

- Squeezed καταστάσεις

Έως τώρα έχουμε προσπαθήσει να μελετήσουμε το μονοχρωματικό H/M πεδίο στο κενό με δύο διαφορετικά σύνολα καταστάσεων: τις number states και τις σύργυνες καταστάσεις.

Αν και οι number states, οι οποίες αποτελούν τις ιδιοτιμές των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, φαίνονταν οι ιδανικοί υποψήφιοι για να περιγράψουν το H/M πεδίο, είδαμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει μιας και δεν δίνουν τη σωστή συμπεριφορά όταν πάρε να υπολογίσουμε τη ρύση αργή του ηλεκτρικού πεδίου. Εν τέλει, παίρνουμε τη σωστή συμπεριφορά της ρύσης αργής του ηλεκτρικού πεδίου όταν την υπολογίζουμε με τη βοήθεια των σύργυνων καταστάσεων, και αυτή ουσιαστικά ήταν η αφορμή για την εισαγωγή του συνόλου αυτών των καταστάσεων στην ανάλυσή μας. Εκτός από αυτά τα δύο σύνολα, υπάρχει ένα ακόμα πολύ γνωστό σύνολο καταστάσεων το οποίο μας βοηθά να αναλύσουμε περαιτέρω το πεδίο μας. Το σύνολο αυτό περιέχει τις λεγόμενες squeezed states. Για να καταλάβουμε την ανάγκη εισαγωγής αυτών των καταστάσεων θα πρέπει να ξεκινήσουμε

από τις σύρφωνες καταστάσεις.

Συγκεκριμένα, θυμηθείτε ότι στην ανάλυσή μας για τις σύρφωνες καταστάσεις είχαμε ορίσει τους ορθογώνιους τελεστές $\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ και $\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ στις εζ. (82), και

οι τελεστές αυτοί είχανε ότι υπακούουν στη μεταθετική σχέση $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}$. Επίσης, λόγω της μορφής τους

είχαμε συσχετίσει τον τελεστή \hat{X}_1 με τον τελεστή της \hat{q} και τον τελεστή \hat{X}_2 με εκείνον της ορμής και συγκεκριμένα οι τελεστές \hat{X}_1 και \hat{X}_2 αποτελούν το αδιάσπαστο ζεύγος των \hat{q} και \hat{p} . Τέλος, θυμίζουμε ότι οι μι-

γαδικές ιδιοτιμές των σύρφωνων καταστάσεων μπορούν να γραφούν ως $a = |a|e^{i\theta}$, όπου το $|a| = \sqrt{n}$, δηλαδή σχετίζεται με τον αριθμό των φωτονίων που υπάρχουν στο χώρο, ενώ το θ σχετίζεται με τη φάση του πεδίου.

Αφού κάνουμε την απαραίτητη ανασκόπηση, αν πάρουμε τώρα τη μέση τιμή των \hat{X}_1 και \hat{X}_2 με τη βοήθεια των σύρφωνων καταστάσεων, βρίσκουμε ότι

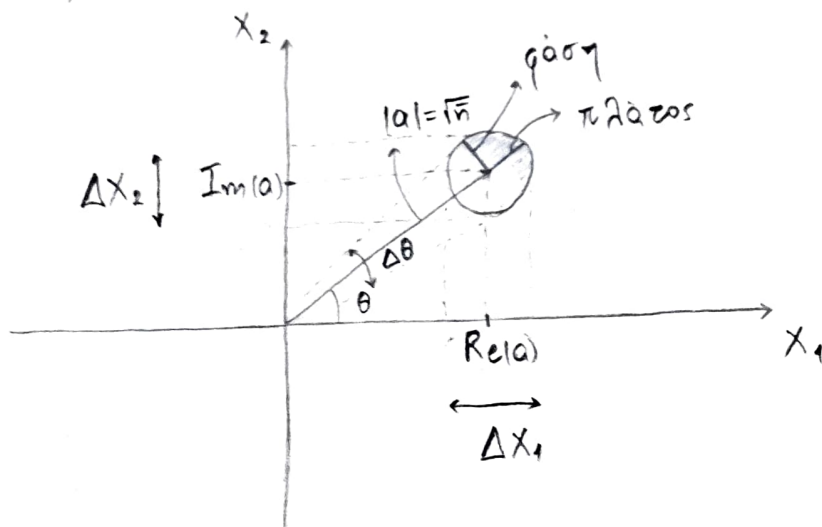
$$\langle a | \hat{X}_1 | a \rangle \equiv \langle \hat{X}_1 \rangle_a = \frac{1}{2} \langle a | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | a \rangle = \frac{1}{2} (a + a^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \hat{X}_1 \rangle_a = \text{Re}(a) \quad (107a)$$

$$\langle a | \hat{X}_2 | a \rangle \equiv \langle \hat{X}_2 \rangle_a = \frac{1}{2i} \langle a | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | a \rangle = \frac{1}{2i} (a - a^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \hat{X}_2 \rangle_a = \text{Im}(a) \quad (107b)$$

