[δείτε πάλι την εξ. (44)] ευθύνονται για κάποια πολύ ενδιαφέροντα φαινόμενα, όπως είναι η αυθόρμητη εκπομπή, η μετατόπιση Lamb καθώς και το φαινόμενο Casimir.

- Coherent states

Γνωρίζουμε ότι οι δύο πυλώνες της σύγχρονης Φυσικής, η Θεωρία της Σχετικότητας και η Κβαντομηχανική, αποτελούν κατά κάποιο τρόπο γενίκευση της ήδη προϋπάρχουσας Θεωρίας. Έτσι λοιπόν, αν και η σωστή Θεωρία, σύμφωνα με τα υπάρχοντα δεδομένα, η οποία εξηγεί την κίνηση των σωμάτων είναι η Γενική Σχετικότητα, στο όριο των μικρών ταχυτήτων θεωρούμε ότι η κίνηση των σωμάτων περιγράφεται από τη Νευτώνια Φυσική. Αντίστοιχα, στην Κβαντομηχανική, αν και γνωρίζουμε ότι οι φυσικές ποσότητες είναι κβαντισμένες, αν πάρουμε το όριο ότι έχουμε έναν άπειρο αριθμό κβάντων, τότε θα πρέπει να επανερχόμαστε στην κλασική Φυσική (κλασικό όριο).

Στην προηγούμενη ενότητα όπου αναπτύξαμε τις number states είδαμε ότι η μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, δηλαδή $\langle n|\vec{E}(\vec{r},t)|n\rangle=0$, ανεξαρτήτως του

του αριθμού των φωτονίων τα οποία υπάρχουν στο χώρο. Παρ' όλα αυτά, γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή του κλασικού ηλεκτρικού πεδίου είναι μη-μηδενική στο χώρο μιας και το ηλεκτρικό πεδίο έχει ημιτονοειδή εξάρτηση. Αν και οι number states φαίνονται με μια πρώτη ματιά ιδανικοί υποψήφιοι για την κβάντωση του πεδίου, μιας και ουσιαστικά η κάθε number state αντιστοιχεί και σε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης σύμφωνα με τους οποίους αναπτύξαμε το ηλεκτρικό μας πεδίο, βλέπουμε ότι οι number states δεν υπακούουν στο κλασικό όριο. Για το λόγο αυτό είμαστε αναγκασμένοι να αναπτύξουμε ένα καταλληλότερο σύνολο καταστάσεων. Οι καταστάσεις αυτές ονομάζονται σύμφωνες καταστάσεις (coherent states) και αναπτύσσονται παρακάτω.

Αρχικά, θυμηθείτε ότι ένα μονοχρωματικό πεδίο γράφεται

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\,\hat{e}_x\left[\hat{a}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^{+}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] \qquad (53)$$

όπου έχει το διάνυσμα της πόλωσης κατά τη διεύθυνση x όπως ακριβώς είχαμε και στην εξ. (33). Στη συνέχεια, γνωρίζουμε ότι το πεδίο το οποίο παράγεται από ένα laser είναι σύμφωνο (coherent), μιας και το πλάτος και η φάση του είναι καθορισμένα. Ένα τέτοιο πεδίο περιγράφεται ουσιαστικά από την εξ. (55) που μόλις αναφέραμε. Τώρα, θα πρέπει να βρούμε ένα κατάλληλο σύνολο καταστάσεων με το οποίο να μπορούμε να περιγράψουμε το σύμφωνο αυτό πεδίο.

Θυμηθείτε πάλι ότι τις προάλλες χωρίσαμε το πεδίο της εξ. (55) σε ένα κομμάτι το οποίο το συμβολίσαμε ως $\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t)$ και περιείχε όλες τις θετικές συχνότητες καθώς επίσης ήταν ανάλογο του τελεστή $\hat{a}$, και στο συζυγές του $\hat{\vec{E}}^{(-)}(\vec{r},t)$, το οποίο περιείχε τις αρνητικές συχνότητες και ήταν ανάλογο του $\hat{a}^+$. Επομένως, παίρνοντας τη μέση τιμή του πεδίου αυτού με τη βοήθεια των number states έχουμε

$$\langle n|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)|n\rangle = \langle n|[\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t)+\hat{\vec{E}}^{(-)}(\vec{r},t)]|n\rangle \propto \langle n|(\hat{a}+\hat{a}^+)|n\rangle$$

$$\propto \underbrace{\langle n|n-1\rangle}_{0}\underbrace{\langle n|n+1\rangle}_{0} = 0$$

Επομένως, για να πάρουμε μία μη-μηδενική μέση τιμή για το πεδίο μας, θα πρέπει να πάρουμε τη μέση τιμή του πεδίου μας χρησιμοποιώντας καταστάσεις οι οποίες είναι ιδιοκαταστάσεις των τελεστών $\hat{a}$ και $\hat{a}^+$. Συμβολίζοντας λοιπόν ως $|a\rangle$ τις καταστάσεις αυτές, θα είναι

$$\hat{a}\,|a\rangle = a\,|a\rangle \qquad (56)$$

όπου a ένας μιγαδικός εν-γένει αριθμός (θυμηθείτε ότι ο $\hat{a}$ δεν είναι Ερμιτιανός τελεστής, οπότε η ιδιοτιμή του είναι γενικά μη-πραγματική). Εφόσον οι καταστάσεις $|a\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του $\hat{a}$, στη συνέχεια απαιτούμε οι $\langle a|$ να είναι ιδιοκαταστάσεις του $\hat{a}^+$, δηλαδή

$$\langle a|\,\hat{a}^+ = a^*\,\langle a| \qquad (57)$$

όπου ουσιαστικά πήραμε το συζυγές της εξ. (56). Από τη στιγμή που οι number states αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο, μπορούμε να αναπτύξουμε τις καταστάσεις $|a\rangle$ με τη βοήθεια του συνόλου αυτού και έτσι να γράψουμε

