- Dressed states (ενδεδυμένες καταστάσεις)

Οι dressed states στην αλληλεπίδραση φωτός-ύλης είναι υπερθέσεις κβαντικών καταστάσεων, που οδηγούν σε πιθανότητες ανεξάρτητες στο χρόνο στις κβαντικές καταστάσεις ψ_n.

Π.χ. στο σύστημα των δύο επιπέδων είναι υπερθέσεις των καταστάσεων ψ_1 και ψ_2 που δίνουν χρονικά ανεξάρτητες πιθανότητες κατάληψης στις καταστάσεις 1 και 2. Εδώ, θα έχουμε δύο τέτοιες υπερθέσεις τις οποίες θα συμβολίσουμε με ψ_+ και ψ_-. Θυμηθείτε ότι για το σύστημα των δύο επιπέδων οι γενικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την αλληλεπίδραση με μονοχρωματικό πεδίο είναι οι εξ. (185) και (186) τις οποίες ξαναγράφουμε εδώ

$$a_1(t) = e^{i\Delta t/2}\left(A_+ e^{-i\Omega' t/2} + A_- e^{i\Omega' t/2}\right) \tag{208}$$

$$a_2(t) = e^{-i\Delta t/2}\left(\frac{\Delta-\Omega'}{\Omega^*} A_+ e^{-i\Omega' t/2} + \frac{\Delta+\Omega'}{\Omega^*} A_- e^{-i\Omega' t/2}\right) \tag{209}$$

όπου θυμίζουμε $\Delta = \omega - \omega_{21}$ και $\Omega' = \sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}$. Επίσης, θυρίζουμε ότι μία γενική κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί το κβαντικό μας σύστημα ύστερα από χρόνο t είναι

$$\psi(t) = a_1(t)\, e^{-i\omega_1 t}\, \psi_1 + a_2(t)\, e^{-i\omega_2 t}\, \psi_2 \qquad (210)$$

Τώρα, για να βρούμε την κατάσταση ψ_+ απαιτούμε $A_+ = 1$ και $A_- = 0$. Για την περίπτωση αυτή από τις εξ. (208) και (209) θα έχουμε

$$(208) \Rightarrow a_1(t) = e^{i(\Delta - \Omega')t/2} \qquad (211)$$

$$(209) \Rightarrow a_2(t) = \frac{\Delta - \Omega'}{\Omega^*}\, e^{-i(\Delta + \Omega')t/2} \qquad (212)$$

Επομένως, η επαλληλία των καταστάσεων αυτών μας δίνει την πρώτη από τις dressed states, ψ_+, η οποία θα γράφεται ως

$$\psi_+ = N_+ \left[e^{-i\omega_1 t} \cdot e^{i(\Delta - \Omega')t/2}\, \psi_1 + \frac{\Delta - \Omega'}{\Omega^*}\, e^{-i\omega_2 t} \cdot e^{-i(\Delta + \Omega')t/2}\, \psi_2 \right] \qquad (213)$$

όπου N_+ η σταθερά νορμαλισμού. Αντίστοιχα, για την dressed state ψ_- απαιτούμε $A_+ = 0$ και $A_- = 1$, οπότε από τις εξ. (208) και (209) έχουμε

$$(208) \Rightarrow a_1(t) = e^{i(\Delta+\Omega')t/2} \quad (214)$$

$$(209) \Rightarrow a_2(t) = \frac{\Delta+\Omega'}{\Omega^*} e^{-i(\Delta-\Omega')t/2} \quad (215)$$

Οπότε, η dressed state ψ_- θα γράφεται

$$\psi_- = N_- \left[e^{-i\omega_1 t} e^{i(\Delta+\Omega')t/2} \psi_1 + \frac{\Delta+\Omega'}{\Omega^*} e^{-i\omega_2 t} e^{-i(\Delta-\Omega')t/2} \psi_2 \right] \quad (216)$$

όπου N_- η αντίστοιχη σταθερά νορμαλισμού. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τις dressed states των εξ. (213) και (216) στη συνοπτική μορφή

$$\psi_\pm = N_\pm \left[e^{-i(\omega_1 - \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t} \psi_1 + \frac{\Delta \mp \Omega'}{\Omega^*} e^{-i(\omega_2 + \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t} \psi_2 \right]$$