Νωρίτερα, είχαμε βρει και τις αβεβαιότητες για τους ορθογώνιους αυτούς τελεστές, και συγκεκριμένα από την εJ (90) έχουμε $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_a = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_a = \frac{1}{4}$, η οποία όπως είχαμε πει είναι και η διακύμανση του κενού. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω μπορούμε να πάρουμε το σχήμα που φαίνεται στη συνέχεια.



Το παραπάνω διάγραμμα, το οποίο μοιάζει με το φασματικό επίπεδο, περιέχει ουσιαστικά όλες τις πληροφορίες για τη σύρση κατάσταση $|a\rangle$. Συγκεκριμένα, όπως είδαμε και πιο πριν, μια σύρση κατάσταση $|a\rangle$ είναι ουσιαστικά μια μεταμορφωμένη κατάσταση του κενού, μιας και $|a\rangle = D(a)|0\rangle$, και όπως είδαμε αυτή η μεταμόρφωση είναι κατά $\text{Re}(a)$ στον οριζόντιο άξονα και κατά $\text{Im}(a)$ στον κάθετο. Η απροσδιοριστία για τα \hat{X}_1 και \hat{X}_2 είναι η ίδια,

$$\Delta X_i = \sqrt{\langle (\Delta \hat{X}_i)^2 \rangle} = \frac{1}{2} \text{ με } i=1,2, \text{ και για αυτό προκύπτει}$$

το μεταμορφωμένο κύκλωμα στο προηγούμενο διάγραμμα.

Μιας και η ιδιοτιμή της σύρσης κατάστασης $|a\rangle$ γράφεται ως $a = |a| e^{i\theta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το παραπάνω

διάγραμμα ως ένα διάγραμμα φάσης, όπου $|a| = \sqrt{n}$

είναι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την αρχή των αξόνων (προφανώς για $|a|=0$ ο κύκλος θα έχει

κέντρο την αρχή των αξόνων) και θ η γωνία που σχηματίζει ως προς τον οριζόντιο άξονα. Από την απροσδιο-

ριστία ως προς τον οριζόντιο άξονα. Από την απροσδιο-

ριστία των $\hat{\chi}_1$ και $\hat{\chi}_2$ και σκεπτόμενοι τα μοναδιαία διάνυσματα \hat{r} και $\hat{\theta}$ των πολικών συντεταγμένων, μπορούμε να δούμε ότι η απροσδιοριστία για το $|a|$ είναι συγγραμμική του ίδιου του $|a|$, δηλαδή κατά μήκος του \hat{r} σε πολικές συντεταγμένες, ενώ η απροσδιοριστία για τη γάση θ είναι κάθετη στο διάνυσμα \hat{r} , δηλαδή κατά μήκος του $\hat{\theta}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Στη συνέχεια, θυμίζουμε ότι το μονοχρωματικό μας πεδίο μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια των ορθογώνιων τελεστών μας και

$$\hat{E}_x(z,t) = \epsilon_0 (\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^+ e^{i\omega t}) \sin(kz) \stackrel{(83)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_x(z,t) = 2 \epsilon_0 \sin(kz) [\hat{\chi}_1 \cos(\omega t) + \hat{\chi}_2 \sin(\omega t)] \quad (108)$$

Προφανώς, στην παραπάνω εξίσωση οι τελεστές \hat{a} και \hat{a}^+ δίνονται για $t=0$ και η γάση $\varphi = \omega t$ μας δίνει τη χρονική εξέλιξη των συγκεκριμένων τελεστών αλλά και του πεδίου γενικότερα. Επομένως, το πεδίο της εξ. (108) μπορούμε να το ξαναγράψουμε ως

$$\hat{E}_x(z, \varphi) = 2 \epsilon_0 \sin(kz) [\hat{X}_1 \cos \varphi + \hat{X}_2 \sin \varphi] \quad (109)$$