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle \qquad (58)$$

όπου $c_n$ κάποιοι σταθεροί συντελεστές. Δρώντας με τον τελεστή $\hat{a}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα της εξ. (58) παίρνουμε ότι

$$(58) \Rightarrow \hat{a}\,|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \hat{a}\,|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$(56) \Rightarrow \hat{a}\,|a\rangle = a\,|a\rangle = a \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές της εκάστοτε κατάστασης $|n\rangle$ στις δυο παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε ότι

$$c_n \cdot \sqrt{n} = a \cdot c_{n-1} \Rightarrow c_n = \frac{a}{\sqrt{n}}\, c_{n-1}$$

$$c_{n-1}\sqrt{n-1} = a \cdot c_{n-2} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{a}\, c_n \sqrt{n-1} = a \cdot c_{n-2} \Rightarrow c_n = \frac{a^2}{\sqrt{n(n-1)}}\, c_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{a}{\sqrt{n}}\, c_{n-1} = \frac{a^2}{\sqrt{n(n-1)}}\, c_{n-2} = \dots = \frac{a^n}{\sqrt{n!}}\, c_0 \qquad (59)$$

όπου $c_0$ ο συντελεστής της κατάστασης κενού $|0\rangle$. Επομένως, από την εξ. (59) μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξ. (58) ως

$$|a\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}\, |n\rangle \qquad (60)$$

Από τη στιγμή που θέλουμε να έχουμε μια ορθοκανική βάση, από την απαίτηση $\langle a|a\rangle = 1$ έχουμε ότι

$$\langle a|a\rangle = \left(c_0^* \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle m|\right)\left(c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\right) = |c_0|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^*)^m a^n}{\sqrt{m!\,n!}} \times$$

$$\times \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}} = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|a|^2)^n}{n!} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |c_0|^2 e^{|a|^2} = 1 \Rightarrow |c_0|^2 = e^{-|a|^2} \Rightarrow c_0 = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \qquad (61)$$

Επομένως, με βάση το αποτέλεσμα της εξ. (61) μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξ. (60) ως

$$|a\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{και από (59)} \overset{(61)}{\Rightarrow} c_n = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \qquad (62)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις σύμφωνες καταστάσεις όπως ορίζονται στην εξ. (62), βρίσκουμε τη μέση τιμή του πεδίου της εξ. (55) από την παρακάτω σχέση

$$\langle a|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)|a\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \left[a e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right] \qquad (63)$$

Γράφοντας την ιδιοτιμή του τελεστή καταστροφής $a = |a| e^{i\theta}$ παίρνουμε ότι

$$\langle a|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)|a\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} |a| \left[e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\theta)} - e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\theta)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle a|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)|a\rangle = 2|a|\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \theta) \qquad (64)$$

Τώρα, φαίνεται ότι η μέση τιμή εξαρτάται από μία ημιτονοειδή συνάρτηση, κάτι το οποίο συμβαίνει και για ένα κλασικό πεδίο. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι (κάντε τις πράξεις)

$$\langle a|\hat{\vec{E}}^2(\vec{r},t)|a\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left[1+4|a|^2\sin^2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}-\theta)\right] \qquad (65)$$

Από τις εξ. (64)-(65) βρίσκουμε τελικά ότι

$$(\Delta\hat{\vec{E}}(\vec{r},t))^2 = \langle\hat{\vec{E}}^2(\vec{r},t)\rangle - \langle\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)\rangle^2 = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \qquad (66)$$

δηλαδή η διακύμανση (fluctuations) του πεδίου είναι η ίδια με εκείνη του κενού [εξ. (44) με $n=0$].

Τώρα, από τη σχέση που ισχύει ότι $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$, μπορούμε να ξαναγράψουμε τις σύμφωνες καταστάσεις τις οποίες ορίσαμε στην εξ. (62) ως εξής

$$|a\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\cdot\frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\hat{a}^+)^n}{n!}}_{e^{a\hat{a}^+}}|0\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a\rangle = e^{a\hat{a}^+}|0\rangle\, e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \qquad (67)$$

Στη συνέχεια, σημειώνοντας ότι $e^{-a^*\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$ (γιατί;), μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξ. (67) στη μορφή

$$|a\rangle = e^{a\hat{a}^+} \cdot e^{-a^*\hat{a}} |0\rangle \cdot e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a\rangle = \hat{D}(a)|0\rangle \qquad (68)$$

όπου προφανώς θέσαμε ότι $\hat{D}(a) = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \cdot e^{a\hat{a}^+} \cdot e^{-a^*\hat{a}}$. Γνωρίζουμε όμως ότι για δύο τελεστές $\hat{A}$ και $\hat{B}$ για τους οποίους ισχύει ότι $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$ τότε έχουμε

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \cdot e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} \qquad (69)$$

(τύπος των Baker-Haussdorf)

Θέτοντας λοιπόν $\hat{A} = a\hat{a}^+$ και $\hat{B} = -a^*\hat{a}$ θα έχουμε

$$\hat{D}(a) = e^{a\hat{a}^+ - a^*\hat{a}} \qquad (70)$$

Παίρνοντας το Ερμιτιανά συζυγές της εξ. (70) έχουμε

$$D^+(a) = \left(e^{a\hat{a}^+ - a^*\hat{a}}\right)^+ = e^{a^*\hat{a} - a\hat{a}^+} = e^{-(a\hat{a}^+ - a^*\hat{a})} = \hat{D}(-a) \qquad (71)$$

και φαίνεται ότι ισχύει $\hat{D}(a)\cdot\hat{D}^+(a) = 1 \Rightarrow \hat{D}^+(a) = \hat{D}^{-1}(a)$.

