υπόψιν και το ρυθμό αυθόρμητης εκπομπής ο οποίος προκύπτει από τη θεωρία του Einstein, τότε θα πρέπει να φύγουμε από την ημικλασική προσέγγιση, όπου θεωρούμε κβαντωμένη την ύλη και κλασικό το Η/Μ πεδίο, και θα πρέπει να μεταβούμε στην κβαντική προσέγγιση, όπου θεωρούμε κβαντισμένη την ύλη αλλά και το Η/Μ πεδίο (θα το δούμε σε επόμενο μάθημα).

- Μορφή της αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης και η διπολική προσέγγιση

Ξεκινάμε και εδώ την ανάλυσή μας θεωρώντας Η/Μ πεδίο της μορφής

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{\varepsilon} E_0 e^{-i\omega t} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{\varepsilon} E_0^* e^{+i\omega t} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

όπου προφανώς το $\vec{E}(\vec{r},t)$ είναι ένα κλασικό πεδίο με διεύθυνση κατά το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\varepsilon}$ και κυματάριθμο $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Το μήκος κύματος για ενέργεια διέγερσης 1eV είναι $1,24 \cdot 10^{-6}\ m = 1,24\ \mu m$ και συνεπώς ο αντίστοιχος κυματάριθμος θα είναι $k \simeq 5 \cdot 10^{+6}\ m^{-1}$. Σημειώνουμε σαν μέτρο σύγκρισης ότι η ενέργεια διέγερσης που αντιστοιχεί στο οπτικό μέρος του φάσματος είναι $\sim 1,5 - 3\ eV$. Τώρα, το τυπικό μέγεθος ενός κβαντικού συστήματος είναι της τάξης του $1 nm$ με $1\ \text{Å}$ $(10\ nm)$, όπου $1 nm = 10^{-9}\ m$. Επομένως, για $k \simeq 5 \cdot 10^{+6}\ m^{-1}$ και $r = 10^{-9}\ m$ είναι $\vec{k} \cdot \vec{r} \simeq 5 \cdot 10^{+6} \cdot 10^{-9} \sim 10^{-3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$. Από το παράδειγμα αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για τα κβαντικά συστήματα που θέλουμε να μελετήσουμε θα έχουμε $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq 1$, δηλαδή κρατάμε μόνο τον πρώτο όρο από το ανάπτυγμα Taylor του εκθετικού. Επομένως, για τα συστήματα που θα εξετάσουμε εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε με ασφάλεια ότι το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι χωρικά ανεξάρτητο, και έτσι θα γράφεται στη μορφή

$$\vec{E}(t) = \hat{\varepsilon} E_0 e^{-i\omega t} + \hat{\varepsilon} E_0^* e^{i\omega t} \qquad (171)$$

Αυτή θα είναι η μορφή του πεδίου που θα χρησιμοποιούμε κατά την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη. Επίσης, τα συστήματα που θεωρούμε στην Κβαντική Οπτική είναι εν γένει άτομα ή μόρια τα οποία αλ/δρούν με το φως. Επομένως, τα άτομα (ή τα μόρια) αυτά διεγείρονται και αποδιεγείρονται ανάλογα με την ακτινοβολία με την οποία αλ/δρούν. Κατά τη διαδικασία της διέγερσης για παράδειγμα, το e⁻ ξεκινάει από μία αρχική κατάσταση |i> και καταλήγει σε μία τελική κατάσταση |f>. Επεκτείνοντας λοιπόν το σκεπτικό κατά το οποίο ορίσαμε την έννοια της οπής στη Φυσική της Στερεάς Κατάστασης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ουσιαστικά η ακτινοβολία μας αλ/δρά με ένα ηλεκτρικό δίπολο (το συγκεκριμένο σκεπτικό μπορεί να αποδειχτεί αυστηρά ξεκινώντας από τις εξισώσεις Hamilton στην κλασική φυσική και με τη βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell να καταλήξει κανείς στο ζητούμενο → Meystre και Sargent, Κεφ. 1 και 3). Τελικά, θεωρούμε ότι το ανωτέρω πεδίο* αλληλεπιδρά με ένα ηλεκτρικό δίπολο $\vec{p} = -e\vec{r}$, και η αλληλεπίδραση αυτή θα περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή

$$H_{int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(t) \qquad (172)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, στους υπολογισμούς μας τα κβαντικά συστήματα σχετίζονται με ηλεκτρικά δίπολα. Αντικαθιστώντας την εξ. (171) στην εξ. (172) θα έχουμε ότι

$$H_{int} = -\vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \left(E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t} \right) \qquad (173)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την ανωτέρω αλληλεπίδραση για τη μετάβαση από την κατάσταση $|i\rangle$ στην $|f\rangle$ θα έχουμε

$$H^{(1)}_{fi} \sim (\vec{p} \cdot \hat{\varepsilon})_{fi} = e\,\hat{\varepsilon} \underbrace{\int \psi_f^* \,\vec{r}\, \psi_i \, d^3\vec{r}}_{\wp_{fi}} \qquad (174)$$

Για το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε την εξ (172) ως Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης μπορεί κανείς να κοιτάξει και στο Κεφ. 5.1 του βιβλίου των Scully κ' Zubairy.