Παίρνοντας τώρα το μεταθετικό του $\hat{E}_x(z, 0)$, δηλαδή για $t=0$, και του $\hat{E}_x(z, \varphi)$, δηλαδή για $t \neq 0$, και με τη χρήση της μεταθετικής σχέσης $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$, βρίσκουμε

$$[\hat{E}_x(z, 0), \hat{E}_x(z, \varphi)] = i \epsilon_0^2 \sin^2(kz) \sin \varphi \quad (110)$$

Δηλαδή ο μεταθετικός του ηλεκτρικού πεδίου με τον εαυτό του, αλλά με διαφορετική φάση, είναι μη-μηδενικός. Από τη γενικευμένη αρχή της αβεβαιότητας που αναφέραμε και πριν (σελ. 52) παίρνουμε ότι

$$\langle (\Delta E(z, 0))^2 \rangle \langle (\Delta E(z, \varphi))^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \epsilon_0^2 \sin^2(kz) |\sin \varphi| \quad (111)$$

όπου τη διασπορά του πεδίου κάθε φορά μπορούμε να την υπολογίσουμε με τη βοήθεια οπωσδήποτε συνόλου καταστάσεων επιθυρούμε.

Για τις σύμφωνες καταστάσεις έχουμε ήδη δει ότι η αβεβαιότητα για το πεδίο είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου (δηλαδή της φάσης φ). Παρ' όλα αυτά αν

για κάποιο άλλο σύνολο καταστάσεων λοχία, για παράδειγμα, ότι

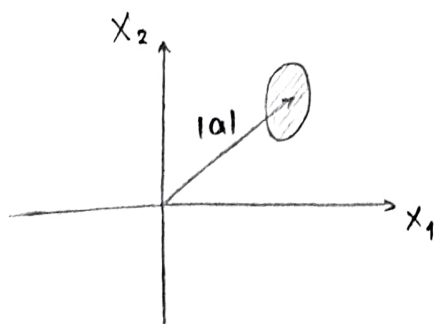
$$\Delta E_x(z, 0) < \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_0 |\sin(kz) \sin \varphi| \quad (112)$$

τότε θα πρέπει για $\varphi \neq 0$ να λοχία ότι

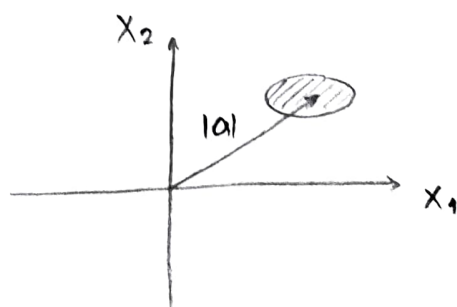
$$\Delta E_x(z, \varphi) > \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_0 |\sin(kz) \sin \varphi| \quad (113)$$

έτσι ώστε το γινόμενο της εξ. (111) να συνεχίσει να λοχία. Από τις εξ. (112), (113) φαίνεται ότι η απροσδιοριστία για $\varphi = 0$ είναι μειωμένη (ή αλλιώς συμπιεσμένη) σε σχέση με την περίπτωση όπου $\varphi \neq 0$, δηλαδή με άλλα λόγια εξαρτάται από τη γάση φ . Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, όπου η απροσδιοριστία (ή διασπορά ή θόρυβος) για το ένα μέγεθος είναι μεγαλύτερη από του δεύτερου μεγέθους, τότε λέμε ότι έχουμε συμπιεσμένο φως (squeezing light). Αν υπάρχει, λοιπόν, σύνολο καταστάσεων το οποίο να ικανοποιεί τις εξ. (112) και (113), συμπεραινούμε ότι αυτό το σύνολο θα "συμπιέζει" την απροσδιοριστία

είτε του \hat{X}_1 είτε του \hat{X}_2 μιας και χρησιμοποιήσαμε τους
 συγκεκριμένους τελεστές για να περιγράψουμε το πεδίο
 μας. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι για το συγκεκρι-
 μένο σύνολο καταστάσεων έχουμε "συρπίεση" των ορθογώ-
 νων τελεστών (quadrature squeezing) και η "συρπίεση" αυ-
 τή θα εξαρτάται από τη φάση του πεδίου, δηλαδή θα
 σχετίζεται με την κυρτική φάση του φωτός. Το σύνολο
 αυτό των καταστάσεων θα περιέχει τις λεγόμενες συρπι-
 εσμένες καταστάσεις (squeezed states). Στα σχήματα
 παρακάτω φαίνονται κάποια παραδείγματα για τις απροσδιωρι-
 στίες των τελεστών \hat{X}_1 και \hat{X}_2 έχοντας χρησιμοποιήσει
 για τον υπολογισμό τους κάποιες squeezed states, τον
 υπολογισμό των οποίων θα δούμε αργότερα παρακάτω. Συγκρί-
 νετε τα σχήματα αυτά με το αντίστοιχο για τις συρπι-
 νες καταστάσεις.