Ο τελεστής $\hat{D}(a)$, του οποίου τον ορισμό και τις ιδιότητες είδαμε παραπάνω, ονομάζεται τελεστής μετατόπισης (displacement operator). Το όνομά του δικαιολογείται από τη εξ. (68), από όπου φαίνεται ότι οι σύμφωνες καταστάσεις προκύπτουν από την εφαρμογή του τελεστή αυτού πάνω στην κατάσταση του κενού (δηλαδή ο $\hat{D}(a)$ είναι σαν να μετατοπίζει την κατάσταση του κενού $|0\rangle$).[*] Σημειώστε επίσης ότι μια άλλη μορφή του τελεστή μετατόπισης, πέρα από αυτή που αναφέραμε κάτω από την εξ. (68), είναι η εξής

$$\hat{D}(a) = e^{\frac{1}{2}|a|^2} e^{-a^*\hat{a}} e^{a\hat{a}^+} \qquad (72)$$

την οποία κανείς θα χρειαστεί για να αποδείξει τις ιδιότητες του τελεστή μετατόπισης οι οποίες αναφέρονται στη συνέχεια.

Ο τελεστής μετατόπισης λοιπόν έχει τις εξής ιδιότητες

$$\hat{D}^{-1}(a)\,\hat{a}\,\hat{D}(a) = \hat{a} + a \qquad (73)$$

$$\hat{D}^{-1}(a)\,\hat{a}^+\,\hat{D}(a) = \hat{a}^+ + a^* \qquad (74)$$

όπου θυμίζουμε ότι ισχύει $\hat{D}^{-1}(a) = \hat{D}^+(a) = \hat{D}(-a)$. Σημειώστε πάλι ότι για οποιουσδήποτε τελεστές $\hat{A}$ και $\hat{B}$ ισχύει

$$e^{-a\hat{A}}\,\hat{B}\,e^{a\hat{A}} = \hat{B} - a[\hat{A},\hat{B}] + \frac{a^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \ldots \qquad (75)$$

Θέτοντας λοιπόν $\hat{A} = \hat{a}^+$ και $\hat{B} = \hat{a}$ παίρνουμε από την παραπάνω εξίσωση ότι

$$e^{-a\hat{a}^+}\cdot \hat{a}\cdot e^{a\hat{a}^+} = \hat{a}+a \qquad (76)$$

Με τη βοήθεια λοιπόν της εξίσωσης αυτής μπορεί κανείς να αποδείξει τις ιδιότητες του τελεστή μετατόπισης που αναφέρονται στις εξ. (73) και (74).

Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $\hat{D}(a)$ και $\hat{D}(b)$ δυο εν γένει διαφορετικοί τελεστές μετατόπισης, προκύπτει ότι

$$\hat{D}(a)\,\hat{D}(b) = \hat{D}(a+b)\, e^{\frac{1}{2}(ab^*-ba^*)} \qquad (77)$$

Λόγω του επιπλέον εκθετικού παράγοντα που υπάρχει στο δεξί μέρος της εξ. (77) προκύπτει ότι οι τελεστές μετατόπισης έχουν μη-μηδενικό μεταθέτη, δηλαδή $[\hat{D}(a), \hat{D}(b)] \neq 0$.

- **Επιπλέον ιδιότητες των σύμφωνων καταστάσεων**

Όπως είδαμε και πριν, στην εξ. (62), μπορούμε να γράψουμε μία σύμφωνη κατάσταση $|a\rangle$ ως γραμμικό συνδυασμό ως γραμμικό συνδυασμό των number states $|n\rangle$. Είπαμε επίσης ότι οι number states αποτελούν ένα πλήρες σύνολο μιας και $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ καθώς επίσης αποτελούν ένα ορθο-

---

(*) Με άλλα λόγια λοιπόν η σύμφωνη κατάσταση της εξ (68) μπορεί να θεωρηθεί ως η μετατοπισμένη μορφή της θεμελιώδους κατάστασης του αρμονικού ταλαντωτή.

κανονικό σύνολο στο χώρο Fock, δηλαδή $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$.

Τώρα, θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες για τις σύμφωνες καταστάσεις.

Θεωρώντας, κατ' αρχήν, δύο διαφορετικές σύμφωνες καταστάσεις $|a\rangle$ και $|b\rangle$, θα εξετάσουμε αν αυτές είναι ορθογώνιες με τη βοήθεια του ορισμού της εξ. (62). Έτσι λοιπόν, έχουμε ότι

$$\langle b|a\rangle = \left(e^{-\frac{1}{2}|b|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^{*m}}{\sqrt{m!}}\langle m|\right)\left(e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle b|a\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^n\cdot b^{*m}}{\sqrt{n!\cdot m!}}\underbrace{\langle m|n\rangle}_{=\delta_{mn}} \overset{n=m}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \langle b|a\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\cdot b^*)^n}{n!}}_{=e^{ab^*}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle b|a\rangle = \exp\left[\frac{1}{2}(-|a|^2-|b|^2+ab^*)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle b|a\rangle = \exp\left[\frac{1}{2}(b^*a-ba^*)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}|b-a|^2\right] \qquad (78)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $|b-a|^2 = (b-a)(b^*-a^*) = |b|^2+|a|^2-ba^*-b^*a$. Ο πρώτος όρος στην εξ. (78) παίζει το ρόλο μιας μιγαδικής φάσης. Επομένως, θα είναι

$$|\langle \beta | a \rangle|^2 = e^{-|\beta - a|^2} \neq 0 \qquad (79)$$

και έτσι συμπεραίνουμε ότι οι σύμφωνες καταστάσεις δεν είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, παρά μόνο στην οριακή περίπτωση όπου $|\beta - a|^2 \to \infty$.

