένα διαφανές ποτήρι, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε, το επιφανειακό κύμα που έχει προέλθει από ολική ανάκλαση από το γυαλί *(n=1,52)* στον αέρα *(n=1)*, περνάει στο μέσο 3 (νερό γύρω από τα δάχτυλα), ανακλάται στα δάχτυλα και επιστρέφει, ώστε να βλέπουμε τα αποτυπώματά μας όπως πιάνουμε το ποτήρι. Υπάρχουν και οθόνες αφής που αξιοποιούν το φαινόμενο, ώστε να παράγεται ένα φωτεινό ίχνος εκεί όπου ασκήθηκε πίεση, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Δείτε και: https://en.wikipedia.org/wiki/Total_internal_reflection#Frustrated_TIR