Στη συνέχεια σημειώστε το εξής πολύ σημαντικό:

Ξεκινήσαμε την ανάλυσή μας θεωρώντας ότι το σύνθετο σύστημά μας περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση της εξ. (258) με αρχικές συνθήκες $c_1(0) = 1$ και $c_2(0) = 0$, δηλαδή για $t=0$ είχαμε $|\psi(0)\rangle = |1, n\rangle \equiv \equiv |1\rangle \otimes |n\rangle$, όπου προφανώς η κατάσταση $|1\rangle$ αναφέρεται στο άτομο και η $|n\rangle$ στο πεδίο. Όμως, για $t \neq 0$ η κατάσταση του σύνθετου συστήματος $|\psi(t)\rangle$ δεν θα μπορεί να γραφεί ως το τανυστικό $|\psi_{ατόμου}\rangle \otimes |\psi_{πεδίου}\rangle$. Στην Κβαντομηχανική, οι καταστάσεις ενός σύνθετου συστήματος AB, το οποίο αποτελείται από τα υποσυστήματα A και B, οι οποίες δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή του τανυστικού γινομένου, δηλαδή $|\psi^{AB}\rangle \neq |\psi^{A}\rangle \otimes |\psi^{B}\rangle$, ονομάζονται συμπλεκτες καταστάσεις (αν μπορούν να γραφούν όμως ως τανυστικό γινόμενο, $|\psi^{AB}\rangle = |\psi^{A}\rangle \otimes |\psi^{B}\rangle$, ονομάζονται διαχωρίσιμες). Περισσότερα για τις καταστάσεις αυτές θα πούμε στο κομμάτι της Κβαντικής Πληροφορίας.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι για $t \neq 0$ το σύστημά μας θα βρίσκεται σε μία σύμπλεκτη κατάσταση.

Τελειώνοντας την ανάλυσή μας εδώ, και πριν προχωρήσουμε στην περίπτωση όπου το πεδίο μας βρίσκεται σε μία σύμφωνη κατάσταση, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το άτομό μας βρίσκεται αρχικά στη διεγερμένη του κατάσταση. Επομένως, τώρα η γενική κατάσταση η οποία θα περιγράφει το σύστημά μας θα είναι η

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{c_2(t)\, e^{-i\omega_0 t/2}\, e^{-in\omega t}}_{\tilde{c}_2(t)} |2,n\rangle + \underbrace{c_1(t)\, e^{i\omega_0 t/2}\, e^{-i(n+1)\omega t}}_{\tilde{c}_1(t)} |1,n+1\rangle \tag{264}$$

με αρχικές συνθήκες $c_2(0)=1$ και $c_1(0)=0$. Αντικαθιστώντας τώρα την εξ. (264) στην εξίσωση Schrödinger και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που αναφέραμε παραπάνω βρίσκουμε ότι (θεωρούμε ξανά ότι $\Delta = \omega - \omega_0 = 0$)

$$c_1(t) = -i\sin(g\sqrt{n+1}\,t) \tag{265a}$$

$$c_2(t) = \cos(g\sqrt{n+1}\,t) \tag{265b}$$

και επομένως η πιθανότητα κατάληψης της εκάστοτε κατάστασης είναι

$$P_1(t) = |c_1(t)|^2 = \sin^2(g\sqrt{n+1}\,t) = \sin^2(\Omega_n t) \tag{266a}$$

$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \cos^2(g\sqrt{n+1}\,t) = \cos^2(\Omega_n t) \tag{266b}$$

όπου τώρα η συχνότητα Rabi είναι $\Omega_n = g\sqrt{n+1}$. Επομένως, στη γραφική παράσταση για το $P_2(t)$ που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα το μόνο που θα αλλάζει είναι μια μετατόπιση φάσης (για $t=0$ θα είναι $P_2(0)=1$). Παρ' όλα αυτά, σημειώστε κάτι πολύ σημαντικό: για την περίπτωση όπου $n=0$ η συχνότητα Rabi είναι $\Omega_n \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και απουσία πεδίου ($n=0$) ένα άτομο δύο επιπέδων το οποίο βρίσκεται μέσα σε μια κοιλότητα θα παρουσιάζει ταλαντώσεις Rabi. Αυτές οι ταλαντώσεις Rabi ονομάζονται ταλαντώσεις Rabi του κενού (vacuum-field Rabi oscillations).