Τώρα, ας προσπαθήσουμε να βρούμε τη σχέση πληρότητας για τις σύμφωνες καταστάσεις. Πριν ξεκινήσουμε, θυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές $a$ του τελεστή $\hat{a}$ είναι μιγαδικές και έτσι, όταν παρακάτω θα πάρουμε το ολοκλήρωμα $\int d^2a$, ουσιαστικά θα είναι $d^2a = dRe(a)\, dIm(a)$. Έτσι λοιπόν, θα έχουμε

$$\int |a\rangle\langle a|\, d^2a = \int \left(e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\right)\left(e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle m|\right) d^2a$$

Ορίζοντας στη συνέχεια $a = re^{i\theta}$ (μιας και το $a$ είναι μιγαδικός), θα είναι $d^2a = r\,dr\,d\theta$ όπου $r \in [0, +\infty)$ και $0 \leq \theta < 2\pi$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα έχουμε

$$\int |a\rangle\langle a|\, d^2a = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int e^{-|a|^2} a^n (a^*)^m\, d^2a =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \iint e^{-r^2} \cdot r^n e^{in\theta} \cdot r^m e^{-im\theta}\, r\,dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int |a\rangle\langle a|\, d^2a = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{+\infty} dr\, e^{-r^2} \cdot r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(n-m)\theta}$$

Για τα δύο αυτά ολοκληρώματα έχουμε ότι

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{nm} \quad (\text{ταυτότητα})$$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} dr\, e^{-r^2} r^{n+m+1} \xrightarrow[\substack{r\to 0 \Rightarrow y\to 0 \\ r\to +\infty \Rightarrow y\to +\infty}]{y=r^2 \Rightarrow dy=2r\,dr} \int_0^{+\infty} dy\, e^{-y} \cdot \frac{1}{2} y^n = \frac{1}{2}\cdot n!$$

Τελικά, θα έχουμε ότι

$$\int |a\rangle\langle a|\, d^2a = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \frac{1}{\cancel{2}} n! \cdot \cancel{2}\pi\delta_{nm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int |a\rangle\langle a|\, d^2a = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int |a\rangle\langle a|\, d^2a = 1 \qquad (80)$$

η οποία είναι και η σχέση πληρότητας των σύμφωνων καταστάσεών μας.

- Ορθογώνιοι τελεστές

Σε συνέχεια της ανάλυσής μας για το ηλεκτρικό πεδίο θα εισάγουμε κάποιους νέους τελεστές, οι οποίοι στην Κβαντική Οπτική έχει επικρατήσει να ονομάζονται ορθογώνιοι τελεστές (quadrature operators). Για τον ορισμό τους θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό του ηλεκτρικού πεδίου για μονοχρωματικό φως εντός μιας πεπερασμένης κοιλότητας [φύλλο ⑥ + εξ. (46)-(47)]

$$\vec{\hat{E}}_x(z,t) = \mathcal{E}_0 \left(\hat{a}\, e^{-i\omega t} + \hat{a}^{+} e^{+i\omega t}\right) \sin(kz) \qquad (81)$$

όπου θέσαμε ότι $\hat{a} \equiv \hat{a}(0)$ και $\hat{a}^{+} \equiv \hat{a}^{+}(0)$. Στη συνέχεια, εισάγουμε τους ορθογώνιους τελεστές οι οποίοι ορίζονται από τις σχέσεις

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right) \qquad (82\,a)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}\left(\hat{a} - \hat{a}^{+}\right) \qquad (82\,b)$$

Με τη βοήθεια των τελεστών $\hat{X}_1$ και $\hat{X}_2$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξ. (81) ως

$$\vec{\hat{E}}_x(z,t) = 2\,\mathcal{E}_0 \sin(kz)\left[\hat{X}_1 \cos(\omega t) + \hat{X}_2 \sin(\omega t)\right] \qquad (83)$$

Παρατηρείστε ότι οι τελεστές $\hat{X}_1$ και $\hat{X}_2$ είναι σαν να περιγράφουν δύο διαφορετικά πλάτη του πεδίου τα οποία ταλαντώνονται με διαφορά φάσης $\pi/2$. Θυμηθείτε επίσης ότι (φύλλο 5) για τους τελεστές θέσης και ορμής είχαμε ότι $\hat{q} \propto (\hat{a}+\hat{a}^{+})$ και $i\hat{p} \propto (\hat{a}-\hat{a}^{+})$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ουσιαστικά οι τελεστές $\hat{X}_1$ και $\hat{X}_2$ σχετίζονται με τους τελεστές θέσης ($\hat{q}$) και ορμής ($\hat{p}$) αντίστοιχα, αλλά είναι ορισμένοι από τις εξ. (82) έτσι ώστε να είναι αδιάστατοι. Επιπλέον, οι τελεστές των εξ. (82) ικανοποιούν τη μεταθετική σχέση

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2} \qquad (84)$$

Στη συνέχεια, θα πάρουμε τη μέση τιμή των τελεστών $\hat{X}_1$ και $\hat{X}_2$ χρησιμοποιώντας τις γνωστές μας number states από το χώρο Fock. Πριν το κάνουμε αυτό θυμίζουμε από την Κβαντομηχανική (π.χ. Τραχανάς, Τόμος II, σελ. 123) τη γενικευμένη αρχή της αβεβαιότητας: Αν $\hat{A}$ και $\hat{B}$ δύο τελεστές οι οποίοι περιγράφουν δύο ασυμβίβαστα φυσικά μεγέθη (δηλαδή $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{C} \neq 0$), τότε το γινόμενο των αβεβαιοτήτων τους θα ισούται με την τιμή του μεταθέτη τους, δηλαδή $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle \hat{C} \rangle|$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη γενικευμένη αρχή της αβεβαιότητας, βρίσκουμε ότι

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16} \Rightarrow \sqrt{\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle} \geq \frac{1}{4} \qquad (85)$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε αναλυτικά τις αβεβαιότητες των $\hat{X}_1$ και $\hat{X}_2$ με τη βοήθεια των number states. Γνωρίζοντας κανείς ότι $\langle \hat{X}_{1(2)} \rangle = \langle n | \hat{X}_{1(2)} | n \rangle$ και $\langle \hat{X}^2_{1(2)} \rangle = \langle n | \hat{X}^2_{1(2)} | n \rangle$, υπολογίζουμε ότι

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (86)$$

και επομένως για $n=0$ παίρνουμε ξανά την εξ. (85).

Επίσης, φαίνεται ότι για $n=0$ στην εξ. (86) έχουμε τη μικρότερη δυνατή αβεβαιότητα στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε τις number states.