Προφανώς, οι συντελεστές κανονικοποίησης υπολογίζονται από τη σχέση $\int |\psi_\pm|^2 d^3r = 1$, οπότε θα έχουμε με αντικατάσταση

$$|N_\pm|^2 \cdot \left| e^{-i(\omega_1 - \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t} \right|^2 + |N_\pm|^2 \left| \frac{\Delta \mp \Omega'}{\Omega^*} \right|^2 \cdot \left| e^{-i(\omega_2 + \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t} \right|^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |N_\pm|^2 \left[1 + \frac{(\Delta \mp \Omega')^2}{|\Omega|^2} \right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |N_\pm|^2 \, \frac{\overbrace{|\Omega|^2 + \Delta^2}^{=\Omega'^2} + \Omega'^2 \mp 2\Delta\Omega'}{|\Omega|^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |N_\pm|^2 \cdot \frac{2\Omega'^2 \mp 2\Delta\Omega'}{|\Omega|^2} = 1 \Rightarrow |N_\pm|^2 = \frac{|\Omega|^2}{2\Omega'(\Omega' \mp \Delta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |N_\pm|^2 = \frac{|\Omega|^2 \Omega'}{2\Omega'^2(\Omega' \mp \Delta)} \Rightarrow |N_\pm|^2 = \frac{|\Omega|^2}{\Omega'^2} \frac{\Omega'}{2(\Omega' \mp \Delta)}$$

$$\Rightarrow N_\pm = \frac{\Omega^*}{\Omega'} \sqrt{\frac{\Omega'}{2(\Omega' \mp \Delta)}} \qquad (217)$$

όπου έχουμε επιλέξει κατάλληλα τη φάση των $N_\pm$ για ευκολία μας στη συνέχεια. Επίσης, στην πρώτη γραμμή για τον υπολογισμό των $N_\pm$ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int |\varphi_1|^2 d^3r = \int |\varphi_2|^2 d^3r = 1$, ενώ στο τέλος αντικαταστήσαμε το $\sqrt{|\Omega|^2}$ με Ω^* μιας και αρχικά είχαμε την ποσότητα Ω^*. Επομένως, οι κανονικοποιημένες dressed states θα γράφονται

$$\psi_\pm = \frac{\Omega^*}{\Omega'}\sqrt{\frac{\Omega'}{2(\Omega' \mp \Delta)}} \cdot e^{-i(\omega_1 - \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t}\,\psi_1 \mp \sqrt{\frac{\Omega' \mp \Delta}{2\Omega'}}\, e^{-i(\omega_2 + \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t}\,\psi_2 \tag{218}$$

Οπότε, το πλάτος πιθανότητας ενός κβαντικού συστήματος, που το έχουμε εκφράσει με τη βοήθεια των dressed states, να βρεθεί στην κατάσταση 1 θα είναι

$$c_1(t) = \frac{\Omega^*}{\Omega'}\sqrt{\frac{\Omega'}{2(\Omega' \mp \Delta)}}\, e^{-i(\omega_1 - \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t} \tag{219}$$

και επομένως, η πιθανότητα το κβαντικό μας σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση 1 είναι

$$P_1(t) = |c_1(t)|^2 = \frac{|\Omega|^2}{\Omega'^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{\Omega'}}{2(\Omega' \mp \Delta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1(t) = \frac{|\Omega|^2}{2\Omega'(\Omega' \mp \Delta)} \tag{220}$$

Αντίστοιχα, το πλάτος πιθανότητας για να βρεθεί το σύστημά μας στην κατάσταση 2 είναι

$$c_2(t) = \mp\sqrt{\frac{\Omega' \mp \Delta}{2\Omega'}}\; e^{-i(\omega_2 + \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\Omega')t} \qquad (221)$$

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα κατάληψης της κατάστασης 2 θα είναι

$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \frac{\Omega' \mp \Delta}{2\Omega'} \qquad (222)$$

Παρατηρείστε ότι οι πιθανότητες κατάληψης των καταστάσεων 1 και 2 που δίνονται από τις εξ. (220) και (222) αντίστοιχα είναι σταθερές και ανεξάρτητες από το χρόνο!

Σημειώνουμε εδώ ότι οι dressed states είναι ιδιοκαταστάσεις της συνολικής Χαμιλτονιανής $H(t) = H^{(0)} + H_{int}(t) = H^{(0)} - \vec{p}\cdot\vec{E}(t)$, οπότε αν το κβαντικό σύστημα είναι στην κατάσταση ψ_+ ή ψ_- τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε θα παραμείνει στην ίδια κατάσταση για όλους τους χρόνους και δεν θα επηρεάζεται από την αλλη με το πεδίο. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι με τις dressed states αντιμετωπίζουμε το σύνθετο σύστημα κβαντικός εκπομπός δύο επιπέδων + Η/Μ πεδίο, ως ένα ενιαίο σύστημα και συνεπώς οι dressed states αποτελούν τις ιδιοκαταστάσεις του σύνθετου αυτού συστήματος.