Προφανώς, αυτό είναι ένα φαινόμενο το οποίο δε θα μπορούσε να εξηγηθεί με την ημικλασική προσέγγιση, όπου θεωρούμε το πεδίο μας κλασικό.

Το φαινόμενο αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι το άτομο αποδιεγείρεται αυθόρμητα εκπέμποντας ένα φωτόνιο και στη συνέχεια, ύστερα από κάποιο χρόνο, το απορροφά και πάλι και διεγείρεται μέχρι να αποδιεγερθεί ξανά κτλ. Το πόσο γρήγορα λαμβάνει χώρα αυτή η διαδικασία εξαρτάται από τη συχνότητα Rabi, και πιο συγκεκριμένα από τη σταθερά σύζευξης g. Επομένως, το άτομό μας παρουσιάζει αντιστρεπτή δυναμική (reversible dynamics) αφού αποδιεγείρεται και διεγείρεται συνεχώς. Προφανώς, αν η κοιλότητα είχε απώλειες τότε ύστερα από την πάροδο κάποιου χρονικού διαστήματος το άτομό μας δεν θα διεγειρόταν ξανά, όμως εδώ μελετάμε την ιδανική περίπτωση.

- Πεδίο σε σύμφωνη κατάσταση (coherent state)

Στην παραπάνω περίπτωση μελετήσαμε την αλ-

αλληλεπίδραση ύλης-φωτός για άτομο δύο επιπέδων το οποίο βρίσκεται εντός κοιλότητας και αλληλεπιδρά με Η/Μ πεδίο το οποίο περιγράφεται από μία number state $|n\rangle$. Σαν γενίκευση του παραδείγματος αυτού μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι το πεδίο μας δεν βρίσκεται σε μία κατάσταση $|n\rangle$, αλλά σε μία επαλληλία τέτοιων καταστάσεων. Εμείς εδώ θα θεωρήσουμε ότι το πεδίο μας βρίσκεται σε μία συγκεκριμένη επαλληλία των number states όπως είναι μία σύμφωνη κατάσταση [εξ. (62)], την οποία θα συμβολίσουμε με $|\alpha\rangle$.

Όσο αναφορά το άτομο θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση, $|1\rangle$. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι το σύνθετο σύστημά μας τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle \otimes |\alpha\rangle \equiv |1, \alpha\rangle$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν και την εξ. (62) μπορούμε να γράψουμε την κατάσταση του σύνθετου συστήματός μας τη χρονική στιγμή $t=0$, ως

$$|1, a\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |1, n\rangle \qquad (267)$$

Τώρα, εφόσον το σύστημά μας είναι το ίδιο με το προηγούμενο παράδειγμα (η μόνη αλλαγή είναι ότι θεωρήσαμε ότι το πεδίο μας βρίσκεται σε μία σύμφωνη κατάσταση αντί σε μία number state) θα χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή του και πάλι την εξίσωση Jaynes-Cummings [εξ. (257)]. Ο τρίτος όρος της Χαμιλτονιανής αυτής, ο οποίος όπως είπαμε περιγράφει την αλληλεπίδραση του ατόμου με το πεδίο, μας υποδεικνύει ότι για κάθε όρο $|1,n\rangle$ της εξ. (267) θα υπάρχει σύζευξη με τους αντίστοιχους όρους $|2,n-1\rangle$. Με άλλα λόγια, η κατάσταση του σύνθετου συστήματός μας μια τυχαία χρονική στιγμή t θα γράφεται

$$|\psi_c(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\,c_{1,n}(t)\,e^{i\omega_0 t/2}\,e^{-in\omega t}\,|1,n\rangle +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\,e^{-i\omega_0 t/2}\,e^{-i(n-1)\omega t}\,c_{2,n}(t)\,|2,n-1\rangle\Big] \quad (268)$$