Πριν κάνουμε την αντίστοιχη ανάλυση για τις σύμφωνες καταστάσεις, αξίζει να κάνουμε εδώ μια σημείωση. Αν πάρει κανείς το μεταθέτη του ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται στην εξ. (81) με τον number operator $\hat{n} = \hat{a}^{+}\hat{a}$ τότε βρίσκει ότι

$$[\hat{n}, \hat{E}_x] = \mathcal{E}_0 \sin(kz)(\hat{a}^+ - \hat{a}) \qquad (87)$$

Από τη γενικευμένη αρχή της αβεβαιότητας που αναφέραμε παραπάνω και από το γεγονός ότι ο number operator $\hat{n}$ και το ηλεκτρικό πεδίο είναι ασυμβίβαστα μεγέθη προκύπτει ότι

$$\Delta n \cdot \Delta E_x \geq \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 |\sin(kz)| \cdot |\langle \hat{a}^+ - \hat{a} \rangle| \qquad (88)$$

Χρησιμοποιώντας τις number states στην εξ. (88) προκύπτει ότι $\Delta n = 0$ καθώς και $|\langle \hat{a}^+ - \hat{a} \rangle| = 0$. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας τις number states μπορούμε να γνωρίζουμε με ακρίβεια τον αριθμό των φωτονίων που υπάρχουν στο χώρο, αλλά έχουμε τη μέγιστη αβεβαιότητα για τα μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζουν το πεδίο μας, όπως είναι για παράδειγμα η φάση του πεδίου. Έτσι λοιπόν, αν και οι number states μας επιτρέπουν να γνωρίζουμε τον αριθμό των φωτονίων στο χώρο με ακρίβεια, από την άλλη πλευρά, δε μας επιτρέπουν να έχουμε καμία πληροφορία για το πού είναι μέσα στο χώρο (πλήρης άγνοια για τη φάση του πεδίου). Αν σκεφτούμε ότι ο αριθμός των φωτονίων σχετίζεται με την ενέργεια του πεδίου, ενώ η φάση, με μία λίγο πιο αφηρημένη σκέψη, σχετίζεται με το χρόνο, συμπεραίνουμε ότι ίσως υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ της αβεβαιότητας στον αριθμό των φωτονίων Δn και σε εκείνη της φάσης Δφ, όπως συμβαίνει αντίστοιχα για την αβεβαιότητα της ενέργειας ΔE και εκείνης του χρόνου Δt. Κάτι τέτοιο φαίνεται πως πράγματι ισχύει (μία πολύ καλή ανάλυση πάνω στο θέμα αυτό μπορεί κανείς να βρει στο βιβλίο των Gerry και Knight, Introductory Quantum Optics, Κεφ. 2).

Στη συνέχεια, στρέφουμε και πάλι την προσοχή μας στις σύμφωνες καταστάσεις. Θυμηθείτε ότι στην εξ. (66) είχαμε υπολογίσει την αβεβαιότητα του πεδίου χρησιμοποιώντας τις σύμφωνες καταστάσεις και είχαμε βρει ότι αυτή ισούται με τη διακύμανση που παρουσιάζει το πεδίο στο κενό (n=0) μας και

$$(66) \Rightarrow \Delta E_x \equiv \sqrt{\langle (\Delta \hat{E}_x)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} = E_0 \qquad (89)$$

Οι σύμφωνες καταστάσεις λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι προσομοιάζουν τις κλασικές καταστάσεις (classical-like states) μιας και δίνουν τη σωστή μορφή για τη μέση τιμή του πεδίου, αλλά επίσης περιέχουν μόνο τη διακύμανση του κενού [παρατηρείστε ότι η εξ. (89) είναι σταθερή ενώ η εξ. (66) όχι]. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τους ορθογώνιους τελεστές των εξ. (82) βρίσκουμε ότι

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_a = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_a = \frac{1}{4} \qquad (90)$$

όπου για να υπολογίσουμε τις παραπάνω ποσότητες χρησιμοποιήσαμε τη σύμφωνη κατάσταση $|a\rangle$. Παρατηρούμε και πάλι, όπως και στην εξ. (89), ότι οι σύμφωνες καταστάσεις λαμβάνουν υπόψιν μόνο τη διακύμανση του κενού, και έτσι μειώνουν ουσιαστικά στο ελάχιστο δυνατό το γινόμενο $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_a \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_a$, αλλά και τα επιμέρους στοιχεία του γινομένου αυτού $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_a$ και $\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_a$. Θυμηθείτε όμως τώρα ότι ουσιαστικά οι τελεστές $\hat{X}_1$ και $\hat{X}_2$ είναι οι αδιάστατοι τελεστές της θέσης και της ορμής, όπως είδαμε και παραπάνω. Επομένως, οι σύμφωνες καταστάσεις μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια τη θέση και την ορμή των φωτονίων.

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας για τις σύμφωνες οφείλουμε να αναρωτηθούμε, ποια είναι η φυσική σημασία της μιγαδικής ιδιοτιμής α του τελεστή καταστροφής $\hat{a}$; Τις περισσότερες φορές στην Κβαντομηχανική αντιμετωπίζουμε Ερμιτιανούς τελεστές με πραγματικές ιδιοτιμές. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει εδώ μιας και ο τελεστής καταστροφής $\hat{a}$ δεν παριστάνει κάποιο φυσικό μέγεθος με αποτέλεσμα να τίθεται το συγκεκριμένο ερώτημα για τις ιδιοτιμές του. Εφόσον οι ιδιοτιμές του $\hat{a}$ είναι μιγαδικές, τότε όπως κάναμε και πιο πάνω σε κάποιο σημείο της ανάλυσής μας, θα γράψουμε τις ιδιοτιμές στην πολική τους μορφή, δηλαδή $a = |a| e^{i\theta}$. Θυμηθείτε, τώρα, ότι το πραγματικό μέρος εμφανιζόταν στην εξ. (64), όπου υπολογίσαμε τη μέση τιμή του πεδίου με τη βοήθεια της σύμφωνης κατάστασης $|a\rangle$.