Στη συνέχεια μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι οι dressed states είναι ορθογώνιες καταστάσεις, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_+^* \psi_- \, d^3r = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_-^* \psi_+ \, d^3r = 0$$

Επίσης, οι μέσες τιμές των διπολικών ροπών στις dressed states θα είναι

$$\langle \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \rangle_\pm = \int \psi_\pm^* \, \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \, \psi_\pm \, d^3r = \mp \frac{\Omega}{2\Omega'} p_{12} e^{-i\omega t} + c.c. \qquad (223)$$

όπου συμπεραίνουμε ότι η μέση διπολική ροπή ταλαντώνεται στη βασική συχνότητα (αφού είναι $\langle \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \rangle \propto e^{-i\omega t}$).

Σημειώστε ότι στην εξ. (223) για τον υπολογισμό της μέσης τιμής $\langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle_+$ είχαμε $\langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle_+ = \int \psi_+^* \, \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon} \, \psi_+ \, d^3r$, ενώ για τη $\langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle_-$ είχαμε $\langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle_- = \int \psi_-^* \, \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon} \, \psi_- \, d^3r$.

Τώρα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα διπολικά στοιχεία μήτρας μεταξύ των dressed states, τότε θα πάρουμε

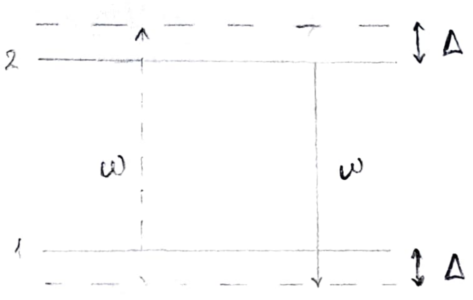
$$\int \psi_\pm^* \, \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon} \, \psi_\mp \, d^3r = \int \left[c_{1+}^*(t)\,\psi_1^* - c_{2+}^*(t)\,\psi_2^* \right] \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon} \left[c_{1-}(t)\,\psi_1 + c_{2-}(t)\,\psi_2 \right]$$

$$+ \int \left[c_{1-}^*(t)\,\psi_1^* + c_{2-}^*(t)\,\psi_2^* \right] \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon} \left[c_{1+}(t)\,\psi_1 + c_{2+}(t)\,\psi_2 \right] = \dots =$$

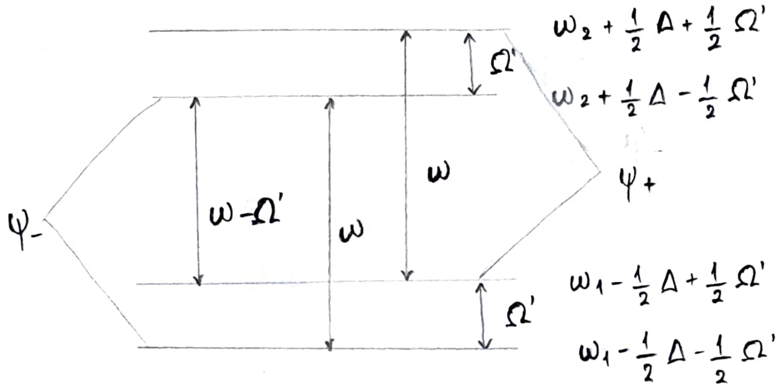
$$= \pm \, p_{12} \frac{\Omega}{2\Omega'} \sqrt{\frac{\Omega' \pm \Delta}{\Omega' \mp \Delta}} \, e^{-i(\omega \mp \Omega')t} \mp p_{12}^* \frac{\Omega^*}{2\Omega'} \sqrt{\frac{\Omega' \mp \Delta}{\Omega' \pm \Delta}} \, e^{i(\omega \pm \Omega')t}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\omega = \omega_{21} + \Delta$ (τα ενδιάμεσα στάδια του υπολογισμού αφήνονται ως άσκηση για τον αναγνώστη).

Τώρα, την εικόνα των μεταβάσεων μπορούμε να τη δούμε ως εξής α) Θετικός αποσυντονισμός ($\Delta > 0$)

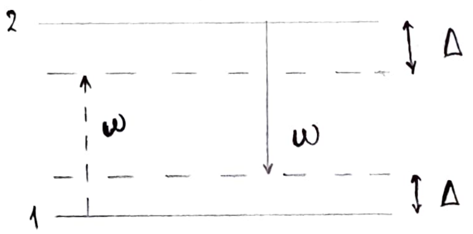


Ασθενές πεδίο

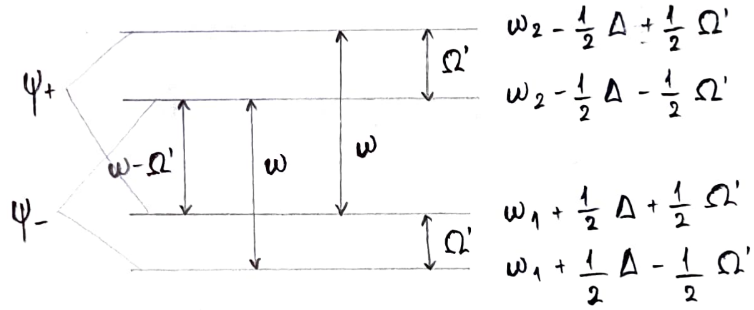


Ισχυρό πεδίο

β) Αρνητικός αποσυντονισμός ($\Delta < 0$)



