3^{ο} Σετ Ασκήσεων-Μοντέρνα Φυσική

1) Κατά τη μελέτη της αλληλεπίδρασης ενός κβαντικού εκπομπού δύο επιπέδων με κλασικό μονοχρωματικό Η/Μ πεδίο και για την περίπτωση όπου έχουμε φαινόμενα απόσβεσης ($\Gamma \neq 0$), αλλά μηδενικό αποσυντονισμό ($\Delta = 0$), καταλήξαμε στις εξισώσεις κίνησης για τα πλάτη πιθανότητας [εξ. (196a) και (196b)]
$$i\dot{a}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2}a_2(t),$$
$$i\dot{a}_2(t) = -\frac{\Omega}{2}a_1(t) - i\Gamma a_2(t),$$
όπου Ω η συχνότητα Rabi. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τη δεύτερη εξίσωση και χρησιμοποιώντας και την πρώτη από αυτές καταλήξαμε σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για το πλάτος $a_2(t)$, στην οποία αντιστοιχεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$$p^2 - i\Gamma p - \frac{|\Omega|^2}{4} = 0,$$
το οποίο έχει λύσεις $p_{1,2} = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{|\Omega|^2 - \Gamma^2}}{2}$. Μελετήστε την περίπτωση για την οποία $\Gamma > |\Omega|$.

2) Α) Θεωρείστε ξανά τον κβαντικό εκπομπό δύο επιπέδων ο οποίος αλληλεπιδρά με κλασικό μονοχρωματικό Η/Μ πεδίο (το σύστημα αυτό ονομάζεται και ημικλασικό μοντέλο Rabi). Θεωρώντας ότι στο μοντέλο αυτό δεν έχουμε φαινόμενα απόσβεσης ($\Gamma = 0$), αλλά έχουμε αποσυντονισμό ($\Delta \neq 0$) βρήκαμε τις εξισώσεις κίνησης για τα πλάτη πιθανότητας ότι είναι
$$i\dot{a}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2}a_2(t)e^{i\Delta t},$$
$$i\dot{a}_2(t) = -\frac{\Omega}{2}a_1(t)e^{-i\Delta t}.$$
Σε αναλογία με ότι κάναμε στο μάθημα, βρείτε τις πιθανότητες κατάληψης $P_1(t)$ και $P_2(t)$ της θεμελιώδους και της διεγερμένης καταστάσεως του κβαντικού εκπομπού αντίστοιχα, θεωρώντας ότι $a_1(0) = 0$ και $a_2(0) = 1$. Συγκρίνετε τις αντίστοιχες πιθανότητες που βρήκαμε στο μάθημα και σχολιάστε.
Β) Στη συνέχεια, υπολογίστε τη μέση διπολική ροπή του κβαντικού εκπομπού, σε αντιστοιχία με ό,τι κάναμε στο μάθημα. Αναφέρετε τις ομοιότητες και τις διαφορές (αν υπάρχουν) μεταξύ του αποτελέσματος που βρήκατε και του αντίστοιχου αποτελέσματος που βρήκαμε στο μάθημα.

3) Α) Θεωρείστε τη Χαμιλτονιανή του μοντέλου Jaynes-Cummings $\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)$. Αποδείξτε ότι ο μεταθέτης της αδιατάρακτης

Χαμιλτονιανής, $\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) + \hbar\omega\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}$, με τη Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης, $\hat{H}_{int} = \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{\alpha} + \hat{\sigma}_-\hat{\alpha}^\dagger)$, ισούται με το μηδέν για την περίπτωση όπου δεν έχουμε αποσυμφωνία (detuning), δηλαδή $\left[\hat{H}_0, \hat{H}_{int}\right] = 0$ για $\omega_0 = \omega$.

B) Στη συνέχεια, αποδείξτε για κάθε ω ότι $\left[\hat{H}, \hat{N}_e\right] = 0$, όπου $\hat{N}_e = |2\rangle\langle 2| + \hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}$ ο τελεστής ο οποίος μας δίνει τον αριθμό των διεγέρσεων στο σύστημά μας. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα αυτό.

4) Υπολογίστε τη μέση διπολική ροπή του συστήματός μας από την εξ. (191) (ημικλασική προσέγγιση) για μηδενικό αποσυντονισμό [δείτε τις εξ. (183a) και (183b)]. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις εξ. (265a) και (265b) (κβαντική προσέγγιση με μηδενικό αποσυντονισμό) υπολογίστε τη μέση διπολική ροπή του συστήματός μας (**<u>Σημείωση</u>**: Για την εξήγηση των αποτελεσμάτων της άσκησης αυτής θα πρέπει κανείς να έχει γνώση για τις dressed states του συστήματός μας. Μιας και οι dressed states στην ημικλασική προσέγγιση είναι εκτός ύλης δεν ζητείται εδώ εξήγηση για το αποτέλεσμα. Αν κάποιος όμως θέλει να καταλάβει το αποτέλεσμα της άσκησης αυτής μπορεί να συμβουλευτεί το σετ σημειώσεων 7a, το οποίο είναι εκτός ύλης, καθώς και το Κεφάλαιο 11 από το βιβλίο Quantum Optics for Beginners).

5) Διαγωνοποιείστε τη Χαμιλτονιανή της εξ. (275) έτσι ώστε να βρείτε τις ιδιοτιμές της [εξ. (276)] και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα [εξ. (277)].