όπου σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες είναι $c_{1,n}(0)=1$ και $c_{2,n}(0)=0$. Παρατηρείστε ότι ουσιαστικά αν εφαρμόσουμε την κατάσταση της εξ. (268) στην εξίσωση Schrödinger μαζί με τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings, θα πάρουμε για τους συντελεστές $c_{1,n}(t)$ και $c_{2,n}(t)$ ακριβώς τις ίδιες σχέσεις που πήραμε και για τους συντελεστές $c_1(t)$ και

$c_2(t)$ της εξ. (258) [δείτε πάλι τις εξ. (261)].

Επομένως, η γενική κατάσταση που θα περιγράφει το σύνθετο σύστημά μας το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην κατάσταση $|1,\alpha\rangle$, γράφεται τελικά

$$|\psi_c(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, e^{i\omega_0 t/2}\, e^{-in\omega t}\cos(g\sqrt{n}\,t)\,|1,n\rangle -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, i e^{-i\omega_0 t/2}\, e^{-i(n-1)\omega t}\sin(g\sqrt{n}\,t)\,|2,n-1\rangle\Big] \qquad (269)$$

Παρατηρείστε ότι το δεύτερο άθροισμα της παραπάνω εξίσωσης ξεκινάει από $n=1$. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι για $n=0$ το σύστημά μας δεν θα έχει χρονική(*) Αυτό μπορεί κανείς να το διαπιστώσει, αρχικά από μαθηματική σκοπιά, από την εξ.

(*) εξέλιξη

(261b) μιας και για $n=0$ μας δίνει $c_2(t)=0$ $\forall t$, αλλά και από φυσική σκοπιά μιας και είναι αναμενόμενο ότι αν τοποθετήσουμε ένα άτομο στη θεμελιώδη του κατάσταση μέσα σε μία κοιλότητα χωρίς πεδίο, τότε τίποτα δε θα αλλάξει με την πάροδο του χρόνου. Τώρα, μιας και για $n=0$ από την εξ. (261) θα έχουμε $c_1(t)=1$ $\forall t$ μπορούμε να γράψουμε για τη γενική κατάσταση του συστήματος "άτομο + πεδίο" ότι

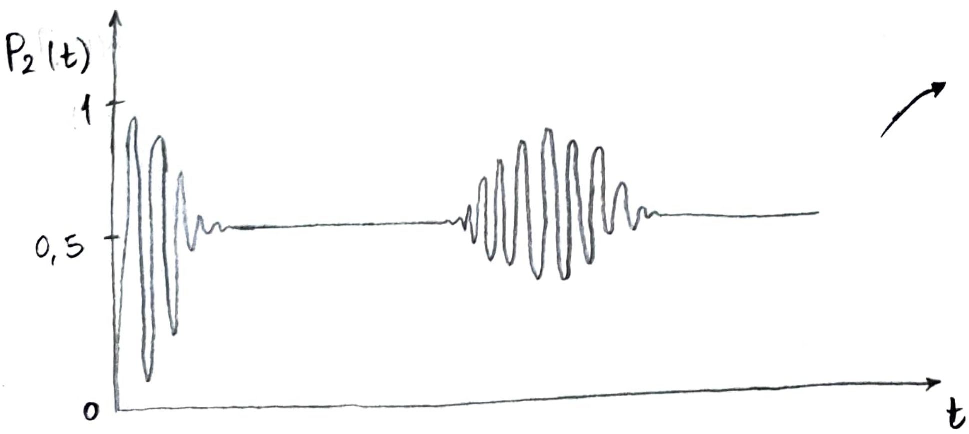
$$|\psi_c(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\left[|1,0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\left(e^{+i\omega_0 t/2}e^{-in\omega t}\cos(g\sqrt{n}t)\cdot |1,n\rangle - i e^{-i\omega_0 t/2}e^{-i(n-1)\omega t}\sin(g\sqrt{n}t)|2,n-1\rangle\right]\quad (270).$$