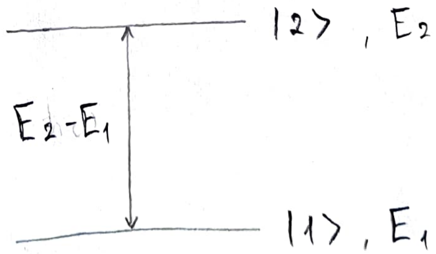
---

* της εξ. (171)

- Σύστημα δύο επιπέδων

Όπως είπαμε και προηγουμένως στην Κβαντική Οπτική θα θεωρούμε ότι το σύστημά μας θα είναι της τάξης των νανομέτρων, δηλαδή όταν θα αναφερόμαστε στον όρο ύλη θα εννοούμε ότι θα έχουμε κάποιο μόριο ή κάποιο άτομο.

Μιας και εμείς θέλουμε να εξετάσουμε την αλλαγή του ατόμου, ή του μορίου, με φως συγκεκριμένης συχνότητας, αυτό σημαίνει ότι ενδιαφερόμαστε για μία συγκεκριμένη μετάβαση που λαμβάνει χώρα στο άτομο ή στο μόριο. Το φως είναι συγκεκριμένης συχνότητας μιας και τις περισσότερες φορές προέρχεται από κάποιο laser, καθώς επίσης η συχνότητά του εξαρτάται από το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο. Μιας και είναι δύσκολο να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του laser επιλέγουμε να κατασκευάσουμε κβαντικούς εκπομπούς οι οποίοι απορροφούν και εκπέμπουν φως συγκεκριμένης συχνότητας. Επιπλέον, οι κβαντικοί αυτοί εκπομποί έχουν το πλεονέκτημα ότι κατασκευάζεται από εμάς και έτσι δεν υπάρχουν π.χ. πολλά ενεργειακά επίπεδα ή ενεργειακές ζώνες όπως υπάρχουν στα άτομα και στα μόρια αντίστοιχα. Με λίγα λόγια, οι ιδιότητες των κβαντικών εκπομπών καθορίζονται από εμάς και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται ευρέως στην Κβαντική Οπτική (είτε σε θεωρητικό πλαίσιο είτε σε πειράματα). Ο κβαντικός εκπομπός ο οποίος είναι ο πιο απλός και ο πιο διαδεδομένος είναι αυτός των δύο επιπέδων και ο οποίος φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Όπως φαίνεται έχει μόνο δύο ενεργειακά επίπεδα τα οποία έχουν ενεργειακή διαφορά $E_2 - E_1$.

Εδώ λοιπόν, θα αναλύσουμε την αλλαγή ενός κβαντικού εκπομπού δύο επιπέδων με ακτινοβολία κατάλληλης συχνότητας ω ώστε να διεγείρει τον εκπομπό. Η ανάλυση ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: i) με τη μεθοδολογία των πλατών πιθανότητας και ii) με τη βοήθεια του πίνακα πυκνότητας. Εδώ, θα αναπτύξουμε τον πρώτο τρόπο με τα πλάτη πιθανότητας.

Θεωρούμε λοιπόν έναν κβαντικό εκπομπό δύο επιπέδων, όπως στο προηγούμενο σχήμα, όπου η θεμελιώδης και η διεγερμένη του κατάσταση χαρακτηρίζονται από τις κυματοσυναρτήσεις ψ_1 και ψ_2 αντίστοιχα, δηλαδή οι ψ_1 και ψ_2 είναι ιδιοσυναρτήσεις της αδιατάρακτης Χαμιλτονιανής $H^{(0)}$. Επομένως, θα είναι

$$H^{(0)}\psi_n = E_n \psi_n \quad \text{με } n = 1, 2 \qquad (175)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι ο κβαντικός αυτός εκπομπός αλληλεπιδρά με ακτινοβολία κυκλικής συχνότητας ω, και έτσι θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης μεταξύ κβαντικού εκπομπού και ακτινοβολίας ως $H_{int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(t)$.

Έτσι, η συνολική Χαμιλτονιανή του συστήματός μας θα γράφεται $H(t) = H^{(0)} + H_{int}(t)$, ενώ μια γενική κατάσταση η οποία θα περιγράφει τον κβαντικό μας εκπομπό σε κάποιο χρόνο t θα γράφεται

$$\psi(t) = a_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar}\, \psi_1 + a_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar}\, \psi_2 \qquad (176)$$

όπου και πάλι "αδιαφορούμε" για τη χωρική εξάρτηση $\vec{r}$ για τους λόγους που αναφέραμε νωρίτερα.

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση του Schrödinger τη Χαμιλτονιανή $H(t)$ καθώς και τη γενική κατάσταση της εξ. (176), παίρνουμε ότι

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H(t)\, \psi(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \left[\dot{a}_1(t)\, \psi_1\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \dot{a}_2(t)\, \psi_2\, e^{-iE_2 t/\hbar} \right] + E_1\, a_1(t)\, \psi_1\, e^{-iE_1 t/\hbar} +$$

$$+ E_2\, a_2(t)\, \psi_2\, e^{-iE_2 t/\hbar} = E_1\, a_1(t)\, \psi_1\, e^{-iE_1 t/\hbar} + E_2\, a_2(t)\, \psi_2\, e^{-iE_2 t/\hbar} -$$

$$- \vec{p} \cdot \vec{E}(t)\, a_1(t)\, \psi_1\, e^{-iE_1 t/\hbar} - \vec{p} \cdot \vec{E}(t)\, a_2(t)\, \psi_2\, e^{-iE_2 t/\hbar}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση από αριστερά με ψ_n^* $(n=1,2)$, και θυμίζοντας ότι για τις ιδιοσυναρτήσεις ψ_n ισχύει η σχέση ορθογωνιότητας $\int \psi_n^* \psi_m\, d^3\vec{r} = \delta_{nm}$, παίρνουμε ότι (ολοκληρώνουμε επίσης σε όλο το χώρο)

$$\psi_1^* : \; i\hbar\, \dot{a}_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar} = -\int \psi_1^*\, \vec{p} \cdot \vec{E}(t)\, \psi_2\, d^3\vec{r}\; a_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar}$$

$$\psi_2^* : \; i\hbar\, \dot{a}_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar} = -\int \psi_2^*\, \vec{p} \cdot \vec{E}(t)\, \psi_1\, d^3\vec{r}\; a_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar}$$

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι θεωρήσαμε ότι δεν υπάρχουν μόνιμα δίπολα στο σύστημά μας (κεντρο-συμμετρικό) οπότε είναι $\int \psi_1^*\, \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon}\, \psi_1\, d^3\vec{r} = \int \psi_2^*\, \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon}\, \psi_2\, d^3\vec{r} = 0$. Συμβολίζοντας τη διπολική ροπή μεταξύ δύο καταστάσεων ως

$p_{nm} = \int \psi_n^*\, \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon}\, \psi_m\, d^3\vec{r} = p_{mn}^*$, θα έχουμε ότι

$$i\hbar \dot{a}_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar} = -p_{12} \cdot E(t)\, a_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{a}_1(t) = -p_{12} E(t)\, a_2(t)\, e^{-i\omega_{21} t} \qquad (177a)$$

$$i\hbar \dot{a}_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar} = -p_{21} E(t)\, a_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{a}_2(t) = -p_{21} E(t)\, a_1(t)\, e^{i\omega_{21} t} \qquad (177b)$$

όπου θέσαμε ότι $\omega_{21} = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$, η οποία είναι η χαρακτηριστική συχνότητα μετάβασης του κβαντικού μας εκπομπού. Θυμίζοντας τώρα ότι το ηλεκτρικό μας πεδίο, χωρίς το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\varepsilon}$ το οποίο συμπεριλήφθηκε στον ορισμό της διπολικής ροπής, είναι $E(t) = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{+i\omega t}$, από τις εξ. (177) θα έχουμε ότι

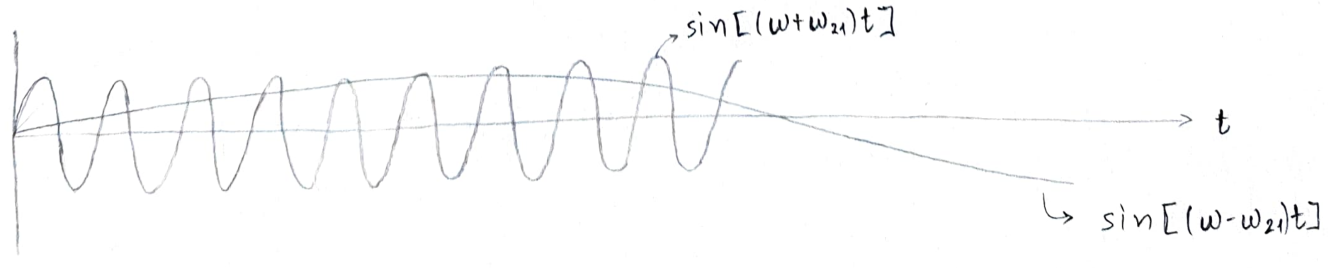
$$(177a) \Rightarrow i\hbar \dot{a}_1(t) = -p_{12} \left(E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t} \right) a_2(t)\, e^{-i\omega_{21} t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{a}_1(t) = -p_{12} \left[E_0 e^{-i(\omega+\omega_{21})t} + E_0^* e^{i(\omega-\omega_{21})t} \right] a_2(t) \qquad (178a)$$

$$(177b) \Rightarrow i\hbar \dot{a}_2(t) = -p_{21} \left(E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t} \right) a_1(t)\, e^{i\omega_{21} t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{a}_2(t) = -p_{21} \left[E_0 e^{-i(\omega-\omega_{21})t} + E_0^* e^{i(\omega+\omega_{21})t} \right] a_1(t) \qquad (178b)$$

Μιας και εδώ μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $\omega \simeq \omega_{21}$ (η συχνότητα του πεδίου να είναι περίπου η ίδια με αυτή του κβαντικού εκπομπού) παρατηρούμε το εξής: οι όροι πού περιέχουν τα εκθετικά $e^{\pm i(\omega+\omega_{21})t}$ πραγματοποιούν πολύ πιο γρήγορες ταλαντώσεις σε σχέση με τους όρους οι οποίοι περιέχουν τα εκθετικά $e^{\pm i(\omega-\omega_{21})t}$ εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Επομένως, μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους με τα εκθετικά $e^{\pm i(\omega+\omega_{21})t}$ θεωρώντας ότι $e^{\pm i(\omega+\omega_{21})t} \to 0$ (το συγκεκριμένο σημείο δικαιολογείται ακόμα καλύτερα γράφοντας $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ και μιας και το $e^{\pm i(\omega+\omega_{21})t}$ περιγράφει πολύ πιο έντονες ταλαντώσεις σε σχέση με το $e^{\pm i(\omega-\omega_{21})t}$, αυτό σημαίνει ότι ο δεύτερος όρος "βλέπει" τον πρώτο ως $\langle \cos[(\omega+\omega_{21})t]\rangle + \langle \sin[(\omega+\omega_{21})t]\rangle = 0$ αφού $\langle \cos x\rangle = \langle \sin x\rangle = 0$).



Η προσέγγιση αυτή, όπως αναφέραμε και πιο πάνω, ονομάζεται προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (RWA). Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται ευρέως στην Κβαντική Οπτική μιας και ισχύει στις περισσότερες των συνηθισμένων περιπτώσεων. Η προσέγγιση αυτή αποτυγχάνει μόνο αν $\left|\frac{p_{12} E_0}{\hbar}\right|$ είναι κοντά σε τιμή στα ω, ω_{21} (εφόσον $\omega \simeq \omega_{21}$).

Επομένως, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του περιστρεφόμενου κύματος οι εξ. (178) γράφονται

$$(178a) \Rightarrow i\hbar \dot{a}_1(t) = -p_{12} E_0^* a_2(t) e^{i\Delta t} \qquad (179a)$$

$$(178b) \Rightarrow i\hbar \dot{a}_2(t) = -p_{21} E_0 a_1(t) e^{-i\Delta t} \qquad (179b)$$

όπου ορίσαμε $\Delta = \omega - \omega_{21}$ τον αποσυντονισμό (detuning).

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε και τη συχνότητα Rabi $\Omega = \frac{2 p_{21} E_0}{\hbar}$, το μέτρο της οποίας χαρακτηρίζει το πόσο ισχυρή/ασθενής είναι η αλληλεπίδραση ύλης - φωτός. Τελικά, οι εξισώσεις των πλατών πιθανότητας παίρνουν τη μορφή

$$(179a) \Rightarrow i\dot{a}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2} a_2(t) e^{i\Delta t} \qquad (180a)$$

$$(179b) \Rightarrow i\dot{a}_2(t) = -\frac{\Omega}{2} a_1(t) e^{-i\Delta t} \qquad (180b)$$

Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε στην επίλυση των πλατών πιθανότητας των εξ. (180). Αρχικά, θα δούμε την περίπτωση που βρισκόμαστε σε ακριβή συντονισμό, δηλαδή για $\Delta = 0$ ($\Rightarrow \omega = \omega_{21}$). Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις για τα πλάτη πιθανότητας γίνονται

$$(180a) \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} i\dot{a}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2} a_2(t) \qquad (181a)$$

$$(180b) \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} i\dot{a}_2(t) = -\frac{\Omega}{2} a_1(t) \Rightarrow \dot{a}_2(t) = \frac{i\Omega}{2} a_1(t) \qquad (181b)$$

Παραγωγίζοντας τώρα την εξ. (181a) παίρνουμε ότι

$$i\ddot{a}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2}\dot{a}_2(t) \overset{(181b)}{\Rightarrow} \cancel{i}\ddot{a}_1(t) = -\frac{\Omega^*}{2}\frac{\cancel{i}\Omega}{2} a_1(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{a}_1(t) + \frac{|\Omega|^2}{4} a_1(t) = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, η οποία έχει λύση της μορφής

$$a_1(t) = A \cos\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) \qquad (182)$$

Αν ο κβαντικός εκπομπός μας βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση 1, τότε θα είναι $a_1(t=0)=1$ και $a_2(t=0)=0$.

Εφόσον $a_1(t=0)=1$, από την εξ. (182) $\Rightarrow A=1$, οπότε

$$a_1(t) = \cos\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right)$$

Από την εξ. (181b) σε συνδυασμό με την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι

$$a_2(t) = -\frac{2i}{\Omega^*} \dot{a}_1(t) = -\frac{\cancel{2}i}{\Omega^*} \left[-\frac{|\Omega|}{\cancel{2}} \sin\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) + \frac{|\Omega|}{\cancel{2}} B \cos\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow a_2(t) = \frac{i|\Omega|}{\Omega^*} \left[\sin\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) - B \cos\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) \right]$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ γνωρίζουμε ότι $a_2(t=0)=0$, οπότε από την παραπάνω εξίσωση έχουμε $B=0$. Σύμφωνα λοιπόν με όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι τα πλάτη πιθανότητας γράφονται

$$a_1(t) = \cos\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) \qquad (183a)$$

$$a_2(t) = \frac{i|\Omega|}{\Omega^*} \sin\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) \qquad (183b)$$

Οπότε οι πιθανότητες κατάληψης των καταστάσεων 1 και 2 σε κάποια χρονική στιγμή t θα είναι

$$P_1(t) = |a_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) \qquad (184a)$$

$$P_2(t) = |a_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{|\Omega| t}{2}\right) \qquad (184b)$$

Θυμίζουμε όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι για την περίπτωση του συντονισμού $\omega = \omega_{21}$, δηλαδή το detuning είναι $\Delta = 0$. Στη συνέχεια, αναζητούμε λύσεις για τη γενική περίπτωση όπου $\Delta \neq 0$. Μιας και οι εξισώσεις που δίνουν τα πλάτη πιθανότητας [εξ. (180a) και (180b)] περιέχουν εκθετικά, δοκιμάζουμε να θέσουμε $a_1(t) = c_0 e^{ipt}$. Έτσι λοιπόν, από την εξ. (180a) θα έχουμε ότι

$$a_2(t) = -\frac{2i}{\Omega^*} e^{-i\Delta t} \dot{a}_1(t) = -\frac{2i}{\Omega^*} e^{-i\Delta t} c_0 i p\, e^{ipt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2(t) = \frac{2c_0 p}{\Omega^*} e^{i(p-\Delta)t}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή για το $a_2(t)$ στην εξ. (180b) βρίσκουμε ότι

$$-(p-\Delta)\frac{2\cancel{c_0}p}{\Omega^*}\cancel{e^{i(p-\Delta)t}} = -\frac{\Omega}{2}\cancel{c_0}\cancel{e^{i(p-\Delta)t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(p-\Delta)p = -\frac{|\Omega|^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -p^2 + \Delta p = -\frac{|\Omega|^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 - \Delta p - \frac{|\Omega|^2}{4} = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω τριώνυμο ως προς το p βρίσκουμε ότι

$$p_{1,2} = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}}{2} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{\Delta \pm \Omega'}{2}$$

όπου ορίσαμε την ποσότητα $\Omega' = \sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}$, η οποία είναι γνωστή ως γενικευμένη συχνότητα Rabi. Εφόσον βρίκαμε δύο τιμές για το p μπορούμε να γράψουμε τη λύση για το $a_1(t)$ στη μορφή

$$a_1(t) = A_+ e^{i(\Delta - \Omega')t/2} + A_- e^{i(\Delta + \Omega')t/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1(t) = e^{i\Delta t/2} \left(A_+ \cdot e^{-i\Omega' t/2} + A_- \cdot e^{i\Omega' t/2} \right) \qquad (185)$$

όπου οι σταθερές A_+ και A_- θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες. Οπότε, από την εξ (180α) θα έχουμε

$$a_2(t) = -\frac{2i}{\Omega^*} e^{-i\Delta t} \dot{a}_1(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2(t) = -\frac{2i}{\Omega^*} e^{-i\Delta t} \left[\frac{i(\Delta - \Omega')}{2} A_+ e^{i(\Delta - \Omega')t/2} + \frac{i(\Delta + \Omega')}{2} A_- e^{i(\Delta + \Omega')t/2} \right]$$

$$\Rightarrow a_2(t) = e^{-i\Delta t/2} \left(\frac{\Delta - \Omega'}{\Omega^*} A_+ e^{-i\Omega' t/2} + \frac{\Delta + \Omega'}{\Omega^*} A_- e^{i\Omega' t/2} \right) \qquad (186)$$

Οι εξ. (185) και (186) αποτελούν τις γενικές λύσεις για τα πλάτη πιθανότητας. Τώρα, για αρχικές συνθήκες με το κβαντικό σύστημα των δύο επιπέδων σε χρόνο $t=0$ στην κατάσταση 1, θα έχουμε $a_1(t=0)=1$ καθώς και $a_2(t=0)=0$. Επομένως, από τις εξ. (185) και (186) βρίσκουμε ότι

$$(185) \overset{t=0}{\Rightarrow} A_+ + A_- = 1$$

$$(186) \overset{t=0}{\Rightarrow} (\Delta - \Omega') A_+ + (\Delta + \Omega') A_- = 0$$

Από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $A_+ = 1 - A_-$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε

$$(\Delta - \Omega')(1 - A_-) + (\Delta + \Omega') A_- = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta - \Omega' + (\cancel{\Delta} + \Omega' - \cancel{\Delta} + \Omega') A_- = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\Omega' A_- = \Omega' - \Delta \Rightarrow A_- = \frac{\Omega' - \Delta}{2\Omega'}$$

και έτσι $A_+ = \dfrac{\Omega' + \Delta}{2\Omega'}$. Τελικά, για τα πλάτη πιθανότητας $a_1(t)$ και $a_2(t)$ του κβαντικού εκπομπού δύο επιπέδων με αρχικές συνθήκες $a_1(t=0)=1$ και $a_2(t=0)=0$, βρίσκουμε ότι

$$a_1(t) = e^{i\Delta t/2}\left(\frac{\Omega'+\Delta}{2\Omega'}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{\Omega'-\Delta}{2\Omega}e^{i\Omega' t/2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1(t) = e^{i\Delta t/2}\left(\frac{1}{2}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{1}{2}e^{i\Omega' t/2} + \frac{\Delta}{2\Omega'}e^{-i\Omega' t/2} - \frac{\Delta}{2\Omega'}e^{i\Omega' t/2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1(t) = e^{i\Delta t/2}\left[\cos\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega'}\sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right)\right] \qquad (187)$$

$$a_2(t) = e^{-i\Delta t/2}\left(\frac{\Delta-\Omega'}{\Omega^*}\,\frac{\Omega'+\Delta}{2\Omega'}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{\Delta+\Omega'}{\Omega^*}\,\frac{\Omega'-\Delta}{2\Omega'}e^{i\Omega' t/2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2(t) = e^{-i\Delta t/2}\left(\frac{\Delta^2-\Omega'^2}{2\Omega'\Omega^*}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{\Omega'^2-\Delta^2}{2\Omega'\Omega^*}e^{i\Omega' t/2}\right) \quad \overset{\Omega'^2=\Delta^2+|\Omega|^2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow a_2(t) = e^{-i\Delta t/2}\left(-\frac{|\Omega|^2}{2\Omega'\Omega^*}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{|\Omega|^2}{2\Omega'\Omega^*}e^{-i\Omega' t/2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2(t) = e^{-i\Delta t/2}\frac{\Omega}{\Omega'}\left(-\frac{1}{2}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{1}{2}e^{i\Omega' t/2}\right) \Rightarrow$$

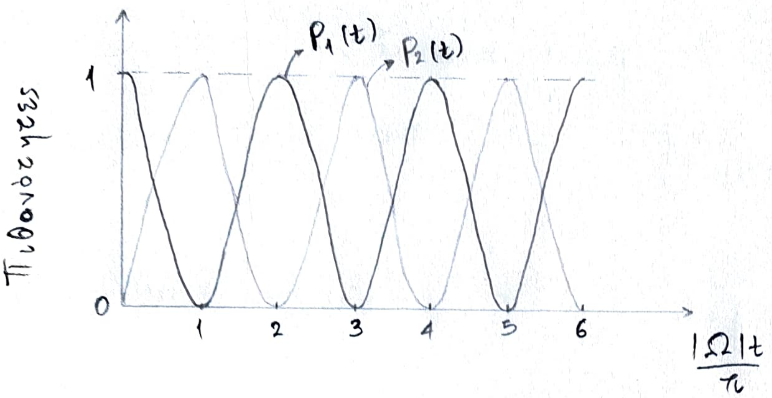
$$\Rightarrow a_2(t) = i\, e^{-i\Delta t/2}\frac{\Omega}{\Omega'}\sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \qquad (188)$$

όπου στις παραπάνω πράξεις χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\Omega'^2 = \Delta^2 + |\Omega|^2$ καθώς και $\frac{|\Omega|^2}{\Omega^*} = \frac{\Omega\Omega^*}{\Omega^*} = \Omega$. Επομένως, οι πιθανότητες κατάληψης των καταστάσεων 1 και 2 θα είναι

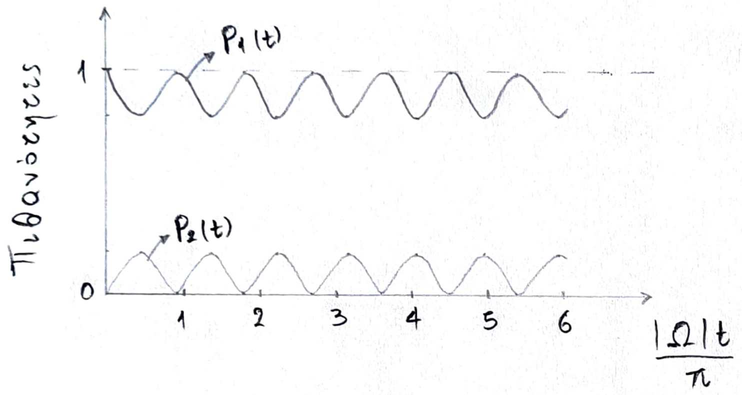
$$P_1(t) = |a_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) + \frac{\Delta^2}{\Omega'^2}\sin^2\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \qquad (189)$$

$$P_2(t) = |a_2(t)|^2 = \frac{|\Omega|^2}{\Omega'^2}\sin^2\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \qquad (190)$$

Παρατηρούμε για τις εξ. (189) και (190) ότι $P_1(t) + P_2(t) = 1$, όπως θα έπρεπε. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζουμε τη χρονική εξέλιξη των πληθυσμών για $\Delta = 0$ καθώς και για $\Delta \neq 0$.



(a) : $\Delta = 0$



(b) : $\Delta \neq 0$

Όπως αναμέναμε από τη μορφή των εξ. (189) και (190) οι πιθανότητες $P_1(t)$ και $P_2(t)$ έχουν ταλαντωτική συμπεριφορά. Μιας και στο όρισμα του cos και του sin στις παραπάνω εξισώσεις υπάρχει η γενικευμένη συχνότητα Rabi, οι ταλαντώσεις που εμφανίζονται στην εξέλιξη των $P_1(t)$ και $P_2(t)$ ονομάζονται ταλαντώσεις Rabi. Στην περίπτωση όπου έχουμε $\Delta = 0$ παρατηρούμε τέλειες ταλαντώσεις Rabi, δηλαδή έχουμε πλήρη μεταφορά πληθυσμού από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2. Όμως, για $\Delta \neq 0$ οι ταλαντώσεις Rabi είναι ατελείς μιας και δεν υπάρχει πλήρης μεταφορά πληθυσμού.

Παρατηρούμε τώρα ότι για την περίπτωση του πλήρη συντονισμού $(\Delta = 0)$, η πλήρης μεταφορά του πληθυσμού από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 επιτυγχάνεται για χρόνους

$\Delta = 0 : \ |\Omega| t = (2n+1)\pi$, με $n = 0, 1, 2, \ldots$ (πλήρης μεταφορά πληθυσμού)

Για χρόνους $|\Omega| t = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, με $n = 0, 1, 2, \ldots$, οι πιθανότητες μεταξύ των δύο καταστάσεων είναι ίσες μεταξύ τους, $P_1(t) = P(t) = 1/2$. Επιπλέον, ο πληθυσμός επιστρέφει στην κατάσταση 1, από όπου και ξεκίνησε, τις χρονικές στιγμές $|\Omega| t = 2n\cdot\pi$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη μέση διπολική ροπή, όταν γνωρίζουμε ότι το κβαντικό μας σύστημα είναι αρχικά στην κατάσταση 1. Προφανώς, σε χρόνο $t \neq 0$ η κατάσταση του συστήματός μας θα δίνεται από την εξ. (176), οπότε θα έχουμε για τη μέση διπολική ροπή

$$\langle \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \rangle = \int \psi^*(t)\, \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon}\, \psi(t)\, d^3\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \rangle = \int \left(a_1^*(t)\, \psi_1^*\, e^{iE_1 t/\hbar} + a_2^*(t)\, \psi_2^*\, e^{iE_2 t/\hbar} \right) \cdot \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \left(a_1(t)\, \psi_1\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \right.$$

$$\left. + a_2(t)\, \psi_2\, e^{-iE_2 t/\hbar} \right) d^3\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon} \rangle = p_{11}\, a_1^*(t)\, a_1(t) + p_{22}^*\, a_2(t)\, a_2(t) + p_{12}\, a_1^*(t)\, a_2(t)\, e^{-i\omega_{21} t} +$$

$$+ p_{21}\, a_2^*(t)\, a_1(t)\, e^{i\omega_{21} t}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι $p_{nm} = \int \psi_n^*\, \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon}\, \psi_m\, d^3\vec{r} = p_{mn}^*$ καθώς και $\omega_{21} = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$. Όμως, αφού δεν έχουμε μόνιμα δίπολα (κεντροσυμμετρικό σύστημα) θα είναι $p_{11} = p_{22} = 0$, γεγονός το οποίο χρησιμοποιήσαμε και παραπάνω όταν εξάγαμε τις εξισώσεις των πλατών πιθανότητας. Άρα, θα είναι

$$\langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, a_1^*(t)\, a_2(t)\, e^{-i\omega_{21}t} + c.c. \qquad (191)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις εξ. (187), (188) στην εξ. (191), βρίσκουμε για τη μέση τιμή της διπολικής ροπής ότι