Συρπιεσμένη μετασχηματισμένη
 κατάσταση για τον \hat{X}_1



Συρπιεσμένη μετασχηματισμένη
 κατάσταση για τον \hat{X}_2 .

Όπως φαίνεται λοιπόν από τα παραπάνω σχήματα μπορούμε να μειώσουμε την απροσδιοριστία π.χ. ΔX_1 , αλλά με κόστος να αυξηθεί εκείνη για το \hat{X}_2 . Υπάρχουν λοιπόν περιπτώσεις όπου θέλουμε να έχουμε μια πολύ μικρή αβεβαιότητα π.χ. για τη γάση αδιαφορώντας αν αυτό θα αυξήσει την αβεβαιότητα για το πλάτος. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό δεν μπορούν να μας το προσφέρουν οι σύγχρονες καταστάσεις μιας και ισχύει ότι $\Delta X_1 = \Delta X_2$ και συγκεκριμένα και οι δύο αβεβαιότητες ισοδυναμούν με τις αντίστοιχες αβεβαιότητες του κενού. Έτσι λοιπόν, οι squeezed states μπορούν να βρουν εφαρμογή σε διάφορες περιπτώσεις όπου θέλουμε να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερο θόρυβο (ανίχνευση ασθενών σημάτων), όπως π.χ. στην ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων η οποία επιτυγχάνεται με τη χρήση υπερβολοειδών μεγάλης κλίμακας.

Εφόσον σκιαγραφήσαμε τις squeezed states και είδαμε και τη χρησιμότητά τους ως προσπαθήσουμε να τις ορίσουμε και από τη μαθηματική σκοπιά. Θυμηθείτε ότι ουσιαστικά οι σύρφωνες καταστάσεις ορίζονται με τη βοήθεια του τελεστή μετατόπισης $D(\alpha)$, ο οποίος ορίζεται στην εξ. (70), και ουσιαστικά ο τελεστής εφαρμόζεται πάνω στην κατάσταση κενού $|0\rangle$, δηλαδή μια σύρφωνη κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως μια μετατοπισμένη κατάσταση του κενού. Αντίστοιχα, για τις squeezed states, ο squeezed τελεστής ορίζεται ως

$$\hat{S}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta \hat{a}^{\dagger 2})} \quad (114)$$

όπου $\zeta = r e^{i\theta}$. Η παράμετρος r είναι γνωστή ως παράμετρος σύρτισης (squeezed parameter) και παίρνει τιμές στο διάστημα $r \in [0, +\infty)$, ενώ η γωνία θ παίρνει τιμές $\theta \in [0, 2\pi]$. Βλέποντας τον ορισμό της εξ. (70) για τον τελεστή μετατόπισης, ο squeezed τελεστής

της \hat{J} . (114) ποιάζει με γενίκευσή του. Προσέγγιζε ο-
 πως μία βασική και θεμελιώδη διαφορά: ενώ ο τελε-
 στής $\hat{D}(\alpha)$ έχει να κάνει με καταστάσεις οι οποίες πε-
 ριέχουν ένα μόνο φωτόνιο μιας και είναι $\hat{D}(\alpha) \propto \hat{a}, \hat{a}^\dagger$,
 παρατηρούμε ότι ο $\hat{S}(\zeta)$ θα έχει να κάνει με κατα-
 στάσεις οι οποίες περιέχουν δύο φωτόνια μιας και
 $\hat{S}(\zeta) \propto \hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger 2}$. Συγκεκριμένα, επειδή $\hat{S}(\zeta) \propto \hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger 2}$,
 αυτό σημαίνει ότι τα φωτόνια θα δημιουργούνται και
 θα καταστρέφονται ανά ζεύγη. Δρώντας λοιπόν με τον
 $\hat{S}(\zeta)$ πάνω στην κατάσταση $|0\rangle$ [αντίστοιχα είχαμε κά-
 νει πριν με τον $\hat{D}(\alpha)$] μπορούμε να πάρουμε ένα είδος
 δι-φωτονιακής σύρραξης κατάστασης μιας και με τη
 δράση του συγκεκριμένου τελεστή μπορούν να δημιουρ-
 γηθούν ή να καταστραφούν ζεύγη φωτονίων.