Εφόσον έχουμε προσδιορίσει τους συντελεστές χρονικής εξέλιξης της εκάστοτε κατάστασης, μπορούμε στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τον πληθυσμό της εκάστοτε κατάστασης του ατόμου. Έτσι λοιπόν, ο πληθυσμός της διεγερμένης κατάστασης του ατόμου θα είναι

$$P_2(t) = |c_{2,n}(t)|^2 = \sum_n \frac{|a|^{2n}}{n!} e^{-|a|^2} \sin^2(g\sqrt{n}\, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2(t) = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \sin^2(\Omega_n t) \qquad (271)$$

μιας και θυμίζουμε ότι $|a|^2 = \bar{n}$ είναι ο μέσος αριθμός φωτονίων που έχουμε μέσα στην κοιλότητα και Ω_n η αντίστοιχη συχνότητα Rabi. Η εξ. (271) απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα



μιας και η $P_2(t)$ είναι αρκετά πολύπλοκη, εδώ απεικονίζουμε μόνο τη μορφή που έχει για τυπικές τιμές των $\bar{n}$ και Ω_n

Παρατηρούμε λοιπόν από την εξ. (271), αλλά και από το παραπάνω σχήμα, ότι για την περίπτωση αυτή ο πληθυσμός της διεγερμένης κατάστασης του ατόμου δεν έχει πλέον μια απλή συμπεριφορά, π.χ. ημιτονοειδή όπως στην ημικλασική προσέγγιση. Το γεγονός αυτό, από μαθηματικής απόψεως, είναι αναμενόμενο μιας και όπως φαίνεται από την εξ. (272) έχουμε μια κατανομή Poisson για τον αριθμό των φωτονίων n [θυμηθείτε την εξ. (94)] με αποτέλεσμα να υπάρχει μια διασπορά για τις διάφορες συχνότητες Rabi Ωn που προκύπτουν. Παρατηρούμε λοιπόν ότι άλλοτε οι συχνότητες Rabi είναι σε φάση και παρατηρούνται ταλαντώσεις, ενώ για κάποιες άλλες χρονικές στιγμές βρίσκονται σε ασυμφωνία και δεν παρατηρούνται ταλανεώσεις. Συγκεκριμένα στο σχήμα παρατηρούνται ταλαντώσεις στην αρχή της χρονικής εξέλιξης οι οποίες στη συνέχεια εξασθενούν μέχρι να αποσβέσουν τελείως. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται κατάρρευση (collapse) των ταλαντώσεων. Όμως παρατηρείται ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα οι ταλαντώσεις επανεμφανίζονται και το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αναβίωση (revival) των ταλαντώσεων. Μια εκτενέστερη ανάλυση των ταλαντώσεων που εμφανίζονται στο παραπάνω σχήμα μπορεί κανείς να βρει στο βιβλίο Quantum Optics for beginners, Κεφ. 8.3.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε την περίπτωση όπου το πεδίο μας βρίσκεται σε μία σύμφωνη κατάσταση $|\alpha\rangle$ όπως και πριν αλλά το άτομό μας βρίσκεται αρχικά στη διεγερμένη του κατάσταση $|2\rangle$, δηλαδή σύμφωνα με τα παραπάνω η αρχική μας κατάσταση είναι η $e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|2,n\rangle$. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει παραπάνω, αλλά και την αντίστοιχη ανάλυση που έχουμε κάνει για τις number states, καταλήγουμε στο γεγονός ότι για την περίπτωση αυτή η γενική κατάσταση του συστήματος "άτομο + πεδίο" θα είναι

$$|\psi_c(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\Big[e^{-i\omega_0 t/2}e^{-in\omega t}\cos(g\sqrt{n+1}\,t)|2,n\rangle -$$

$$- i\,e^{i\omega_0 t/2}e^{-i(n+1)\omega t}\sin(g\sqrt{n+1}\,t)|1,n+1\rangle\Big] \qquad (272)$$