Από την παρατήρηση αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ποσότητα $|a|$ σχετίζεται με το πλάτος του πεδίου. Επιπλέον, ας υπολογίσουμε τη μέση τιμή του number operator $\hat{n} = \hat{a}^{+}\hat{a}$ χρησιμοποιώντας μία σύμφωνη κατάσταση $|a\rangle$:

$$\langle n \rangle_a = \langle a | \hat{n} | a \rangle = \langle a | \hat{a}^+ \hat{a} | a \rangle = |a|^2 \qquad (91)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι η ποσότητα $|a|^2$ μας δίνει το μέσο αριθμό φωτονίων που έχουμε στην κατάσταση $|a\rangle$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\langle a | \hat{n}^2 | a \rangle = \langle a | \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} | a \rangle = \langle a | \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{a} | a \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle a | \hat{n}^2 | a \rangle = |a|^4 + |a|^2 = \langle \hat{n} \rangle_a^2 + \langle \hat{n} \rangle_a \qquad (92)$$

Έτσι λοιπόν, από τις εξ. (91) και (92) μπορούμε να υπολογίσουμε τις διακυμάνσεις (fluctuations) που θα έχει το πεδίο αν βρεθεί σε μία σύμφωνη κατάσταση $|a\rangle$, μιας και

$$\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle_a - \langle \hat{n} \rangle_a^2} = \sqrt{\cancel{\langle \hat{n} \rangle_a^2} + \langle \hat{n} \rangle_a - \cancel{\langle \hat{n} \rangle_a^2}} = \sqrt{\langle n \rangle_a} = \sqrt{\bar{n}} \qquad (93)$$

όπου συμβολίσαμε $\bar{n} = \langle n \rangle_a$ (το συμβολισμό αυτό μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε σε κάθε περίπτωση που χρειάζεται να υπολογίσουμε μία μέση τιμή μιας και στα μαθηματικά συνηθίζεται τη μέση τιμή ενός μεγέθους να τη συμβολίζουμε με το γράμμα που αναπαριστά το μέγεθός μας και με μία παύλα από πάνω). Η εξ. (93) μας δίνει την αβεβαιότητα για τον αριθμό των φωτονίων σε μία σύμφωνη κατάσταση, ή με άλλα λόγια, την αβεβαιότητα για την ενέργεια της σύμφωνης κατάστασης $|a\rangle$, μιας και όπως έχουμε δει και νωρίτερα ο αριθμός των φωτονίων μίας κατάστασης σχετίζεται με την ενέργεια της κατάστασης αυτής.

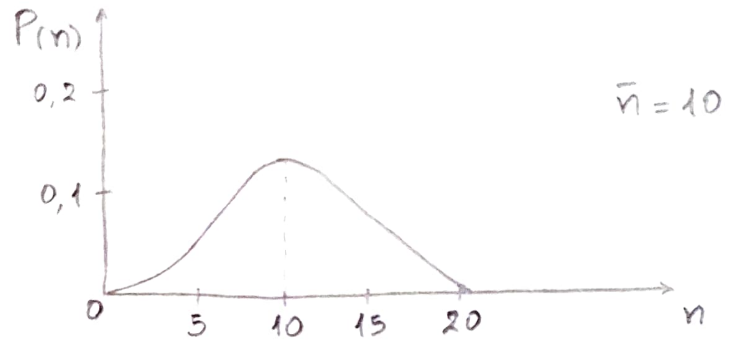
Εάν τώρα θέλουμε να δούμε πόσα φωτόνια υπάρχουν για μία σύμφωνη κατάσταση τότε θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε μία μέτρηση χρησιμοποιώντας τις number states έτσι ώστε να ανιχνεύσουμε πόσα φωτόνια έχουμε στη σύμφωνη αυτή κατάσταση. Η πιθανότητα λοιπόν να βρούμε n φωτόνια στην κατάσταση $|a\rangle$ είναι

$$P(n) = |\langle n|a\rangle|^2 \overset{(62)}{=} e^{-|a|^2} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{|a|^{2n'}}{n'!} |\langle n|n'\rangle| \overset{n'=n}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow P(n) = e^{-|a|^2} \frac{|a|^{2n}}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \qquad (94)$$

μιας και $\bar{n} = |a|^2$ από την εξ. (91). Στην ουσία, η εξ. (94) σε συνδυασμό με την εξ. (93) υποδεικνύουν ότι τα φωτόνια υπακούουν σε μία κατανομή Poisson με μέση τιμή $\bar{n}$. Ένα παράδειγμα της κατανομής Poisson της εξ. (94) με $\bar{n} = 10$ δίνεται στο σχήμα παρακάτω.




Εφόσον παραπάνω είδαμε τη φυσική σημασία του $|a|$ ας προσπαθήσουμε να βρούμε και τη φυσική σημασία της φάσης $\theta$. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να ορίσουμε ένα σύνολο καταστάσεων $|\varphi\rangle$ το οποίο να περιγράφει τη φάση του πεδίου μας. Αποδεικνύεται (Gerry και Knight, Κεφ. 2) ότι η κατάσταση φάσης γράφεται συναρτήσει των number states ως $|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi}|n\rangle$, ενώ η συνθήκη νορμαλισμού για τις καταστάσεις αυτές γράφεται ως $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, |\varphi\rangle\langle\varphi| = 1$. Η πιθανότητα, λοιπόν, να βρούμε τη φάση $\theta$ μιας σύμφωνης κατάστασης είναι

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}|\langle\varphi|a\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2}\left|\left(\sum_{n'=0}^{\infty} e^{-in'\varphi}\langle n'|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right)\right|^2_{n=n'} \Rightarrow$$