$$(191) \overset{(187)}{\underset{(188)}{\Longrightarrow}} \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, e^{-i\Delta t/2}\left[\cos\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega'}\sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\, i\, e^{-i\Delta t/2}\,\frac{\Omega}{\Omega'}\sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) e^{-i\omega_{21}t} + c.c. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, e^{-i\Delta t - i\omega_{21}t}\,\frac{\Omega}{\Omega'}\left[\frac{1}{2}e^{i\Omega' t/2} + \frac{1}{2}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{\Delta}{2\Omega'}e^{i\Omega' t/2} -\right.$$

$$\left. - \frac{\Delta}{2\Omega'}e^{-i\Omega' t/2}\right]\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-i\Omega' t/2} + \frac{1}{2}e^{+i\Omega' t/2}\right] + c.c. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, e^{-i\omega t}\,\frac{\Omega}{\Omega'}\left[-\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}e^{i\Omega' t} - \frac{1}{4}e^{-i\Omega' t} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{\Delta}{4\Omega'} +\right.$$

$$\left. + \frac{\Delta}{4\Omega'}e^{i\Omega' t} + \frac{\Delta}{4\Omega'}e^{-i\Omega' t} - \frac{\Delta}{4\Omega'}\right] + c.c. \Rightarrow$$

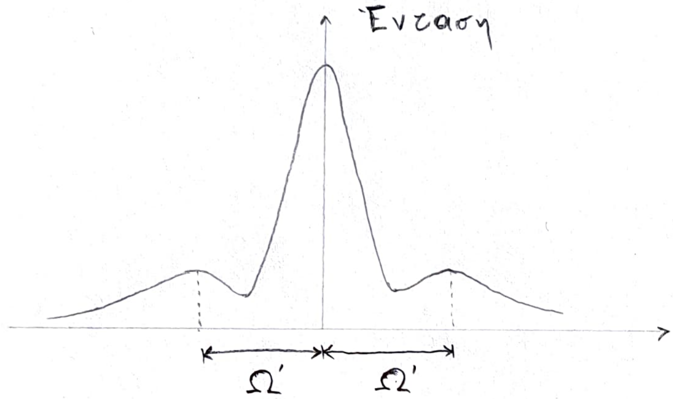
$$\Rightarrow \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle = p_{12}\, e^{i\omega t}\,\frac{\Omega}{\Omega'}\left[-\frac{\Delta}{2\Omega'} + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\Omega'}+1\right)e^{i\Omega' t} + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\Omega'}-1\right)e^{-i\Omega' t}\right]$$

$$+ c.c.$$

$$\Rightarrow \langle \vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\rangle \equiv \langle p\rangle = p_{12}\frac{\Omega}{\Omega'}\left[-\frac{\Delta}{2\Omega'}e^{-i\omega t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\Omega'}+1\right)e^{-i(\omega-\Omega')t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\Omega'}-1\right)e^{-i(\omega+\Omega')t}\right]+c.c. \qquad (192)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\omega-\Delta=\omega_{21}$. Το παραπάνω αποτέλεσμα μας δείχνει ότι το κβαντικό σύστημα εκπέμπει τόσο στη συχνότητα διέγερσης ω, κάτι το οποίο αναμενόταν, αλλά και στις συχνότητες $\omega+\Omega'$ και $\omega-\Omega'$, οι οποίες ονομάζονται Rabi sidebands ή αλλιώς πλευρικές ζώνες Rabi (θυμηθείτε ότι η ακτινοβολία ενός διπόλου εξαρτάται από τη διπολική του ροπή). Η εξήγηση της εκπομπής των πλευρικών ζωνών Rabi συνδέεται με το γεγονός ότι λόγω της σύζευξης του κβαντικού μας συστήματος με το περιβάλλον του, θα πρέπει να περιγράφουμε το σύνθετο σύστημα κβαντικός εκπομπός + περιβάλλον ως κάτι ενιαίο κάτι το οποίο είναι εφικτό με τη βοήθεια των dressed states, οι οποίες θα αναλυθούν σε επόμενο μάθημα.

Αυτό που σημειώνουμε εδώ είναι ότι το φάσμα που προκύπτει έχει την εξής μορφή



Το συγκεκριμένο φάσμα ονομάζεται φάσμα τύπου Mollow, ενώ οι τρεις κορυφές ονομάζονται τριάδα Mollow. Σημειώνεται ότι η απόσταση των κορυφών μεταξύ τους εξαρτάται από την ένταση του laser και συνεπώς από τη συχνότητα Rabi [Θυμηθείτε τον ορισμό της συχνότητας Rabi κάτω από τις εξ. (179)].

Πριν αναλύσουμε όμως τις dressed states, θα δούμε κάποια επιπλέον αποτελέσματα για το σύστημα των δύο επιπέδων.