Στη συνέχεια, θέλουμε να βρούμε τη διασπορά για τους
 ορθογώνιους τελεστές \hat{X}_1 και \hat{X}_2 με τη βοήθεια των

squeezed states του κενού $|\zeta\rangle = \hat{S}(\zeta) |0\rangle$ (αναι για τη

$|0\rangle$ θα μπορούσαμε να έχουμε μια οποιαδήποτε άλλη κατάσταση $|\psi\rangle$ στη θέση της και έτσι θα είχαμε ένα διαφορετικό σύνολο από squeezed states. Αν π.χ. είχαμε μια

σύρραξη κατάσταση θα είχαμε το σύνολο των squeezed

coherent states το οποίο θα ήταν $|\psi\rangle = \hat{S}(\zeta) |a\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow |\psi\rangle = \hat{S}(\zeta) \hat{D}(a) |0\rangle$. Με τη βοήθεια της εξ. (75), και

όπως κάναμε και για τον τελεστή μετατόπισης $\hat{D}(a)$, βρί-

σκουμε ότι

$$\hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{a} \hat{S}(\zeta) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\varphi} \sinh r \quad (115)$$

$$\hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\zeta) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\varphi} \sinh r \quad (116)$$

όπου ισχύει ότι $\hat{S}^\dagger(\zeta) = \hat{S}(-\zeta)^\ominus$. Εφόσον για τον υπολογι-

σμό των \hat{X}_1 και \hat{X}_2 εκφράσεις της μορφής $\langle \zeta | \hat{a}^{(\pm)} | \zeta \rangle =$

$= \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{a}^{(\pm)} \hat{S}(\zeta) | 0 \rangle$, με τη βοήθεια των παραπάνω

εξισώσεων μπορούμε να βρούμε ότι

$$\ominus = S^{-1}(\zeta)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cdot \cosh r \cdot \cos \varphi] \quad (117)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \sinh r \cdot \cosh r \cdot \cos \varphi] \quad (118)$$

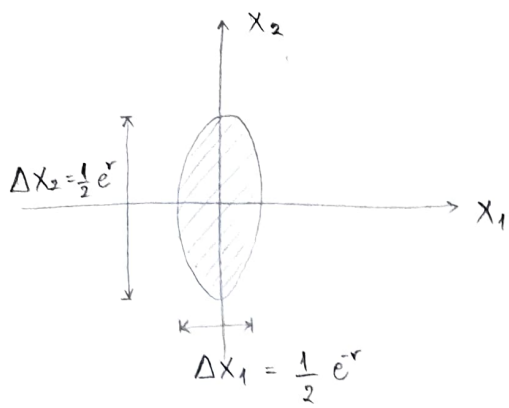
Για την ειδική περίπτωση όπου $\varphi = 0$, οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την απλή μορφή

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad \text{και} \quad \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} \quad (119)$$

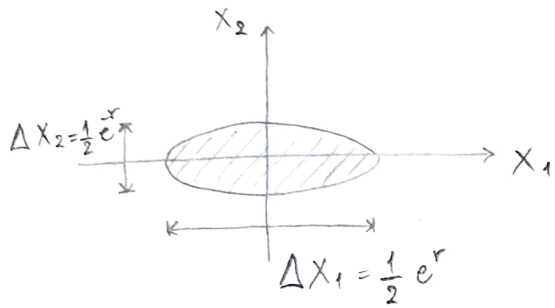
Ουσιαστικά, οι εξ. (119) περιγράφουν "συρπίεση" (squeezing) της αβροσδιοριστίας για τον ορθογώνιο τελεστή \hat{X}_1 . Στην περίπτωση όπου θέταρε $\varphi = \pi$ οι εξ. (117) και (118) θα μας έδιναν

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} \quad \text{και} \quad \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (120)$$

Τώρα, οι εξ. (120) περιγράφουν squeezing της αβροσδιοριστίας για τον τελεστή \hat{X}_2 . Τα συμπέρασμα από τις εξ. (119) και (120) συγκεντρώνονται στα παρακάτω σχήματα.



Squeezing της απροσδιοριστίας του \hat{X}_1 . Οι απροσδιοριστίες των δύο τελεστών έχουν υπολογιστεί με τη βοήθεια των καταστάσεων $|\zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle$ με $\zeta = r e^{i\varphi}$ και $\varphi = 0$.