Ασθενές πεδίο



Ισχυρό πεδίο

Τα παραπάνω γραφήματα για το ισχυρό πεδίο όπου και έχουμε τις dressed states, εξηγούν τις τρεις κορυφές που εμφανίζονται στο φάσμα Mollow (σελ. 150)

- Υπολογισμός απορρόφησης και διασποράς ασθενούς πεδίου σε σύστημα δύο επιπέδων με τη μέθοδο των πλατών πιθανότητας.

Για την ανάλυσή μας εδώ, θεωρούμε ξανά σύστημα δύο επιπέδων που αλληλεπιδρά με μονοχρωματικό πεδίο συχνότητας ω της μορφής

$$\vec{E}(t) = E_0 \hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} + E_0 \hat{\varepsilon} e^{i\omega t}$$

και θεωρούμε επίσης ότι έχουμε φαινόμενα απόσβεσης από την κατάσταση 2 με ρυθμό Γ. Σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε σε προηγούμενο μάθημα, η γενική κατάσταση που θα περιγράφει τον εκπομπό μας σε χρόνο t θα είναι η

$$\psi(t) = a_1(t)\,\psi_1\, e^{-iE_1 t/\hbar} + a_2(t)\,\psi_2\, e^{-iE_2 t/\hbar}$$

ενώ οι εξισώσεις για τα πλάτη πιθανότητας θα είναι

$$i\dot{a}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2} a_2(t) e^{i\Delta t}$$

$$i\dot{a}_2(t) = -\frac{\Omega}{2} a_1(t) e^{-i\Delta t} - i\Gamma a_2(t)$$

όπου η συχνότητα Rabi δίνεται από τη σχέση $\Omega = \frac{2\mu_{21}E_0}{\hbar}$ και ο αποσυντονισμός $\Delta = \omega - \omega_{21}$. Στη συνέχεια, ορίζοντας $b_1(t) = a_1(t)$ και $b_2(t) = a_2(t) e^{i\Delta t} \Rightarrow a_2(t) = b_2(t) e^{-i\Delta t}$, οι παραπάνω εξισώσεις για τα πλάτη πιθανότητας γίνονται

$$i\dot{b}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2} b_2(t) \qquad (224)$$

$$i\dot{b}_2(t) e^{-i\Delta t} + \Delta b_2(t) e^{-i\Delta t} = -\frac{\Omega}{2} b_1(t) e^{-i\Delta t} - i\Gamma b_2(t) e^{-i\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\dot{b}_2(t) = -(\Delta + i\Gamma) b_2(t) - \frac{\Omega}{2} b_1(t) \qquad (225)$$

Στη συνέχεια, θέλουμε να υπολογίσουμε την πόλωση του συστήματος. Σκεφτείτε ότι αν η πυκνότητα των κβαντικών συστημάτων σε ένα συγκεκριμένο όγκο είναι N, και το εκάστοτε κβαντικό σύστημα είναι σαν αυτό που περιγράφαρε μόλις παραπάνω και έχει μέση διπολική ροπή $\langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle$, τότε η πόλωση του συστήματός μας θα δίνεται από τη σχέση

$$P = N \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle \qquad (226)$$

Οπότε όπως έχουμε υπολογίσει από την εξ. (191) θα έχουμε ότι

$$\langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, a_1^*(t)\, a_2(t)\, e^{-i\omega_{21}t} + c.c. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, b_1^*(t)\, b_2(t)\, e^{-i\Delta t}\, e^{-i\omega_{21}t} + c.c. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, b_1^*(t)\, b_2(t)\, e^{-i\omega t} + p_{21}\, b_1(t)\, b_2^*(t)\, e^{i\omega t} \qquad (227)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (227) στην εξ. (226) βρίσκουμε

$$P(t) = N p_{12}\, b_1^*(t)\, b_2(t)\, e^{-i\omega t} + N p_{21}\, b_1(t)\, b_2^*(t)\, e^{i\omega t} \qquad (228)$$

Όμως, γνωρίζουμε από τον ηλεκτρομαγνητισμό ότι για γραμμικά, ισοτροπικά μέσα, η πόλωση που προκαλείται στο μέσο αυτό από εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(t)$ είναι

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi E_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon_0 \chi^* E_0^* e^{i\omega t} \qquad (229)$$

Από τη σύγκριση των εξ. (228) και (229) βρίσκουμε ότι η επιδεκτικότητα γράφεται

$$\chi = \frac{N \cdot p_{12} \cdot b_1^* \cdot b_2}{\varepsilon_0 E_0} \qquad (230)$$

Για να υπολογίσουμε την επιδεκτικότητα θα χρησιμοποιήσουμε τις εξ. (224) και (225) τις οποίες θα επιλύσουμε με θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης (χρονικά εξαρτημένη) και σε στάσιμη κατάσταση. Με αυτό τον τρόπο υπολογίζουμε τη γραμμική επιδεκτικότητα.