Επομένως, ο πληθυσμός της διεγερμένης κατάστασης του ατόμου για την περίπτωση αυτή θα είναι

$$P_2(t) = |c_{2,n}|^2 = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \cos^2(g\sqrt{n+1}\, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2(t) = \sum_n \frac{\bar{n}^2}{n!} e^{-\bar{n}} \cos^2(\underbrace{g\sqrt{n+1}}_{\Omega_n}\, t) \qquad (273)$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι για την περίπτωση αυτή θα έχουμε χρονική εξέλιξη ακόμα και απουσία πεδίου, δηλαδή για $n=0$, μιας και το άτομό μας είναι αρχικά διεγερμένο $[P_2(0)=1]$. Η μορφή της εξ. (273) θα είναι πανομοιότυπη με εκείνη της εξ. (271) με τη διαφορά ότι η γραφική παράσταση της εξ. (273) θα ξεκινάει από τη μονάδα αντί για το μηδέν, καθώς επίσης θα έχει ελαφρώς διαφορετική συχνότητα Rabi.

– Dressed states

Όπως είπαμε και προηγουμένως, υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να αντιμετωπίσουμε τη δυναμική του Jaynes-Cummings μοντέλου. Έως τώρα, λύσαμε την εξίσωση Schrödinger για το μοντέλο Jaynes-Cummings αρχικά θεωρώντας ένα πεδίο με n φωτόνια και εν συνεχεία ένα πεδίο το οποίο βρίσκεται σε μία επαλληλία των number states. Ένας άλλος τρόπος για να αναλύσουμε τη δυναμική του Jaynes-Cummings μοντέλου είναι με τη χρήση των dressed states. Τις καταστάσεις τις πρωτοείδαμε στην ημικλασική προσέγγιση, και όπως είχαμε πει και τότε, μας βοηθάνε να αντιμετωπίσουμε το σύνθετο σύστημά μας σαν ένα ενιαίο σύστημα και όχι σαν συγκερασμό δύο άλλων.

Μιας και έχουμε θεωρήσει το επίπεδο μηδενικής ενέργειας ότι βρίσκεται ανάμεσα στα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings της εξ. (257) και να γράψουμε

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \left(\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{11}\right) + \hbar\omega\hat{a}^{+}\hat{a} + \hbar g\left(\hat{\sigma}_{+}\hat{a} + \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{+}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^{+}\hat{a} + \hbar g\left(\hat{\sigma}_{+}\hat{a} + \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{+}\right) \qquad (274)$$