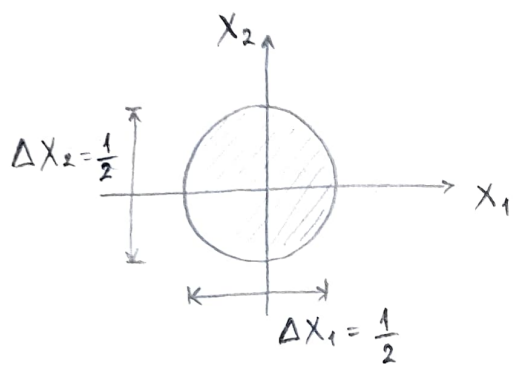
Squeezing της απροσδιοριστίας του \hat{X}_2 . Ο υπολογισμός των απροσδιοριστιών έχει γίνει με το ίδιο σύνολο καταστάσεων όπως και πριν αλλά για $\varphi = \pi$.

Θυμηθείτε ότι για τους ορθογώνιους τελεστές \hat{X}_1 και \hat{X}_2 ισχύει για οποιοδήποτε σύνολο καταστάσεων ότι [εξ. (85)]

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16} \quad (121)$$

Και για τα δύο σύνολα των squeezed states που εξετάσαμε (squeezed states του κενού με $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi$ αντίστοιχα) ισχύει η ισότητα στην εξ. (121). Παρ' όλα αυτά, αυτό δεν είναι γενικό συμπέρασμα και για τυχαίες squeezed states για $\varphi \neq 0, \pi$ θα είναι $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle > \frac{1}{16}$

Για σύγκριση παραθέτουμε παρακάτω το αντίστοιχο σχήμα για τις απροσδιοριστίες των \hat{x}_1 και \hat{x}_2 υπολογισμένες με την κατάσταση του κενού $|0\rangle$.



και \hat{x}_2 προκύπτει κύκλος με το κέντρο του να είναι η αρχή των αξόνων.

Για την κατάσταση του κενού δεν έχουμε squeezing (ή μπορούμε να θεωρήσουμε $\hat{S}(\zeta)=1$) οπότε στο σχήμα για τις απροσδιοριστίες των \hat{x}_1

Παρατηρούμε ότι για την κατάσταση του κενού έχουμε

$$\langle (\Delta\hat{x}_1)^2 \rangle = \langle (\Delta\hat{x}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4}, \text{ όπως αναμέναμε, και για το}$$

λόγω αυτό μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μηδενικό squeezing. Μιας και ο κύκλος στο παραπάνω σχήμα έχει

το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε πως για την κατάσταση κενού, εκτός από μηδενικό squeezing, θα έχουμε και μηδενική μετατόπιση, ή με άλλα λόγια $\hat{D}(\alpha)=1$.

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στη σκέψη να ορίσουμε ένα γενικότερο σύνολο, τις squeezed coherent states (συμπιεσμένες σύγχρονες καταστάσεις). Για να περιγράψουμε μία τέτοια κατάσταση θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή μετατόπισης $\hat{D}(\alpha)$ αλλά και τον τελεστή συμπιέσεως $\hat{S}(\zeta)$, και συγκεκριμένα η κατάσταση αυτή θα γράφεται

$$|a, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\zeta) |0\rangle \quad (122)$$

Προφανώς, για $\zeta=0$ η εξ. (122) θα μας δώσει ξανά τις γνωστές μας σύγχρονες καταστάσεις, ενώ για $\alpha=0$ θα πάρουμε ξανά τις squeezed states του κενού.

Λαμβάνοντας υπόψη τις εξ. (73), (74), (115) και (116) μπορούμε να αποδείξουμε ότι χρησιμοποιώντας την κατάσταση $|a, \zeta\rangle$ της εξ. (122) παίρνουμε ότι

$$\langle \hat{a} \rangle = a, \quad \langle \hat{a}^2 \rangle = a^2 - e^{i\theta} \sinh r \cdot \cosh r = \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle^*$$

$$\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle = |a|^2 + \sinh^2 r \quad (123)$$

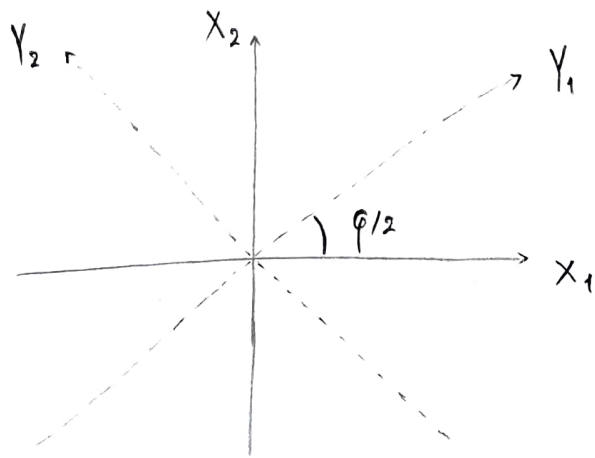
όπου $a = |a|e^{i\theta}$ και $f = re^{i\varphi}$. Στη συνέχεια, πιας και
 δεν έχουμε θεωρήσει καμία συγκεκριμένη γωνία φ όπως
 κάνανε στη squeezed state του κενού, είναι χρήσιμο να
 ορίσουμε τους περιστρεφόμενους ορθογώνιους τελεστές
 (rotated quadrature operators) ως

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} \quad (124)$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2 = (\hat{X}_1 + i\hat{X}_2) e^{i\varphi/2} \quad (125)$$

Έτσι, ανει με τις αβεβαιότητες των \hat{X}_1 και \hat{X}_2 , τώρα
 θα υπολογίσουμε τις αβεβαιότητες των ισοδύναμων τε-
 λεστών \hat{Y}_1 και \hat{Y}_2 , οι οποίες έχουν ουσιαστικά προκύ-
 ψει από μία σφρογή κατά $\varphi/2$ στο επίπεδο των \hat{X}_1 και
 \hat{X}_2 όπως υποδηλώνει η εξ. (124) και όπως γίνετα και
 στο παρακάτω σχήμα.



Σημειώνουμε εδώ ότι την ίδια μέθοδο θα ακολουθούσαμε στην περίπτωση της squeezed state του κενού με $\phi \neq 0, \pi$ που αναφέραμε και παραπάνω, δηλαδή αντί για τις αβεβαιότητες των \hat{X}_1 και \hat{X}_2 θα υπολογίζαμε εκείνες των \hat{Y}_1 και \hat{Y}_2 . Ύστερα από αυτή τη σημείωση και επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, μπορούμε σύμφωνα με τα παραπάνω να γράψουμε για τις αβεβαιότητες των \hat{Y}_1 και \hat{Y}_2 ότι

$$\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (126)$$

$$\langle (\Delta \hat{Y}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} \quad (127)$$

και επομένως για τις squeezed coherent states έχουμε

$$\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{Y}_2)^2 \rangle = \frac{1}{16} \quad (128)$$

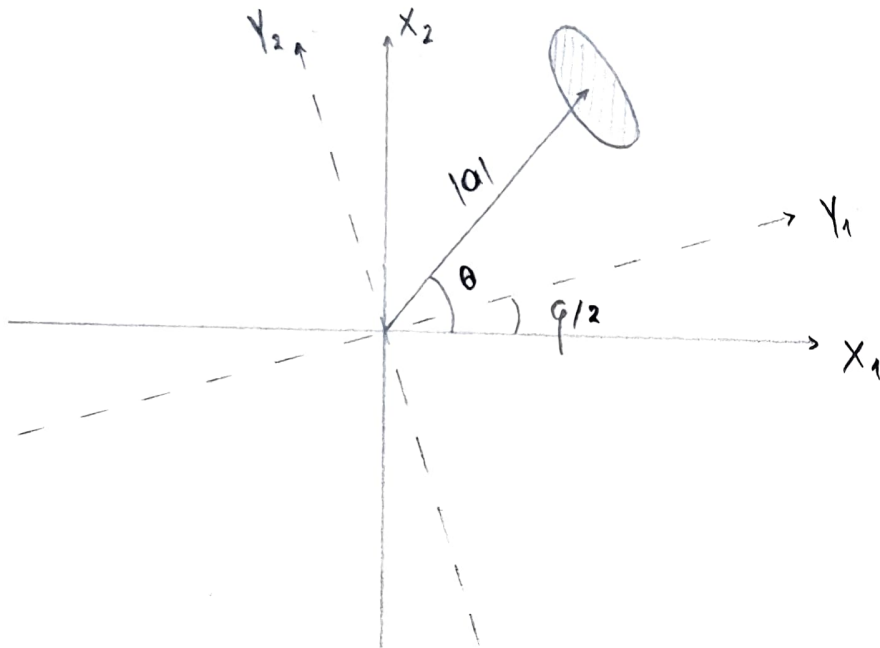
Με άλλα λόγια οι squeezed coherent states έχουν το ελάχιστο δυνατό γινόμενο $\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{Y}_2)^2 \rangle$ (χαρακτηριστικό των coherent states) αλλά για $\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \rangle \neq \langle (\Delta \hat{Y}_2)^2 \rangle$ (χαρακτηριστικό των squeezed states). Παρατηρείσει ότι για $r \rightarrow 0$ παίρνουμε πάλι τις εξισώσεις των coherent states ενώ για $a \rightarrow 0$ παίρνουμε τις αντιστοιχίες των squeezed states.