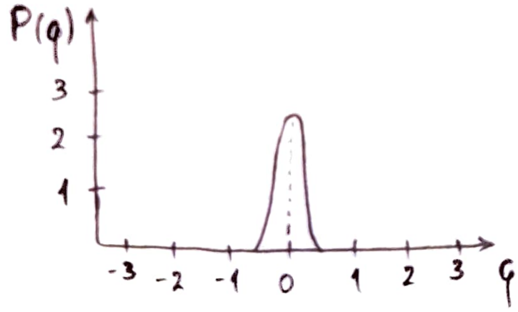
$$\Rightarrow P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\varphi}\cdot\frac{|a|^n\cdot e^{in\theta}}{\sqrt{n!}}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\theta-\varphi)} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 \qquad (95)$$

η οποία είναι και πάλι μία κατανομή Poisson. Στην περίπτωση όμως που η ποσότητα $|\alpha|^2$ είναι πολύ μεγάλη μπορούμε προσεγγιστικά να γράφουμε ότι

$$P(\varphi) \simeq \sqrt{\frac{2|\alpha|^2}{\pi}} \exp\left[-2|\alpha|^2(\varphi-\theta)^2\right] \qquad (96)$$

Με άλλα λόγια, στο όριο όπου $|\alpha|^2 >>$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατανομή Poisson της εξ. (95) με μία Gaussian, η οποία παρουσιάζει το μέγιστό της για $\theta = \varphi$. Ένα παράδειγμα της κατανομής αυτής φαίνεται στο επόμενο σχήμα



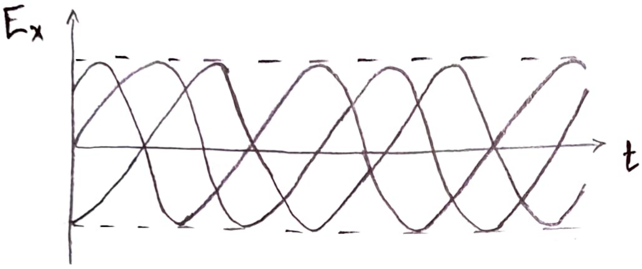

$\bar{n} = 10 \ (\Rightarrow |\alpha|^2 = 10)$

Σημειώνουμε ότι η κατανομή γίνεται στενότερη όσο το $\bar{n} = |\alpha|^2$ μεγαλώνει.

Συνοψίζοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω, είδαμε ότι οι σύμφωνες καταστάσεις, οι οποίες εισήχθησαν από τον Glauber το 1963 (Phys. Rev. 130, 2529) και ορίζονται στην εξ. (62), απο-

τελούν ένα μη-ορθοκανονικό σύνολο μιας και $\langle\beta|\alpha\rangle\neq 0$.
Οι σύμφωνες καταστάσεις μας επιτρέπουν να βρούμε τη σωστή συμπεριφορά για τη μέση τιμή του πεδίου, μιας και αυτή πρέπει να έχει ημιτονοειδή εξάρτηση, και για αυτό είναι γνωστές ως οι "πιο κλασικές" καταστάσεις.
Ένας επιπλέον λόγος για την κοντινή τους σχέση με τις κλασικές καταστάσεις είναι ότι, παίρνοντας τη διακύμανση του πεδίου με τη βοήθεια των σύμφωνων καταστάσεων λαμβάνουμε υπόψιν μόνο τη διακύμανση του κενού σε αντίθεση με ότι συμβαίνει με τις number states. Η ιδιότητα αυτή κάνει το σύμφωνο πεδίο ιδανικό υποψήφιο για πειράματα μιας και έχει τον ελάχιστο δυνατό θόρυβο, δηλαδή με άλλα λόγια, τις ελάχιστες δυνατές διακυμάνσεις. Αξίζει επίσης να θυμίσουμε ότι παρουσιάζουν οι σύμφωνες καταστάσεις την ελάχιστη δυνατή αβεβαιότητα για το γινόμενο $(\Delta X_1)\cdot(\Delta X_2)$ το οποίο είναι ανάλογο του $(\Delta q)(\Delta p)$, δηλαδή προκύπτει τελικά ότι $(\Delta q)(\Delta p)=\hbar/2$.
Τέλος, αξίζει να κάνουμε μία παρατήρηση για την κατανομή της φάσης, η οποία θα φανεί χρήσιμη στη συνέχεια. Από τις εξ. (95) και (96) προέκυψε ότι όσο πιο μεγάλη η μέση τιμή των φωτονίων $\bar{n}=|\alpha|^2$ τόσο πιο στενή, και

προφανώς εντοπισμένη, η κατανομή της φάσης. Αντιθέτως, για τις number states είχαμε πλήρη γνώση για το πλάτος του πεδίου, αλλά πλήρη άγνοια για τη φάση του (δείτε και το σχήμα παρακάτω).




Μονοχρωματικό κύμα για τις number states ⇒ καλά ορισμένο πλάτος και πλήρης άγνοια για τη φάση.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή για τις σύμφωνες καταστάσεις ας δούμε μία ακόμα εφαρμογή τους η οποία μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα το Η/Μ πεδίο. Όπως είδαμε ήδη από την εξ. (4) μπορούμε να περιγράψουμε το Η/Μ πεδίο με τρόπο ανάλογο με εκείνον που περιγράφουμε τον αρμονικό ταλαντωτή. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με $\hat{q}$ τον τελεστή θέσης και με $|q\rangle$ τις ιδιοσυναρτήσεις του, τότε η αναπαράσταση θέσης για μία number state $|n\rangle$ του ταλαντωτή θα είναι $\psi_n(q) = \langle q|n\rangle$. Χρησιμοποιώντας τον τελεστή ορμής $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ στις εξισώσεις ορισμού των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής [δείτε τις εξ. (5) για ένα m], παίρνουμε ότι

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{q} + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \quad \text{και} \quad \hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{q} - \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \qquad (97)$$

Από το γεγονός ότι $\hat{a}|0\rangle = 0$ έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{q} + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)|0\rangle = 0 \overset{\times\langle q|}{\Rightarrow} \left(\omega\hat{q} + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\langle q|0\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\omega\hat{q} + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\psi_0(q) = 0 \qquad (98)$$