Θυμηθείτε ότι στη χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης θεωρούμε ασθενή διαταραχή με αποτέλεσμα τα πλάτη πιθανότητας να παραμένουν κοντά στις αρχικές τους τιμές (σελ. 101). Μιας και στην περίπτωσή μας έχουμε $b_1(t=0) = 1$ και $b_2(t=0) = 0$ συμπεραίνουμε ότι στη θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης και στη στάσιμη κατάσταση ($t \to \infty$) θα είναι $b_1 \simeq b_1^{(0)} \simeq b_1(t=0) \simeq 1$ καθώς και $b_2 \simeq b_2^{(1)}$ [αφού $b_2^{(0)} = b_2(t=0) = 0$]. Επίσης, θυμηθείτε στο σημείο αυτό ότι τα αποτελέσματά μας στο όριο $t \to \infty$ είναι ανεξάρτητα του χρόνου και για το λόγο αυτό λέμε ότι έχουμε στάσιμη κατάσταση. Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω, από την εξ. (225) έχουμε

$$0 = -(\Delta + i\Gamma)\, b_2^{(1)} - \frac{\Omega}{2}\, \overbrace{b_1^{(0)}}^{\simeq 1} \Rightarrow -(\Delta + i\Gamma)\, b_2^{(1)} = \frac{\Omega}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2^{(1)} = -\frac{\Omega}{2(\Delta + i\Gamma)} \qquad (231)$$

Επομένως, η γραμμική επιδεκτικότητα πρώτης τάξης σύμφωνα με τις εξ. (230) και (231) θα γράφεται

$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{N \cdot \mu_{12} \cdot b_1^{*(0)} \cdot b_2^{(1)}}{\varepsilon_0 E_0} = \frac{N \cdot \mu_{12}\, b_2^{(1)}}{\varepsilon_0 E_0} = \frac{N \mu_{12}}{\varepsilon_0 E_0}\left(-\frac{\Omega}{2(\Delta + i\Gamma)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi^{(1)}(\omega) = -\frac{N p_{12}}{\varepsilon_0 E_0} \cdot \frac{\frac{2 p_{21} E_0}{\hbar}}{2(\Delta + i\Gamma)} = -\frac{N |p_{12}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_{21} + i\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi^{(1)}(\omega) = \frac{N |p_{12}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\omega_{21} - \omega}{(\omega - \omega_{21})^2 + \Gamma^2} + i \frac{N |p_{12}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_{21})^2 + \Gamma^2} \qquad (232)$$

όπου παρατηρούμε ότι έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος.

Στο σημείο αυτό κάνουμε μία μικρή παύση για να επιστρέψουμε λίγο στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό.

Θυμίζουμε ότι οι εξισώσεις του Maxwell για Η/Μ πεδίο που διαδίδεται εντός γραμμικού διηλεκτρικού μέσου γράφονται

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ (Gauss στον Ηλ.)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Gauss στο Μαγν.)

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (Ampère-Maxwell)

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faraday)

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, όπου $\vec{D}$ η διηλεκτρική μετατόπιση και $\vec{P}$ η πόλωση του υλικού

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$, όπου $\vec{J}$ η πυκνότητα ρεύματος και σ η αγωγιμότητα του υλικού.

Η σχέση για την πυκνότητα του ρεύματος, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, είναι ουσιαστικά ο νόμος του Ohm. Εδώ, η αγωγιμότητα σ λαμβάνει υπόψιν φαινομενολογικά τις γραμμικές απώλειες που συμβαίνουν λόγω της απορρόφησης από το υλικό, καθώς επίσης και τις απώλειες λόγω περίθλασης (σκεφτείτε ότι για πεδία ένταση $E_0 < 3 \cdot 10^4$ V/m ο αέρας είναι ουσιαστικά τέλειος μονωτής με $\sigma \to 0$ και έτσι δεν υπάρχουν απώλειες κατά τη διάδοση του πεδίου).

Τώρα, παίρνοντας το curl της εξίσωσης Faraday και συνδυάζοντας και τις υπόλοιπες εξισώσεις Maxwell παίρνουμε ότι

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overset{\sigma\vec{E}}{\vec{J}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \qquad (233)$$

Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται ότι η πόλωση $\vec{P}(\vec{r},t)$ δρα ως όρος πηγής για το πεδίο $\vec{E}(\vec{r},t)$. Τώρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρικό μας πεδίο έχει πόλωση κατά τον άξονα x και διαδίδεται κατά τον άξονα z, είναι δηλαδή $\vec{E}(\vec{r},t) = E(z,t)\,\hat{x}$, οπότε η εξ. (233) γράφεται

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad (234)$$

Η γενική μορφή ενός μονοχρωματικού ηλεκτρικού πεδίου με διεύθυνση διάδοσης κατά τον άξονα z και συχνότητα ω γράφεται

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_0(z,t)\, e^{-i[\omega t - kz + \varphi(z,t)]} + c.c. \qquad (235)$$

όπου το πλάτος $\mathcal{E}_0(z,t)$ και η φάση θεωρούμε ότι είναι αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου, ενώ ο κυματάριθμος δίνεται από τη σχέση $k=\omega/c$. Αν το πεδίο μας δίνεται από την εξ. (235) τότε συμπεραίνουμε ότι η "αντίδραση" του υλικού, η πόλωση δηλαδή, θα γράφεται αντίστοιχα (θεωρούμε γραμμική απόκριση).

$$P(z,t) = \frac{1}{2} P_0(z,t)\, e^{-i[\omega t - kz + \varphi(z,t)]} + c.c. \qquad (236)$$

όπου θεωρούμε κατ' αντιστοιχία ότι το πλάτος $P_0(z,t)$ είναι μία αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση της θέσης και του χρόνου. Εφόσον οι συναρτήσεις $\mathcal{E}_0(z,t)$, $\varphi(z,t)$ και $P_0(z,t)$ είναι αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου, δηλαδή δεν αλλάζουν σημαντικά σε χρόνο μιας περιόδου, μπορούμε να κάνουμε τις εξής προσεγγίσεις οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial t} \ll \omega \mathcal{E}_0 \,, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} \ll k \mathcal{E}_0 \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \ll \omega \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \ll k \,,$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} \ll \omega P_0 \,, \quad \frac{\partial P_0}{\partial t} \ll k P_0$$

Παρατηρώντας τώρα ότι μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξ. (234) στη μορφή

$$(234) \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) E = -\mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τις παραπάνω προσεγγίσεις έχουμε για το positive frequency part του $E(z,t)$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) E = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \frac{1}{2} \mathcal{E}_0(z,t)\, e^{-i[\omega t - kz + \varphi(z,t)]} \simeq$$

$$\simeq -ikE - i\cancel{\frac{\omega}{c}}^{\,k} E = -2ikE$$

τότε παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial t} = -\kappa \mathcal{E}_0 - \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot k \cdot \mathrm{Im}\, P_0 \qquad (237)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2\varepsilon_0} k \cdot \frac{1}{\mathcal{E}_0} \mathrm{Re}\, P_0 \qquad (238)$$

όπου $\kappa = \sigma / 2\varepsilon_0 c$ είναι ο συντελεστής γραμμικών απωλειών. Η περίπτωση που περιγράψαμε παραπάνω είναι η γενικότερη δυνατή. Στη γενική περίπτωση λοιπόν, η πόλωση, η οποία προκαλείται από τη δράση του πεδίου μπορεί να είναι μία πολύ περίπλοκη συνάρτηση. Όμως, στην περίπτωσή μας όπου θεωρούμε ισοτροπικό μέσο για τη διάδοση ασθενούς πεδίου με $\sigma=0$, προκύπτει ότι η πόλωση είναι μία γραμμική συνάρτηση του πεδίου, δηλαδή

$$P(z,t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi(t')\, E(z,t-t')\, dt' \qquad (239)$$

όπου $\chi(t)$ είναι η γραμμική επιδεκτικότητα. Για μονοχρωματικό πεδίο της μορφής $E(z,t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0(z,t)\, e^{-i(\omega t - kz)} + c.c.$ από την εξ. (239) καταλήγουμε στη σχέση

$$P(z,t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\, \mathcal{E}_0(z,t) \Big[\underbrace{\chi(\omega)\, e^{-i(\omega t - kz)}}_{\text{positive freq. part}} + \underbrace{\chi(-\omega)\, e^{i(\omega t - kz)}}_{\text{negative freq. part}} \Big] \qquad (240)$$

όπου $\chi(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $\chi(t')$, δηλαδή $\chi(\omega) = \int \chi(t')\, e^{i\omega t'} dt'$. Συγκρίνοντας την εξ. (240) με την εξ. (236) για $\varphi(z,t)$, βρίσκουμε ότι

$$P_0(z,t) = \varepsilon_0 \mathcal{E}_0(z,t)\, \chi(\omega) \qquad (241)$$

και εφόσον έχουμε μιγαδικές ποσότητες προκύπτει ότι

$\mathrm{Re}\, P_0(z,t) = \varepsilon_0 \mathcal{E}_0(z,t)\, \chi'(\omega)$ και $\mathrm{Im}\, P_0(z,t) = \varepsilon_0 \mathcal{E}_0(z,t)\, \chi''(\omega)$, όπου

θεωρήσαμε για απλότητα πραγματικό πλάτος $\mathcal{E}_0(z,t)$ και

θέσαμε $\mathrm{Re}\,\chi(\omega) = \chi'(\omega)$ και $\mathrm{Im}\,\chi(\omega) = \chi''(\omega)$ [δείτε επίσης πάλι την εξ. (232)]. Αντικαθιστώντας την εξ. (241), η οποία είναι ουσιαστικά για το positive frequency part, στην εξ. (237)* και θυμίζοντας τις προσεγγίσεις της σελ. 186

βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} = i\frac{k}{2}\chi(\omega)\, \mathcal{E}_0$$

όπου η διαφορική αυτή εξίσωση έχει λύση

$$\mathcal{E}_0(z) = \mathcal{E}_0(0)\, e^{ik'(z)}\, e^{-az} \qquad (242)$$

όπου θέσαμε ότι $k(z) = \frac{1}{2}k\chi'(\omega)z$, που είναι μία μετατόπιση φάσης, και $a = \frac{1}{2}k\chi''(\omega)$ ο οποίος είναι ο συντελεστής

$*$ για $\sigma = 0$

απορρόφησης (θυμηθείτε ότι η ένταση του πεδίου I είναι $I \propto |E|^2 \Rightarrow I(z) \propto |\mathcal{E}_0(0)|^2 e^{-2az} \Rightarrow$ νόμος απορρόφησης του Beer). και ισχύει ότι $a \geq 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι το πραγματικό μέρος της γραμμικής επιδεκτικότητος, $\chi'(\omega)$, σχετίζεται με τη διασπορά, ενώ το μιγαδικό μέρος, $\chi''(\omega)$, με την απορρόφηση που προκαλεί το γραμμικό μέσο. [δείτε ξανά την εξ. (232)].

Στη συνέχεια, θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ της επιδεκτικότητας και του δείκτη διάθλασης του μέσου, ο οποίος είναι και αυτός εν γένει μιγαδικός. Αντικαθιστώντας λοιπόν το ηλεκτρικό πεδίο $E(z,t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0(z,t)\, e^{-i(\omega t - kz)} + c.c.$ καθώς και την πόλωση της εξ. (240) στην εξ. (234) για $\sigma = 0$ και λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις προσεγγίσεις της σελ. 186, βρίσκουμε τελικά

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = 0 \qquad (243)$$

όπου θέσαμε $n^2(\omega) = 1 + \chi(\omega)$. Προφανώς, η ποσότητα $n(\omega)$ είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού και $\tilde{k} = n \cdot \frac{\omega}{c}$ είναι το κυματάνυσμα του πεδίου μέσα στο υλικό. Όπως, για τη διηλεκτρική σταθερά στα γραμμικά μέσα γνωρίζουμε ότι $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = (1+\chi)$, αφού $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_r \vec{E}$. Επομένως, θα έχουμε $\varepsilon_r = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, όπου ε_1 και ε_2 το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, και έτσι θα είναι $n^2 = \varepsilon_r$, όπου

$$n' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \right)^{1/2} \qquad (244)$$

$$n'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \right)^{1/2} \qquad (245)$$

όπου n' και n'' το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα του δείκτη διάθλασης. Στην περίπτωση όπου

$n'' \ll n'$, κάτι το οποίο είναι σύνηθες στα κβαντικά συστήματα, τότε θα είναι $n' \simeq \sqrt{\varepsilon_1}$ και $n'' \simeq \dfrac{\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon_1}}$.

Όσον αναφορά το κυματάνυσμα $\tilde{k}$ θα είναι και αυτό μιγαδικό, αφού όπως είδαμε $\tilde{k} = n \cdot \dfrac{\omega}{c}$, και θα συμβολίσουμε $\tilde{k} = k' + i a$, όπου a είναι ουσιαστικά ο συντελεστής απορρόφησης [δείτε πάλι την εξ. (242)]. Επομένως, θα είναι

$$\tilde{k} = n \cdot \frac{\omega}{c} \Rightarrow k' + i a = (n' + i n'') \frac{\omega}{c} \xrightarrow[\text{μέρη μόνο}]{\text{μιγαδικά}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\omega}{c} \cdot n'' \overset{n'' \simeq \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon_1}}}{\Longrightarrow} a \simeq \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon_1}} \overset{n' \simeq \sqrt{\varepsilon_1}}{\Longrightarrow} a = \frac{\omega}{2n'c} \cdot \varepsilon_2 \overset{\varepsilon_r = 1 + \chi}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\omega}{2n'c} \, Im\chi(\omega) \overset{(232)}{\Longrightarrow} a = \frac{\omega}{2n'c} \frac{N|p_{12}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_{21})^2 + \Gamma^2} \qquad (246)$$