όπου $\hbar\omega_0$ η ενεργειακή διαφορά των δύο επιπέδων του ατόμου και $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{11} = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$ ο πίνακας Pauli. Χρησιμοποιώντας τις number states για να χαρακτηρίσουμε το πεδίο μας, σημειώνουμε ότι ο τρίτος όρος της ανωτέρω Χαμιλτονιανής, ο οποίος περιγράφει όπως έχουμε πει την αλληλεπίδραση ατόμου-πεδίου, μπορεί να προκαλέσει μόνο μεταβάσεις όπως $|1,n\rangle \to |2,n-1\rangle$ και $|2,n-1\rangle \to |1,n\rangle$. Οι καταστάσεις $|1,n\rangle \equiv |1\rangle \otimes |n\rangle$, $|2,n-1\rangle \equiv |2\rangle \otimes |n-1\rangle$ οι οποίες γράφονται ως γινόμενα των καταστάσεων του απομονωμένου ατόμου και του πεδίου, ονομάζονται bare states του μοντέλου Jaynes-Cummings. Για δεδομένο n τα ζεύγη των καταστάσεων που θα περιγράφουν το σύστημά μας θα είναι είτε $\{|2,n-1\rangle, |1,n\rangle\}$ είτε $\{|2,n\rangle, |1,n+1\rangle\}$, δηλαδή ο χώρος των καταστάσεων θα είναι διοδιάστατος. Αυτό σημαίνει ότι η Χαμιλτονιανή η οποία θα περιγράφει το σύστημά μας θα είναι ένας 2×2 πίνακας. Έστω λοιπόν ότι επιλέγουμε το δεύτερο σετ καταστάσεων και θέτουμε ότι $|\psi_{1,n}\rangle = |1,n+1\rangle$ και $|\psi_{2,n}\rangle = |2,n\rangle$. Προφανώς, οι καταστάσεις αυτές θα είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, αφού μπορεί εύκολα κανείς να επιβεβαιώσει ότι ισχύει $\langle \psi_{1,n} | \psi_{2,n} \rangle = 0$. Τώρα, τα στοιχεία της 2×2 Χαμιλτονιανής μπορεί κανείς να τα βρει από τη σχέση $H_{ij} = \langle \psi_{i,n} | \hat{H} | \psi_{j,n} \rangle$, όπου $i,j = 1,2$ και $\hat{H}$ η Χαμιλτονιανή της εξ. (274). Εφαρμόζοντας λοιπόν τις bare states στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings, βρίσκουμε ότι

$$H_{11} = \langle \psi_{1,n} | \hat{H} | \psi_{1,n} \rangle = \hbar \left[(n+1)\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \right]$$

$$H_{22} = \langle \psi_{2,n} | \hat{H} | \psi_{2,n} \rangle = \hbar \left[n\omega + \frac{1}{2}\omega_0 \right]$$

$$H_{12} = \langle \psi_{1,n} | \hat{H} | \psi_{2,n} \rangle = \hbar g \sqrt{n+1} = H_{21}$$

Γράφοντας στη συνέχεια τη συνολική Χαμιλτονιανή σε μορφή πίνακα, τότε σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις θα είναι

$$H = \begin{bmatrix} \hbar(n+1)\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 & \hbar g\sqrt{n+1} \\ \hbar g\sqrt{n+1} & \hbar n\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{bmatrix} \qquad (275)$$

Στη συνέχεια, διαγωνοποιούμε την παραπάνω Χαμιλτονιανή για να βρούμε τις ιδιοτιμές της. Ύστερα από λίγη άλγεβρα βρίσκουμε ότι

$$E_\pm(n) = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega_n(\Delta) \qquad (276)$$

όπου $\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}$ και $\Delta = \omega_0 - \omega$. Προφανώς, $\Omega_n(\Delta)$ είναι η συχνότητα Rabi για την οποία, αν θέσουμε $\Delta = 0$, παίρνουμε $\Omega_n(0) = 2g\sqrt{n+1}$ η οποία είναι ίδια με εκείνη που είδαμε προηγουμένως στις σύμφωνες καταστάσεις [δείτε πάλι την εξ. (273) και θυμηθείτε ότι $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$].

Τώρα, οι ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής θα δίνονται από την εξίσωση ιδιοτιμών $H|\varphi\rangle = E_\pm |\varphi\rangle$ όπου H η διαγωνοποιημένη Χαμιλτονιανή και $E_\pm$ οι ιδιοενέργειες της εξ. (276). Συμβολίζοντας με $|+,n\rangle$ και $|-,n\rangle$ τις δύο ιδιοσυναρτήσεις βρίσκουμε μετά από λίγες πράξεις ότι

$$|n,+\rangle = \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}\,|1,n+1\rangle + \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) + \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}\,|2,n\rangle \qquad (277a)$$