Λύνοντας τη Δ.Ε. της εξ. (98) και από τη συνθήκη νορμαλισμού $|\psi_0(q)|^2 = 1$, προκύπτει ότι

$$\psi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar}\right) \qquad (99)$$

Με τη βοήθεια της εξ. (41) μπορεί κανείς να υπολογίσει τα $\psi_1(q)$, $\psi_2(q)$, ... κτλ. Η γενική μορφή για το $\psi_n(q)$ σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι

$$\psi_n(q) = \frac{(\hat{a}^{+})^n}{\sqrt{n!}}\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\,q\right)\psi_0(q) \qquad (100)$$

όπου $H_n$ είναι τα πολυώνυμα Hermite τα οποία τα έχουμε συναντήσει ξανά στην ανάλυσή μας για τον αρμονικό ταλαντωτή (η ανάλυση υπάρχει σχεδόν σε κάθε εισαγωγικό βιβλίο για την Κβαντομηχανική). Αποδεικνύεται ότι οι κυματοσυναρτήσεις που περιγράφονται στην εξ. (100) είναι ορθογώνιες, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(q)\, \psi_m(q)\, dq = \delta_{nm} \qquad (101)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις κυματοσυναρτήσεις της εξ. (100) μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\langle \hat{q} \rangle$, $\langle \hat{q}^2 \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ και $\langle \hat{p}^2 \rangle$, και συγκεκριμένα βρίσκουμε ότι

$$\langle \hat{q} \rangle = 0 \quad , \quad \langle \hat{q}^2 \rangle = \frac{\hbar}{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$\langle \hat{p} \rangle = 0 \quad , \quad \langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (102)$$

όπου έχουμε συμβολίσει $\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(q)\, \hat{A}\, \psi_n(q)\, dq$. Επομένως, από τις εξ. (102) βρίσκουμε για τις αβεβαιότητες της θέσης και της ορμής ότι

$$\Delta q = \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle = \frac{\hbar}{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$\Delta p = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (103)$$

και συνεπώς προκύπτει ότι

$$\Delta p \cdot \Delta q = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (104)$$

και συγκεκριμένα έχουμε την ελάχιστη δυνατή αβεβαιότητα για την κατάσταση $\psi_0(q)$, δηλαδή για $n=0$.

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η κατάσταση $\psi_0(q)$ περιγράφει ένα κυματοπακέτο εντός δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή το οποίο έχει την ελάχιστη δυνατή αβεβαιότητα θέσης και ορμής. Επιπλέον, το κυματοπακέτο αυτό έχει Γκαουσιανή μορφή, όπως φαίνεται και από τη μαθηματική του έκφραση στην εξ. (99) (Γκαουσιανή συνάρτηση: $\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-(x-b)^2/2c^2}\, dx = \sqrt{2}\, a |c| \sqrt{\pi}$). Επίσης, από την εξ. (100) συμπεραίνουμε ότι, αν το κυματοπακέτο $\psi_0(q)$ έχει Γκαουσιανή μορφή, τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για την κατάσταση $\psi_n(q) = \langle q|n\rangle$ μιας και $\psi_n(q) \propto \psi_0(q)$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την εξ. (62), η οποία μας δίνει τη σύμφωνη κατάσταση $|a\rangle$ ως γραμμικό συνδυασμό των number states, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\psi_a(q) = \langle q|a\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\langle q|n\rangle}_{\psi_n(q)} \overset{(100)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \psi_a(q) = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a/\sqrt{2})^n}{n!} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\, q\right) \psi_0(q) \qquad (105)$$

όπου $\psi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar}\right)$. Από την εξ. (105) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ουσιαστικά η $\psi_a(q)$ γράφεται και αυτή συναρτήσει της $\psi_0(q)$. Προκύπτει λοιπόν ότι και η $\psi_a(q)$ θα περιγράφει ένα κυματοπακέτο ελάχιστης αβεβαιότητας και Γκαουσιανής μορφής αλλά για οποιοδήποτε $n$. Εάν επιπλέον υπολογίσουμε τη χρονική εξέλιξη της σύμφωνης κατάστασης $|a\rangle$ με τη βοήθεια της Χαμιλτονιανής $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ δηλαδή,

$$|a,t\rangle \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}|a\rangle = e^{-i\omega t/2}\, e^{-i\omega t\,\hat{a}^+\hat{a}}|a\rangle =$$

$$= e^{-i\omega t/2}\, e^{-i\omega t\,\hat{a}^+\hat{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\, e^{-\frac{1}{2}|a|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n e^{-i\omega t n}}{\sqrt{n!}}|n\rangle\, e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\, e^{-i\omega t/2} =$$

$$= |a\, e^{-i\omega t}\rangle\, e^{-i\omega t/2}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι μια σύμφωνη κατάσταση η οποία εξελίσσεται με το χρόνο σε κάποια άλλη σύμφωνη κατάσταση με ιδιοτιμή $ae^{-i\omega t}$ (αντί για $a$ που ήταν αρχικά) και διαφορετική φάση. Το κυματοπακέτο λοιπόν της εξ. (105) ύστερα από χρόνο $t$ θα γράφεται

$$\psi_a(q,t) = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ae^{-i\omega t}/\sqrt{2})^n}{n!} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\, q\right) \psi_0(q) \qquad (106)$$

Το σημαντικό που πρέπει να σημειώσουμε εδώ είναι ότι από την εξ. (106) προκύπτει ότι το κυματοπακέτο δε θα χάσει το σχήμα του ύστερα από χρόνο $t$ κάτι το οποίο δεν ισχύει για τις number states (προσέξτε ότι όλα τα αποτελέσματα που παραθέτουμε εδώ ισχύουν για μονοχρωματικό Η/Μ πεδίο στον ελεύθερο χώρο). Το μόνο που αλλάζει είναι το κέντρο της Γκαουσιανής κατανομής, το οποίο προκύπτει ότι εκτελεί την κίνηση ενός κλασικού σημείου το οποίο βρίσκεται εντός δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή.