ο τελεστής μετατόπισης να εφαρμόζεται πρώτος, τότε για να πάρουμε την ίδια κατάσταση με την αρχική ο τελεστής μετατόπισης δε θα πρέπει να μετατοπίζει την κατάσταση κενού κατά $a$, αλλά θα πρέπει να την μετατοπίζει κατά $b = a\cosh r + a^* e^{i\varphi}\sinh r$. Τονίζουμε εδώ ότι οι δύο ορισμοί για τις squeezed coherent states, $\hat{S}(\zeta)\hat{D}(a)|0\rangle$ και $\hat{D}(a)\hat{S}(\zeta)|0\rangle$, δίνουν ίδια αποτελέσματα για το squeezing [δηλαδή και με τους δύο ορισμούς καταλήγουμε στις εξ. (126) και (127)] αλλά βρίσκουμε διαφορετικές τιμές για τα $\langle\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{a}^2\rangle = \langle\hat{a}^{+2}\rangle$, $\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle$ που δίνονται στην εξ. (123) (επιβεβαιώστε το).

- <u>Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών</u>

Μέχρι τώρα είδαμε με ποιον τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το Η/Μ πεδίο στην περίπτωση της κοιλότητας

αλλά και του ελεύθερου χώρου. Επίσης, μελετήσαμε το ΗΛΜ πεδίο χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά σύνολα καταστάσεων, τις number states, τις coherent states (σύμφωνες καταστάσεις) και τις squeezed states (συμπιεσμένες καταστάσεις), έτσι ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να περιγράφουμε το πεδίο μας με το βέλτιστο τρόπο, ανάλογα με την περίσταση.
Όμως, η Κβαντική Οπτική μελετάει την αλληλεπίδραση της ύλης με το φως. Η μελέτη του φωτός και η κβάντωσή του ήταν ένα σημαντικό βήμα, αλλά τώρα πρέπει να προχωρήσουμε περεταίρω και να εκμεταλλευτούμε τη μελέτη που κάναμε για το ΗΛΜ πεδίο έτσι ώστε να εξηγήσουμε πώς αυτό επηρεάζει την ύλη. Μιας και η Κβαντική Οπτική ασχολείται με την αλληλεπίδραση φωτός-ύλης σε μικροσκοπικό επίπεδο, και συγκεκριμένα στην κλίμακα του νανομέτρου, με την έννοια ύλη θα εννοούμε τα μόρια ή ακόμα και τα άτομα που την αποτελούν

Παρ' όλα αυτά, τα άτομα και τα μόρια στη φύση έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες και καθορισμένα ενεργειακά επίπεδα. Εμείς, για την καλύτερη και ακριβέστερη μελέτη των φαινομένων, χρειαζόμαστε όσο το δυνατόν απλούστερα συστήματα στα οποία να μπορούμε να επιδράσουμε με Η/Μ ακτινοβολία και οι συνθήκες να είναι τέτοιες ώστε να μελετάμε ένα φαινόμενο κάθε φορά (π.χ αν μελετήσουμε την αλληλεπίδραση ενός φυσικού μορίου με Η/Μ πεδίο θα έχουμε την ανάδειξη διάφορων φαινομένων όπως διέγερση, αυθόρμητη και εξαναγκασμένη εκπομπή, ταλάντωση και περιστροφή των ατόμων που αποτελούν το μόριο κ.α.). Έτσι λοιπόν, είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε "τεχνητά άτομα", τα οποία τα έχουμε κατασκευάσει στο εργαστήριο και έτσι έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες για το εκάστοτε πείραμα ή μελέτη που θέλουμε να κάνουμε. Αυτά τα "τεχνητά ατομα, είναι ουσιαστικά κβαντικοί εκπομποί (quantum emitters) οι οποίοι είναι κατασκευασμένοι με τέτοιον τρόπο ώστε να απορροφούν και να εκπέμπουν ακτινοβολία σε κάποιο καθορισμένο από εμάς μήκος κύματος. Ο συνηθέστερος κβαντικός εκπομπός που χρησιμοποιείται στον τομέα της Κβαντικής Οπτικής, αλλά και σε εκείνον της Κβαντικής Πληροφορίας, είναι ο εκπομπός δύο ενεργειακών επιπέδων, όπου έχει επικρατήσει να ονομάζεται qubit (η ονομασία αυτή χρησιμοποιείται ευρέως στην Κβαντική Πληροφορία).

Σε όλες τις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε εδώ (αλλά και γενικά σε πολλές περιπτώσεις στην Κβαντική Οπτική) θα θεωρήσουμε ασθενή αλ/ση του κβαντικού εκπομπού με το ΗΜ πεδίο έτσι ώστε να μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την αλ/ση αυτή ως μία διαταραχή. Πριν δούμε λοιπόν πώς μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και να αντιμετωπίσουμε την αλίση του κβαντικού μας εκπομπού με το Η/Μ πεδίο, θα θυμήσουμε τη χρονοεξαρτημένη θεωρία διαταραχών.

Για τη χρονοεξαρτώμενη θεωρία διαταραχών ξεκινάμε από τη χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H(\vec{r}, t)\, \psi(\vec{r}, t) \qquad (131)$$

Επειδή στην προκειμένη περίπτωση δε μας ενδιαφέρει η εξάρτηση της Χαμιλτονιανής και της κυματοσυνάρτησης από το χώρο θα γράφουμε όπου $H(\vec{r}, t) \to H(t)$ και $\psi(\vec{r}, t) \to \psi(t)$. Όσο αναφορά τώρα τη Χαμιλτονιανή, μπορούμε να τη γράψουμε ως άθροισμα δύο όρων,

$$H(t) = H^{(0)} + H^{(1)}(t) \qquad (132)$$

Ο πρώτος όρος, $H^{(0)}$, είναι η αδιατάραχτη Χαμιλτονιανή του συστήματός μας, η οποία περιγράφει το αδιατάραχτο σύστημα. Για το απομονωμένο αδιατάραχτο σύστημα γνωρίζουμε τις λύσεις της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger, οι οποίες θα δίνονται από τη σχέση

$$H^{(0)} \psi_n = E_n \psi_n \qquad (133)$$

όπου $\psi_n$ και $E_n$ οι ιδιοσυναρτήσεις και οι ιδιοενέργειες αντίστοιχα της αδιατάραχτης Χαμιλτονιανής. Ο δεύτερος όρος, $H^{(1)}(t)$ είναι στην ουσία η διαταραχή η οποία προκύπτει από την αλλαγή του συστήματός μας με το Η/Μ πεδίο.

Τώρα, στην περίπτωση όπου $H^{(1)}(t) = 0$ η εξ. (131) γίνεται

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} y(t) = H^{(0)} y(t) \qquad (134)$$

Στη συνέχεια, θεωρείστε ότι μπορούμε να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση $y(t)$ ως $y(t) = \psi_n T(t)$, δηλαδή να τη γράψουμε ως ένα γινόμενο μιας χρονικής συνάρτησης $T(t)$ και της ιδιοσυνάρτησης $\psi_n$ της $H^{(0)}$ (η επιλογή μας δικαθορίζεται από το γεγονός ότι για $H^{(1)}(t)=0$ έχουμε μόνο την αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή). Τότε, θα έχουμε

$$(134) \Rightarrow i\hbar \frac{dT(t)}{dt}\psi_n = T(t) H^{(0)}\psi_n \overset{(133)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{dT(t)}{dt}\psi_n = T(t) E_n \psi_n \Rightarrow i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = T(t) E_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E_n T(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(t) = T(0)\, e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (135)$$

Επομένως θα έχουμε ότι

$$y(t) = \psi_n T(0)\, e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (136)$$

η οποία αποτελεί μια ειδική λύση της εξ. (134). Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής θα γράφεται (για να είμαστε ακριβείς γράφουμε και την εξάρτηση από τη θέση)

$$y(\vec{r},t) = \sum_n a_n \psi_n(\vec{r})\, e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (137)$$

δηλαδή η γενική λύση γράφεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός των ειδικών λύσεων. Προφανώς, στην παραπάνω έκφραση ο σταθερός όρος $T(0)$ περιέχεται στις σταθερές $a_n$.

Η έως τώρα ανάλυσή μας είχε να κάνει με την περίπτωση του απομονωμένου συστήματός μας μιας και είχαμε θεωρήσει ότι $H^{(1)}(t)=0$. Με άλλα λόγια, η εξ. (136) μας λέει πώς εξελίσσονται στο χρόνο οι αδιατάρακτες ιδιοσυναρτήσεις του συστήματός μας. Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, υποθέτουμε ότι $H^{(1)}(t)\neq 0$. Για την περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η λύση της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger έχει την ίδια μορφή με αυτή της εξ. (137), αλλά με χρονικά εξαρτημένα πλάτη πιθανότητας $a_n(t)$, δηλαδή

$$\psi(t) = \sum_n a_n(t)\, \psi_n\, e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (138)$$

Αντικαθιστώντας στη χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger, βρίσκουμε ότι

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \left[ H^{(0)} + H^{(1)}(t) \right] \psi(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t)\, \psi_n\, e^{-iE_nt/\hbar} + \cancel{i\hbar \sum_n a_n(t)\, \psi_n \frac{-iE_n}{\hbar}\, e^{-iE_nt/\hbar}} =$$

$$= \cancel{\sum_n a_n(t)\, \underbrace{H^{(0)} \psi_n}_{=E_n\psi_n}\, e^{-iE_nt/\hbar}} + \sum_n a_n(t)\, H^{(1)}(t)\, \psi_n\, e^{-iE_nt/\hbar} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t)\, \psi_n\, e^{-iE_nt/\hbar} = \sum_n a_n(t)\, H^{(1)}(t)\, \psi_n\, e^{-iE_nt/\hbar}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση από αριστερά με $\psi_m^*$ και ολοκληρώνοντας σε όλο το χώρο, παίρνουμε

$$i\hbar \int d^3\vec{r}\, \psi_m^* \sum_n \dot{a}_n(t)\, \psi_n\, e^{-iE_nt/\hbar} = \int d^3\vec{r}\, \psi_m^* \sum_n a_n(t)\, H^{(1)} \psi_n\, e^{-iE_nt/\hbar}$$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \left[ \int d^3\vec{r}\, \psi_m^* \psi_n \right] \dot{a}_n(t)\, e^{-iE_nt/\hbar} = \sum_n \left[ \int d^3\vec{r}\, \psi_m^* H^{(1)}(t)\, \psi_n \right] a_n(t)\, e^{-iE_nt/\hbar}$$

Από την ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου συστήματος, δηλαδή από το γεγονός ότι ισχύει $\int d^3\vec{r}\, \psi_m^* \psi_n = \delta_{nm}$, προκύπτει ότι

$$i\hbar\, \dot{a}_m(t)\, e^{-iE_m t/\hbar} = \sum_n H^{(1)}_{mn}(t)\, a_n(t)\, e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (139)$$

όπου θέσαμε (γράφουμε και πάλι την εξάρτηση από τη θέση)

$$H^{(1)}_{mn}(t) = \int d^3\vec{r}\ \psi^*_m(\vec{r})\, H^{(1)}(\vec{r},t)\, \psi_n(\vec{r}) \qquad (140)$$

Από την εξ (139) προκύπτει ότι

$$\dot{a}_m(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n H^{(1)}_{mn}(t)\, a_n(t)\, e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \quad \overset{m \leftrightarrow n}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \dot{a}_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_m H^{(1)}_{nm}(t)\, a_m(t)\, e^{i\omega_{nm} t} \qquad (141)$$

όπου ορίσαμε την κυκλική συχνότητα $\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$.

Σημειώστε ότι η εξ (141) είναι ακριβής μιας και δεν έχουμε κάνει καμία προσέγγιση έως τώρα. Όμως, η επίλυσή της είναι πολύ δύσκολη και στην πράξη θα είναι αριθμητική (παρατηρείστε π.χ. ότι έχει, εν γένει, άπειρους όρους λόγω του αθροίσματος). Επομένως, έχουμε ουσιαστικά ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με, εν γένει, άπειρους όρους, που το λύνουμε αριθμητικά κρατώντας ένα μεγάλο αριθμό από αυτούς τους όρους.

Τι μπορούμε να κάνουμε, όμως, αν θέλουμε να λύσουμε την εξ (141) αναλυτικά; Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών, η οποία είναι μια προσεγγιστική μέθοδος και αναλύεται αμέσως παρακάτω.

Θεωρείστε ότι για $t=0$ το σύστημά μας βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη ιδιοκατάσταση $\psi_i$ (ιδιοκατάσταση του αδιατάραχτου συστήματος για $t=0$). Στην περίπτωση αυτή θα είναι $a_i(t=0)=1$ και $a_{n\neq i}(t=0)=0$, ενώ για $t\neq 0$ η χρονική εξέλιξη των συντελεστών $a_n(t)$ (πλάτη πιθανότητας) θα υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξ. (141). Αν τώρα, το σύστημά μας μεταβαίνει από μια αρχική κατάσταση $i$ σε μια τελική κατάσταση $f$, η οποία έχει κυματοσυνάρτηση $\psi_f$, και στο σύστημά μας έχει εφαρμοστεί ασθενής διαταραχή, τότε τα πλάτη πιθανότητας θα παραμείνουν κοντά στις αρχικές τιμές και τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε την εξ. (141) ως

$$\dot{a}_f(t) \simeq -\frac{i}{\hbar} H^{(1)}_{fi}(t)\, e^{i\omega_{fi}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_f(t) \simeq -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H^{(1)}_{fi}(t')\, e^{i\omega_{fi}t'}\, dt' \qquad (142)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η αναλυτική έκφραση για το πλάτος πιθανότητας μετάβασης από την κατάσταση $i$ στην κατάσταση $f$ στη χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης. Η πιθανότητα λοιπόν, να βρεθούμε στην κατάσταση $f$ σε χρόνο $t$ θα είναι

$$P_f(t) = |a_f(t)|^2 \qquad (143)$$

Στη συνέχεια, θα δούμε κάποια παραδείγματα εφαρμογών της χρονικά εξαρτημένης θεωρίας διαταραχών πρώτης τάξης στην Κβαντική Οπτική.

Παράδειγμα 1:

Θεωρείστε σωμάτιο μάζας m και φορτίου q το οποίο βρίσκεται εντός δυναμικού μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή κυκλικής συχνότητας ω. Θεωρούμε επιπλέον ότι τη χρονική στιγμή t=0 το σωμάτιο βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή. Τώρα, στο σύστημα αυτό εφαρμόζουμε διαταραχή για $t \neq 0$ της μορφής

$$H^{(1)}(t) = -q \cdot x \cdot \mathcal{E}_0 \cdot e^{-t/\tau} \qquad (144)$$

με $\tau > 0$ και $\mathcal{E}_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$

Για την περίπτωση αυτή ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα το σύστημά μας να βρεθεί στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση σε χρόνους $t \geqslant 0$, και στη συνέχεια να ελέγξουμε το αποτέλεσμά μας στο όριο όπου $t \to \infty$.

Στο όριο αυτό $(t \to \infty)$ το αποτέλεσμά μας θα είναι πάντα ανεξάρτητο του χρόνου και για το λόγο αυτό η κατάσταση αυτή ονομάζεται steady state. Στη συνέχεια, ζητάμε να επαναληφθεί η διαδικασία έτσι ώστε να βρούμε την πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί στη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση.

Θα έχουμε λοιπόν για τη μετάβαση από τη θεμελιώδη κατάσταση $(n=0)$ στην πρώτη διεγερμένη $(n=1)$, σύμφωνα με τα παραπάνω, ότι

$$a_1(t) \simeq -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_{10}^{(1)}(t')\, e^{i\omega_{10}t'}\, dt'$$

όπου $\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$. Μιας και για τον αρμονικό ταλαντωτή γνωρίζουμε ότι $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$, θα είναι $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ και $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$, οπότε $\omega_{10} = \omega$. Έτσι λοιπόν, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$a_1(t) \simeq -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_{10}^{(1)}(t)\, e^{i\omega t'}\, dt' \qquad (145)$$

όπου, χρησιμοποιώντας και την εξ. (140), θα είναι

$$H_{10}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi_1^*(x)\ H^{(1)}(t)\ \psi_0(x) \overset{(144)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow H_{10}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi_1^*(x) \left[-q x \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau}\right] \psi_0(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{10}^{(1)}(t) = -q \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \psi_1^*(x)\, \psi_0(x)\, dx$$

Όμως, για τον αρμονικό ταλαντωτή θυμίζουμε ότι οι κυματοσυναρτήσεις της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης στάθμης θα είναι $\psi_0(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2/2}$ και

$\psi_1(x) = \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{1/4} 2\sqrt{a} \cdot x \cdot e^{-ax^2/2}$ αντίστοιχα, όπου $a = \frac{m\omega}{\hbar}$.

Ορίζοντας ως $x_{10}$ το ολοκλήρωμα της παραπάνω εξίσωσης, παίρνουμε ότι

$$x_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \psi_1^*(x)\, \psi_0(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} 2\sqrt{a} \cdot x \cdot e^{-ax^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{10} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{a}{4\pi}\right)^{1/4} 2\sqrt{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx$$

Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται παραπάνω είναι της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2}\,dx = \frac{(2n-1)!}{(2\lambda)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ με $\lambda > 0$ και $n = 1, 2, \ldots$

Οπότε θα είναι

$$X_{10} = \left(\frac{a^2}{4\pi^2}\right)^{1/4} \cancel{2}\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\cancel{2}a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\cancel{a}}{2\cancel{\pi}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{a}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{10} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Αντικαθιστώντας τελικά στην εξίσωση για το $H_{10}^{(1)}(t)$ παίρνουμε ότι

$$H_{10}^{(1)}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2a}}\, q\, \mathcal{E}_0\, e^{-t/\tau} \qquad (146)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την εξ. (146) στην εξ. (145), βρίσκουμε ότι

$$a_1(t) = -\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{q\,\mathcal{E}_0}{\sqrt{2a}}\right)\int_0^t e^{\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right)t'}\,dt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1(t) = \frac{iq\mathcal{E}_0}{\hbar\sqrt{2a}} \left. \frac{e^{(i\omega - \frac{1}{\tau})t'}}{i\omega - \frac{1}{\tau}} \right|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1(t) = \frac{iq\mathcal{E}_0}{\hbar\sqrt{2a}} \frac{1}{i\omega - \frac{1}{\tau}} \left[ e^{(i\omega - \frac{1}{\tau})t} - 1 \right] \qquad (147)$$

Έχοντας υπολογίσει το συντελεστή $a_1(t)$ είναι πλέον πολύ εύκολο να υπολογίσουμε το πλάτος πιθανότητας για την πρώτη διεγερμένη κατάσταση. Χρησιμοποιώντας τις εξ. (143) και (147) βρίσκουμε ότι

$$(142) \Rightarrow P_1(t) = |a_1(t)|^2 = a_1(t)\, a_1^*(t) \overset{(147)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow P_1(t) = \frac{q^2\mathcal{E}_0^2}{\hbar^2 2a} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \left[ e^{(i\omega - \frac{1}{\tau})t} - 1 \right] \left[ e^{(-i\omega - \frac{1}{\tau})t} - 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1(t) = \frac{q^2\mathcal{E}_0^2}{\hbar^2 2a} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \left[ e^{-2t/\tau} + 1 - e^{(i\omega - \frac{1}{\tau})t} - e^{(-i\omega - \frac{1}{\tau})t} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1(t) = \frac{q^2\mathcal{E}_0^2}{\hbar^2 2a} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \left[ 1 + e^{-2t/\tau} - e^{-t/\tau} \underbrace{\left( e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)}_{=2\cos(\omega t)} \right] \overset{a = m\omega/\hbar}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow P_1(t) = \frac{q^2\mathcal{E}_0^2}{2m\omega\hbar} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \left[ 1 + e^{-2t/\tau} + 2e^{-t/\tau}\cos(\omega t) \right] \qquad (148)$$

Η εξ. (148) είναι η ζητούμενη, μιας και μας δίνει την πιθανότητα το σωμάτιό μας, το οποίο βρίσκεται εντός δυναμικού μηχανικού αρμονικού ταλαντωτή, να βρεθεί στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση σε κάποια χρονική στιγμή $t$. Για την περίπτωση όπου $t \to \infty$ θα είναι $e^{-t/\tau} \to 0$, καθώς και $e^{-2t/\tau} \to 0$, οπότε από την εξ. (148) παίρνουμε ότι

$$P_1(t \to \infty) = \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2}{2m\omega\hbar} \frac{\tau^2}{\omega^2\tau^2+1} \qquad (149)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ουσιαστικά ότι η πιθανότητα να βρούμε το σωμάτιό μας στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση ακόμα και μετά την πάροδο πολύ μεγάλου χρονικού διαστήματος είναι μη-μηδενική.

Τώρα, για την περίπτωση όπου έχουμε μετάβαση από τη θεμελιώδη $(n=0)$ στη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση $(n=2)$ θα έχουμε, κατ' αντιστοιχία με πριν, ότι

$$a_2(t) \simeq -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_{20}^{(1)}(t')\, e^{2i\omega t'}\, dt' \qquad (150)$$

αφού $\omega_{20} = \dfrac{E_2 - E_0}{\hbar} = \dfrac{\frac{5}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar} = 2\omega$. Επιπλέον, για το στοιχείο $H_{20}^{(1)}(t)$ θα έχουμε

$$H_{20}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_2^*(x)\, H^{(1)}(t)\, \psi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^*(x)\left[-q\,\mathcal{E}_0\, x\, e^{-t/\tau}\right]\psi_0(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{20}^{(1)}(t) = -q\,\mathcal{E}_0\, e^{-t/\tau}\, x_{20}$$

όπου $x_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\psi_2^*(x)\,\psi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\psi_2(x)\cdot\psi_0(x)$, μιας και στην περίπτωσή μας τα $\psi_n(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις $\left[\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2/2}\cdot H_n(\sqrt{a}\,x)\right.$, όπου $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right)$ είναι τα πολυώνυμα Hermite]. Προκύπτει όμως ότι $x_{20} = 0$ διότι οι $\psi_0(x)$ και $\psi_2(x)$ είναι άρτιες συναρτήσεις που σημαίνει ότι η ποσότητα $x\,\psi_2(x)\,\psi_0(x)$ $(= x_{20})$ είναι περιττή συνάρτηση και επειδή ολοκληρώνουμε περιττή συνάρτηση σε συμμετρικό διάστημα (από $-\infty$ έως $+\infty$)

προκύπτει μηδενικό αποτέλεσμα. Έτσι λοιπόν, προκύπτει ότι $H_{20}^{(1)}(t)=0$ και από την εξ. (150) έχουμε ότι $a_2(t)=0$. Επομένως, βρίσκουμε

$$P_2(t) = |a_2(t)|^2 = 0 \qquad (151)$$

το οποίο σημαίνει ότι ανεξαρτήτως χρόνου, η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιό μας στη δεύτερη διεγερμένη στάθμη ισούται με μηδέν. Θυμίζουμε ότι η ανάλυση έγινε για διαταραχή πρώτης τάξης.

## Παράδειγμα 2:

Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα θεωρούμε σωμάτιο μάζας $m$ και φορτίου $q$ το οποίο βρίσκεται σε απειρόβαθρο κυβικό κουτί δυναμικού που περιγράφεται από την εξίσωση

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{για } x,y,z \in (0,L) \\ \infty, & \text{για } x,y,z \notin (0,L) \end{cases}$$

Για $t>0$ στο σωμάτιο εφαρμόζεται διαταραχή της μορφής

$$H^{(1)}(t) = -qz\,\mathcal{E}_0\, e^{-t/\tau} \qquad (152)$$

Θεωρώντας ότι το σωμάτιο βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση για $t=0$, ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα να έχουμε μετάβαση στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση του συστήματος για μεγάλους χρόνους $(t \to \infty)$.

Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας ότι για το απειρόβαθρο τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού τριών διαστάσεων, το σωμάτιο περιγράφεται από τις κυματοσυναρτήσεις

$$\psi_{n_x,n_y,n_z}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \qquad (153)$$

ενώ οι ενέργειες που αντιστοιχούν στην κάθε ενεργειακή στάθμη του συστήματός μας είναι

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \qquad (154)$$

Για τη θεμελιώδη κατάσταση λοιπόν, θα έχουμε $n_x =$

$= n_y = n_z = 1$ και έτσι από τις εξ. (153) και (154) παίρνουμε αντίστοιχα $\psi_{1,1,1}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$ και $E_{1,1,1} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. Για την πρώτη διεγερμένη κατάσταση θα έχουμε τριπλό εκφυλισμό μιας και τρεις διαφορετικοί συνδυασμοί των $n_x, n_y, n_z$ μας δίνουν ίδια ενέργεια $\left(E_{2,1,1} = E_{1,2,1} = E_{1,1,2} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{mL^2}\right)$, αλλά από τους συνδυασμούς αυτούς προκύπτουν τρεις διαφορετικές κυματοσυναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν την πρώτη διεγερμένη κατάσταση

$$\psi_{2,1,1}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{2/3} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \qquad (155a)$$

$$\psi_{1,2,1}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{2/3} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \qquad (155b)$$

$$\psi_{1,1,2}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{2/3} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \qquad (155c)$$

Μιας και μπορούμε να έχουμε μετάβαση από τη θεμελιώδη στάθμη ($n_x = n_y = n_z = 1$) σε οποιαδήποτε από τις εκφυλισμένες καταστάσεις της πρώτης διεγερμένης στάθμης ($n_x = 2, n_y = n_z = 1$ ; $n_x = n_z = 1, n_y = 2$ ; $n_x = n_y = 1, n_z = 2$) θα πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά κάθε πλάτος πιθανότητας.

Από τη γενική ανάλυση που κάναμε παραπάνω και συγκεκριμένα από την εξ. (142) μπορούμε να πούμε ότι τα πλάτη πιθανότητας για το παράδειγμά μας θα δίνονται από τη σχέση

$$a_{n_x,n_y,n_z}(t) \simeq -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H^{(1)}_{n_x,n_y,n_z;1,1,1}(t')\, e^{i\omega t'}\, dt' \qquad (156)$$

όπου $\omega = \dfrac{E_{2,1,1\,(1,2,1 \text{ ή } 1,1,2)} - E_{1,1,1}}{\hbar} = \dfrac{3\hbar^2\pi^2}{\hbar m L^2} - \dfrac{3\hbar^2\pi^2}{\hbar 2 m L^2} = \dfrac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$

καθώς και $H^{(1)}_{n_x,n_y,n_z;1,1,1}(t) = \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz\, \psi_{n_x,n_y,n_z}(x,y,z) \cdot (-qz\mathcal{E}_0 e^{-t/\tau})\, \psi_{1,1,1}(x,y,z) = -q\mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz\, \psi_{n_x,n_y,n_z}(x,y,z) \cdot z \cdot \psi_{1,1,1}(x,y,z)$.

Επομένως, για τη μετάβαση $1,1,1 \to 2,1,1$ θα έχουμε

$$H^{(1)}_{2,1,1;1,1,1}(t) = -q\,\mathcal{E}_0\, e^{-t/\tau} \int_0^L \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right) dy \cdot$$

$$\cdot \int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) z\, dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^{(1)}_{2,1,1;1,1,1}(t) = 0$$

το οποίο προκύπτει λόγω της ορθογωνιότητας των κυματοσυναρτήσεων του μονοδιάστατου απειρόβαθρου πηγαδιού, δηλαδή $\int_0^L \frac{2}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ για $n \neq m$.

Ομοίως, για τη μετάβαση $1,1,1 \to 1,2,1$ θα είναι

$$H^{(1)}_{1,2,1;1,1,1}(t) = -q\,\mathcal{E}_0\, e^{-t/\tau} \int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \int_0^L \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) dy \cdot$$

$$\cdot \int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) z\, dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^{(1)}_{1,2,1;1,1,1}(t) = 0$$

μιας και $\int_0^L \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) = 0$, και πάλι λόγω ορθογωνιότητας. Όμως, για τη μετάβαση $1,1,1 \to 1,1,2$ θα είναι

$$H^{(1)}_{1,1,2;1,1,1}(t) = -q\,\mathcal{E}_0\, e^{-t/\tau} \int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx \int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy \int_0^L \frac{2}{L}\,\cdot$$

$$\cdot\,\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) z\,dz$$

Εδώ, από την κανονικοποίηση των κυματοσυναρτήσεων έχουμε $\int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy = 1$. Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει $\int_0^L \frac{2}{L}\, z\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)dz = -\frac{16L}{9\pi^2}$

(αποδείξτε το χρησιμοποιώντας αρχικά τη σχέση $\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$ και στη συνέχεια κάνετε ολοκλήρωση κατά παράγοντες). Έτσι λοιπόν, θα είναι

$$H^{(1)}_{1,1,2;1,1,1}(t) = \frac{16\,q\,\mathcal{E}_0 L}{9\pi^2}\, e^{-t/\tau} \qquad (157)$$

και αντικαθιστώντας στην εξ. (156) παίρνοντας το όριο $t\to\infty$ βρίσκουμε τελικά ότι

$$a_{1,1,2}(t\to\infty) = -\frac{i}{\hbar}\,\frac{16\,q\,\mathcal{E}_0 L}{9\pi^2}\int_0^\infty e^{\left(i\omega-\frac{1}{\tau}\right)t'}dt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,1,2}(t\to\infty) = -\frac{i}{\hbar}\,\frac{16\,q\,\mathcal{E}_0 L}{9\pi^2}\,\frac{1}{i\omega-\frac{1}{\tau}}\,\underbrace{e^{(i\omega-\frac{1}{\tau})t'}\Big|_0^{\infty}}_{=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,1,2}(t\to\infty) = \frac{i}{\hbar}\,\frac{16\,q\,\mathcal{E}_0 L}{9\pi^2}\,\frac{1}{i\omega-\frac{1}{\tau}} \qquad (158)$$

Επομένως, η πιθανότητα μετάβασης θα είναι

$$P_{1,1,2}(t\to\infty) = |a_{1,1,2}(t\to\infty)|^2 = \frac{256\cdot q^2\,\mathcal{E}_0^2 L^2}{81\pi^4\hbar^2}\,\frac{\tau^2}{\omega^2\tau^2+1} \qquad (159)$$

<u>Παράδειγμα 3:</u>

Τώρα, θα μελετήσουμε την περίπτωση της ταλαντωτικής διαταραχής. Όπως είδαμε στα αρχικά, καθώς και όπως γνωρίζουμε από τον Ηλεκτρομαγνητισμό, το ηλεκτρικό μονοχρωματικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο γράφεται

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{\varepsilon}\,E_0\,e^{-i\omega t}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{\varepsilon}\,E_0^*\,e^{i\omega t}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (160)$$

όπου $\hat{\varepsilon}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Μιας και στην περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε δεν μας ενδιαφέρει η χωρική εξάρτηση, και έτσι μπορούμε να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο ως

$\vec{E}(t) \propto e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} = 2\cos(\omega t)$.

Για το λόγο αυτό, θα θεωρήσουμε στο παράδειγμα αυτό τη διαταραχή για $t \geq 0$

$$H^{(1)}(t) = 2H^{(1)}\cos(\omega t) = H^{(1)}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \qquad (161)$$

όπου $H^{(1)}$ ανεξάρτητο του χρόνου. Αντικαθιστώντας στην εξ. (142) παίρνουμε ότι

$$a_f = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_{fi}^{(1)}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t'}\right)e^{i\omega_{fi}t'}\,dt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_f = -\frac{i}{\hbar}H_{fi}^{(1)}\int_0^t\left[e^{i(\omega_{fi}+\omega)t'} + e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'}\right]dt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_f = -\frac{i}{\hbar}H_{fi}^{(1)}\left[\frac{e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}-1}{i(\omega_{fi}+\omega)} + \frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}-1}{i(\omega_{fi}-\omega)}\right] \qquad (162)$$

Τα εκθετικά της εξ. (162) παίρνουν τιμές της τάξης της μονάδας μιας και όπως γνωρίζουμε $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Για την περίπτωση όπου έχουμε σχεδόν συντονισμό, δηλαδή $\omega \simeq \omega_{fi}$, συμπεραίνουμε ότι ο δεύτερος όρος στην εξ. (162)

είναι πολύ μεγαλύτερος από τον πρώτο μιας και ισχύει ότι $\frac{1}{\omega_{fi}+\omega} \ll \frac{1}{\omega_{fi}-\omega}$. Με άλλα λόγια, ο πρώτος όρος της εξ. (162) πραγματοποιεί πολύ περισσότερες ταλαντώσεις εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος σε σχέση με τον δεύτερο όρο και για αυτό λέμε ότι ο πρώτος όρος είναι ένας fast oscillating term τον οποίο μπορούμε να αγνοήσουμε. Η προσέγγιση αυτή που πραγματοποιούμε αγνοώντας τον fast oscillating term ονομάζεται προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος ή αλλιώς rotating wave approximation (RWA). Η προσέγγιση αυτή είναι ευρέως διαδεδομένη στην Κβαντική Οπτική μιας και τις περισσότερες φορές ασχολούμαστε με ασθενείς αλ/σεις ύλης-φωτός. Επομένως, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση RWA η εξ. (162) γράφεται

$$a_f \simeq \frac{H_{fi}^{(1)}}{\hbar} \frac{1-e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi}-\omega} = \frac{H_{fi}^{(1)}}{\hbar} e^{i(\omega_{fi}-\omega)t/2} \frac{e^{-i(\omega_{fi}-\omega)t/2} - e^{i(\omega_{fi}-\omega)t/2}}{\omega_{fi}-\omega}$$

$$\Rightarrow a_f \simeq -\frac{2iH_{fi}^{(1)}}{\hbar} e^{i(\omega_{fi}-\omega)t/2} \cdot \frac{\sin[(\omega_{fi}-\omega)t/2]}{\omega_{fi}-\omega} \qquad (163)$$

Άρα, η πιθανότητα το σύστημά μας να βρεθεί στην κατάσταση $f$ σε χρόνο $t$ θα είναι

$$P_f(t) = |a_f(t)|^2 = \frac{4|V_{fi}|^2}{(\omega_{fi}-\omega)^2} \sin^2\left[\frac{(\omega_{fi}-\omega)t}{2}\right] \qquad (164)$$

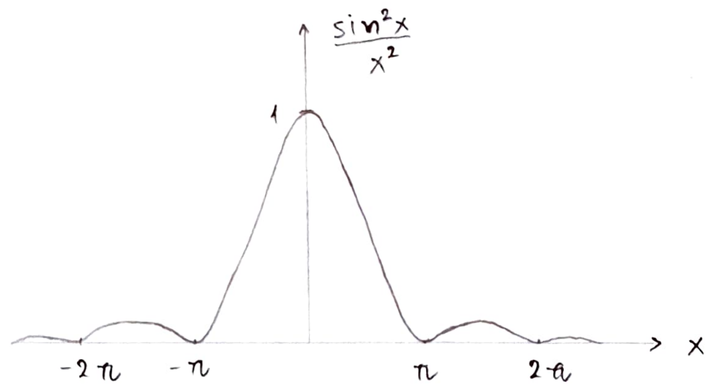
όπου θέσαμε $V_{fi} = \frac{H_{fi}^{(1)}}{\hbar}$. Για την περεταίρω μελέτη της εξ. (164) πολλ/ζουμε και διαιρούμε με $t^2$, οπότε βρίσκουμε ότι

$$P_f(t) = |V_{fi}|^2 t^2 \cdot \frac{\sin^2[(\omega_{fi}-\omega)t/2]}{[(\omega_{fi}-\omega)t/2]^2} = |V_{fi}|^2 t^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} \qquad (165)$$

όπου $x = \frac{(\omega_{fi}-\omega)t}{2}$. Σημειώνουμε ότι για την περίπτωση όπου $\omega_{fi} \to \omega \Rightarrow x \to 0$. Μιας και για $x \to 0$ η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x} \to 1$, η εξ. (165) γίνεται

$$\lim_{\omega \to \omega_{fi}} P_f(t) \simeq |V_{fi}|^2 t^2 \qquad (166)$$

η οποία ισχύει για $|V_{fi}|^2 t^2 \ll 1$ αφού έχει προκύψει από τη χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης. Τέλος, στο παρακάτω σχήμα απεικονίζουμε τη συνάρτηση $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ για να έχουμε μια εικόνα για το πώς εξελίσσεται η $P_f(t)$ με το χρόνο




Παράδειγμα 4:

Σαν ένα τελευταίο παράδειγμα στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη μετάβαση προς το συνεχές και θα καταλήξουμε στο χρυσό κανόνα του Fermi (Fermi golden rule ή FGR).

Έως τώρα, έχουμε θεωρήσει ότι το υπό μελέτη σύστημα μας μεταβαίνει από μία αρχική κατάσταση $|i\rangle$ σε μία τελική κατάσταση $|f\rangle$ σε κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Τι θα αλλάξει όμως αν θεωρήσουμε ότι το σύστημά μας δεν μεταβαίνει σε μία τελική κατάσταση $|f\rangle$, αλλά αντιθέτως σε ένα συνεχές καταστάσεων; Κατ' αρχήν να σημειώσουμε ότι το συνεχές καταστάσεων χαρακτηρίζεται από την πυκνότητα καταστάσεων $\rho(E)$, η οποία περιέχει την πληροφορία για το πώς κατανέμονται οι καταστάσεις στην περίπτωση αυτή. Εφόσον, τώρα, το σύστημά μας μπορεί να μεταβεί σε οποιαδήποτε από τις καταστάσεις οι οποίες περιγράφονται από την πυκνότητα καταστάσεων $\rho(E)$, η συνολική πιθανότητα μετάβασης δίνεται από τη σχέση

$$P(t) = \int_{\substack{\text{όλες οι} \\ \text{τελικές ενέργειες}}} P_f(t)\,\rho(E)\,dE \qquad (167).$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην εξ. (167) την έκφραση για το $P_f(t)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα (σημειώνουμε ότι $\omega_{fi} = \frac{E}{\hbar}$), έχουμε ότι

$$P(t) = \int_{\substack{\text{όλες οι τε-} \\ \text{λικές ενέργειες}}} dE \, \frac{4|V_{fi}|^2}{(E/\hbar - \omega)^2} \sin^2\left[\frac{(E/\hbar - \omega)t}{2}\right] \rho(E) \qquad (168)$$

Για την παραπάνω μετάβαση που περιγράφουμε έχουμε $E_i + \hbar\omega = E_f \Rightarrow \omega = \frac{E_{fi}}{\hbar}$. Επομένως, αφού θεωρούμε $\omega \simeq \omega_{fi}$ μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\rho(E)$ με το $\rho(E_{fi})$, καθώς επίσης να θεωρήσουμε ότι το $|V_{fi}|^2$ αλλάζει πολύ αργά με την ενέργεια (σε σχέση με τη συνάρτηση του ημιτό-νου) και το υπολογίζουμε και αυτό για $E_f = \hbar\omega + E_i$. Σύμ-φωνα με όλα τα παραπάνω έχουμε ότι

$$P(t) \simeq |V_{fi}|^2 \rho(E_{fi}) \int_{\substack{\text{όλες οι τε-} \\ \text{λικές ενέργειες}}} dE \, \frac{4\sin[(E/\hbar - \omega)t/2]}{(E/\hbar - \omega)^2}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα για τις τελικές ενέργειες εκτεί-νεται από 0 έως $+\infty$. Τώρα, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής και ορίζουμε $x = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{\hbar} - \omega\right)t \Rightarrow \frac{2x}{t} = \frac{E}{\hbar} - \omega \Rightarrow E = \hbar\left(\frac{2x}{t} + \omega\right)$

$\Rightarrow dE = \frac{2\hbar}{t}dx$. Επιπλέον, αν $E \to 0$ τότε $x \to -\omega t/2$ και αν $E \to +\infty$ τότε και $x \to +\infty$. Εφαρμόζοντας αυτή την αλλαγή μεταβλητής και επεκτείνοντας το κάτω όριο στο $-\infty$ παίρνουμε τελικά

$$P(t) \simeq |V_{fi}|^2 \rho(E_{fi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\hbar}{t} dx \, \frac{\sin^2 x}{x^2} \, t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(t) \simeq 2\hbar |V_{fi}|^2 \rho(E_{fi}) t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(t) \simeq 2\pi\hbar |V_{fi}|^2 \rho(E_{fi}) t \qquad (169)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$.

Έτσι λοιπόν, ο ρυθμός μετάβασης του συστήματός μας προς ένα συνεχές με πυκνότητα καταστάσεων $\rho(E)$ θα δίνεται ως ο ρυθμός μεταβολής της εξ. (169), δηλαδή

$$W = \frac{dP(t)}{dt} = 2\pi\hbar |V_{fi}|^2 \rho(E_{fi}) = 2\pi \frac{|H_{fi}^{(1)}|^2}{\hbar} \rho(E_{fi}) \qquad (170)$$

Η εξ. (170) είναι ο χρυσός κανόνας του Fermi (FGR). Ο FGR είναι πολύ σημαντικός στην Κβαντική Οπτική μιας και οι περισσότερες προσεγγίσεις που χρησιμοποιήσαμε για να τον εξαγάγουμε εφαρμόζονται σε πληθώρα συστημάτων και φαινομένων, όπως π.χ. το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, ο νόμος ακτινοβολίας του Planck κ.α. (Meystre και Sargent, Κεφ. 3.3).

Τέλος, σημειώστε ότι για την εξαγωγή του FGR χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $E_f = E_i + \hbar\omega$ (εξαναγκασμένη απορρόφηση ή αλλιώς stimulated absorption). Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και εάν παίρναμε $E_f = E_i - \hbar\omega$ (εξαναγκασμένη εκπομπή ή stimulated emission) μιας και $|V_{fi}|^2 = |V_{if}|^2$. Έτσι με αυτό τον τρόπο αποδεικνύεται αυστηρά ότι ο ρυθμός Einstein για την εξαναγκασμένη εκπομπή ισούται με εκείνον για την εξαναγκασμένη απορρόφηση. Αν θέλουμε τώρα να λάβουμε υπόψιν και το ρυθμό αυθόρμητης εκπομπής ο οποίος προκύπτει από τη θεωρία του Einstein, τότε θα πρέπει να φύγουμε από την ημικλασική προσέγγιση, όπου θεωρούμε κβαντωμένη την ύλη και κλασικό το Η/Μ πεδίο, και θα πρέπει να μεταβούμε στην κβαντική προσέγγιση, όπου θεωρούμε κβαντισμένη την ύλη αλλά και το Η/Μ πεδίο (θα το δούμε σε επόμενο μάθημα).

- Μορφή της αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης και η διπολική προσέγγιση

Ξεκινάμε και εδώ την ανάλυσή μας θεωρώντας Η/Μ πεδίο της μορφής

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{\varepsilon} E_0 e^{-i\omega t} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{\varepsilon} E_0^{*} e^{+i\omega t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

όπου προφανώς το $\vec{E}(\vec{r},t)$ είναι ένα κλασικό πεδίο με διεύθυνση κατά το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\varepsilon}$ και κυματάριθμο $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Το μήκος κύματος για ενέργεια διέγερσης 1eV