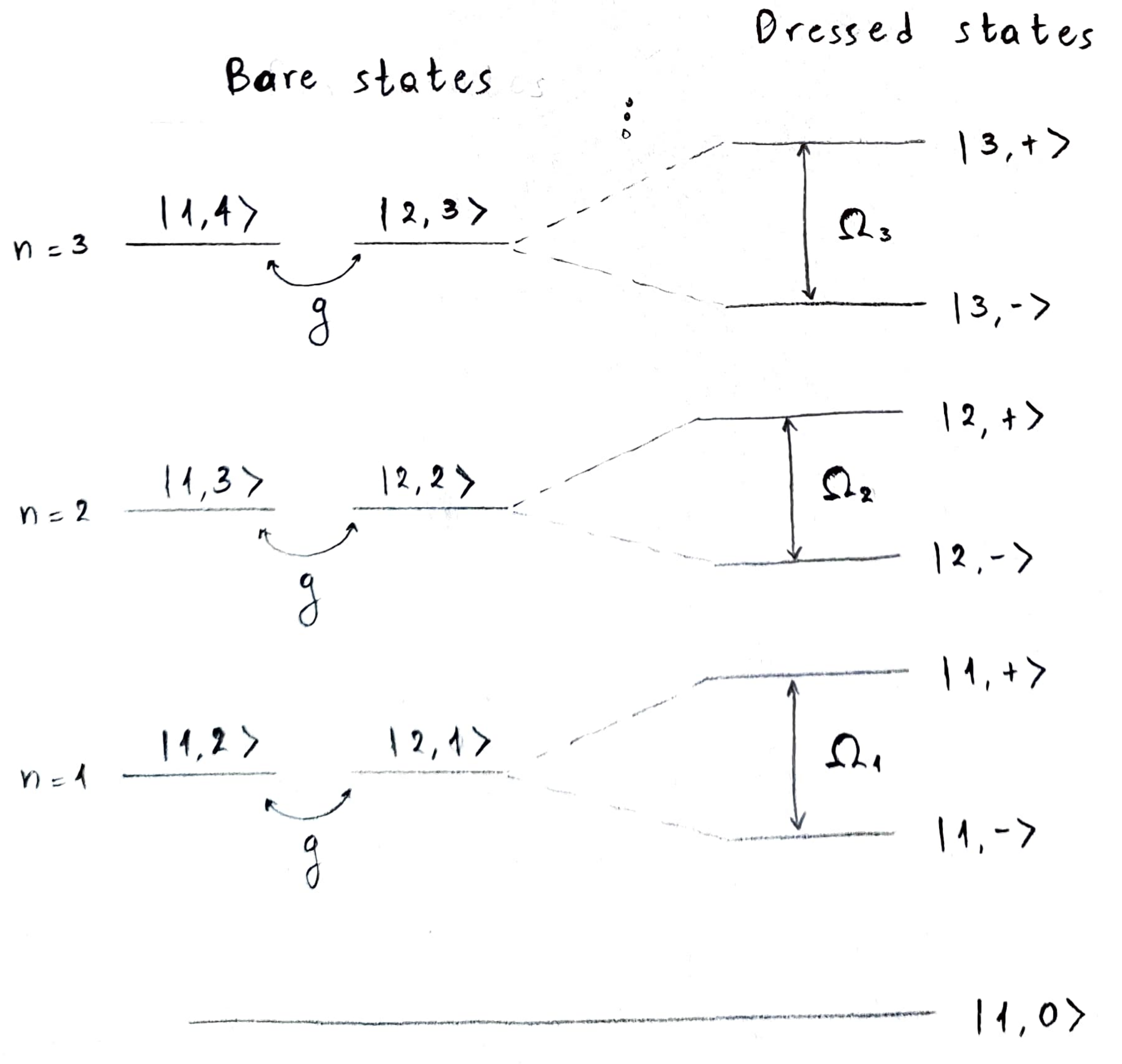
$$|n,-\rangle = \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) + \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}\,|1,n+1\rangle - \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}\,|2,n\rangle \qquad (277b)$$

Οι καταστάσεις $|n,\pm\rangle$ είναι οι dressed states του μοντέλου Jaynes-Cummings για συγκεκριμένο n. Για $\Delta = 0$ οι παραπάνω dressed states παίρνουν τη σημαντικά απλούστερη μορφή

$$|n,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,n+1\rangle + |2,n\rangle\right) \qquad (278a)$$

$$|n,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,n+1\rangle - |2,n\rangle\right) \qquad (278b)$$

Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε σχεδιάσει τη διάδα των bare states οι οποίες αντιστοιχούν σε έναν αριθμό φωτονίων n, ενώ στο δεξί μέρος του σχήματος φαίνονται οι αντίστοιχες dressed states για κάθε περίπτωση:



$\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$

για $\Delta = 0$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν και οι bare states είναι ενεργειακά ισοδύναμες για $\Delta=0$ (αν ήταν $\Delta\neq0$ τότε θα είχαν μία ενεργειακή διαφορά $\hbar\Delta$ μεταξύ τους), λόγω της σύζευξης με το πεδίο ($g\equiv$ σταθερά σύζευξης) αίρεται αυτός ο εκφυλισμός και έτσι προκύπτουν οι μη-εκφυλισμένες dressed states. Επομένως, τώρα φαίνεται ξεκάθαρα ότι με τις dressed states $|n,\pm\rangle$ μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το σύνθετο σύστημά μας ως ένα ενιαίο σύμπλεκτο σύστημα. Από φυσικής απόψεως, αυτό σημαίνει ότι τα φωτόνια ανταλλάσονται μεταξύ του ατόμου και του πεδίου μέσω της διαδικασίας της απορρόφησης και της εξαναγκασμένης εκπομπής [για την αυθόρμητη εκπομπή θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν και την αλληλεπίδραση του ατόμου με το κενό (Wigner-Weisskopf theorem), κάτι το οποίο δεν έχουμε κάνει εδώ].

Όπως είπαμε και παραπάνω αντιμετωπίζουμε σαν ένα ενιαίο σύστημα το σύστημα του ατόμου δύο επιπέδων και του πεδίου με τη βοήθεια των dressed states. Παρ' όλα αυτά, ακόμα και στην πιο απλή περίπτωση όπου έχουμε $\Delta = 0$ [εξ. (278)], βλέπουμε ότι οι dressed states δεν μπορούν να γραφούν ως ένα απλό τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων του ατόμου και του πεδίου, δηλαδή οι dressed states είναι σύμπλεκτες καταστάσεις (θυμηθείτε την κουβέντα για τις σύμπλεκτες καταστάσεις που είχαμε προηγουμένως). Συγκεκριμένα, για $\Delta = 0$ οι dressed states είναι μέγιστα σύμπλεκτες καταστάσεις [εξ. (278)] μιας και οι συντελεστές των $|1, n+1\rangle$ και $|2, n\rangle$ είναι ίσοι μεταξύ τους. Σημειώστε επίσης ότι οι dressed states προκύπτουν λόγω της παρουσίας των μη-διαγώνιων στοιχείων στον πίνακα της Χαμιλτονιανής της εξ. (275), μιας και τα στοιχεία αυτά όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία μας δίνουν πληροφορίες για τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ πεδίου και ατόμου (coherences). Αν τα μη-διαγώνια στοιχεία της εξ. (275) ήταν μηδενικά τότε θα είχαμε απλά τις bare states. Έτσι λοιπόν, από τα παραπάνω προκύπτει ότι η σύμπλεξη προκύπτει ως αποτέλεσμα της σύζευξης μεταξύ του ατόμου και του πεδίου. Για περαιτέρω ανάλυση στις dressed states και στο πώς εξηγείται το φάσμα Mollow στην κβαντική προσέγγιση μπορεί κανείς να δει: Quantum Optics for beginners, Κεφ. 11.4.