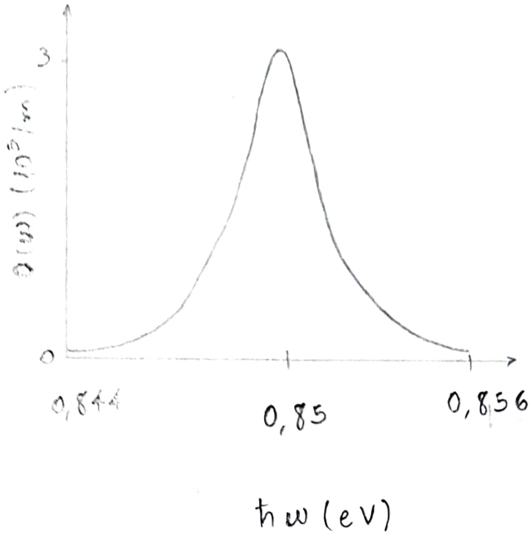
όπου η εξ. (246) μας δίνει την τελική μορφή του συντελεστή απορρόφησης.

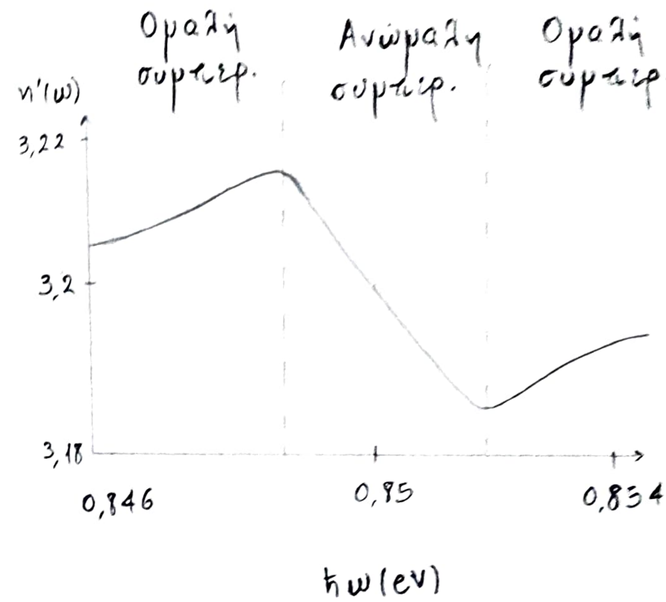
Τώρα, για το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης έχουμε

$$n' \simeq \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{1 + \mathrm{Re}\,\chi(\omega)} \simeq 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\chi(\omega) \overset{(232)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow n' = 1 + \frac{1}{2}\frac{N|\mu_{12}|^2}{\hbar\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}-\omega}{(\omega-\omega_{21})^2+\Gamma^2} \qquad (247)$$

Από τις εξ. (246) και (247) βλέπουμε ότι ο συντελεστής απορρόφησης και το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης είναι και οι δύο συναρτήσεις της συχνότητας ω και περιγράφονται με τη βοήθεια του φανταστικού και του πραγματικού μέρους της επιδεκτικότητας αντίστοιχα. Στα παρακάτω σχήματα δείχνουμε πως μεταβάλλονται οι δύο αυτές ποσότητες συναρτήσει της συχνότητας ω, για μία τυπική κβαντική τελεία με ενεργειακή διαφορά $\hbar\omega_{21} =$ 0,85 eV μεταξύ των δύο επιπέδων της.





Παρατηρούμε, στο πρώτο από τα παραπάνω σχήματα, ότι έχουμε τη μέγιστη απορρόφηση στο συντονισμό, δηλαδή για $\omega = \omega_{21}$. Επίσης, σημειώνουμε ότι η μορφή του συντελεστή απορρόφησης [εξ. (246)] είναι Λορεντζιανή συνάρτηση. Από την άλλη πλευρά, ο δείκτης διάθλασης παρουσιάζει την τυπική μορφή διασποράς κοντά στο συντονισμό με ανώμαλη διασπορά πολύ κοντά στο συντονισμό. [Ανώμαλη διασπορά: Αν ω αυξάνεται $\Rightarrow$ n' μειώνεται
Ομαλή διασπορά: Αν ω αυξάνεται $\Rightarrow$ n' αυξάνεται]

Το σημείο που πρέπει να κρατήσουμε από τη συγκεκριμένη ανάλυση είναι το γεγονός ότι το πραγματικό μέρος