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να αναπαραστήσουμε γραφικά τις απροσδιρισίες των \hat{Y}_1 και \hat{Y}_2 όπως κάναμε για τις αντιστοιχίες των \hat{X}_1 και \hat{X}_2 στα προηγούμενα παραδείγματα. Ουσιαστικά, το επίπεδο που χρησιμοποιούσαμε στα προηγούμενα σχήματα για να αναπαραστήσουμε τα ΔX_1 και ΔX_2 ήταν το μιγαδικό επίπεδο $X_1 + iX_2$, όπου στον οριζόντιο άξονα ήταν το X_1

και στον κάθετο το X_2 . Αντικαθιστώντας τώρα στην
 εξ. (125) τα \hat{X}_1 και \hat{X}_2 από τις εξ. (82) μπορεί
 κανείς να βρει ότι

$$\langle \hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2 \rangle = a e^{-i\varphi/2} \quad (129)$$

Συλλέγοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο πα-
 ρακάτω σχήμα, όπου παριστάνουμε τις απροσδιοριστίες
 ΔY_1 και ΔY_2 στο μιγαδικό επίπεδο.



Στο παραπάνω σχήμα συναντάμε συνδυασμό χαρακτηρι-
 στικών στοιχείων των coherent states αλλά και των
 squeezed states. Βλέπουμε κατ' αρχήν ότι είναι σαν να

έχουμε σπρίψει το μιγαδικό μας επίπεδο κατά μια γωνία $\varphi/2$, όπως υποδεικνύεται και από τις εξ. (125) και (129). Βλέπουμε επίσης ότι έχουμε squeezing για τον \hat{Y}_1 όπως αναρίναρε από την εξ. (126), το οποίο είναι χαρακτηριστικό των squeezed states, ενώ το εμβαδό της έλλειψης θα είναι σταθερό για κάθε πιθανή κατάσταση $|a, \zeta\rangle$ όπως φαίνεται από την εξ. (128), και είναι χαρακτηριστικό των coherent states. Τέλος, το κέντρο της έλλειψης είναι μετατοπισμένο κατά a κάτι το οποίο φαίνεται από την εξ. (129) και προφανώς είναι χαρακτηριστικό των coherent states. Σημειώνουμε επίσης ότι το πόσο συμπιεσμένη (squeezed) θα είναι μία κατάσταση εξαρτάται από το r . [εξ. (126), (127)] και για αυτό η παράμετρος αυτή ονομάζεται παράμετρος συμπίεσης (squeezed parameter). Επίσης, η γωνία θ προέρχεται από το γεγονός ότι $a = |a|e^{i\theta}$.

Τελειώνοντας την ανάλυσή μας στις squeezed states θα θέλαμε να προσθέσουμε την εξής παρατήρηση. Προσέξτε ότι στην εξ. (122) ορίσαμε τις squeezed coherent states $|a, \zeta\rangle = \hat{D}(a) \hat{S}(\zeta) |0\rangle$. Παρ' όλα αυτά σε κάποια βιβλία οι καταστάσεις αυτές ορίζονται ως

$|a, \zeta\rangle = \hat{S}(\zeta) \hat{D}(a) |0\rangle$. Οι δύο αυτοί ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι μιας και οι τελεστές $\hat{S}(\zeta)$ και $\hat{D}(a)$ δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Όπως, χρησιμοποιώντας

τις εξ. (115) και (116) μπορούμε να βρούμε μια σχέση που να συνδέει τους δύο αυτούς ορισμούς. Αυτή η σχέση θα είναι

$$\hat{S}(\zeta) \hat{D}(a) = \underbrace{\hat{S}(\zeta) \hat{D}(a) \hat{S}^+(\zeta)}_{=\hat{D}(b)} \hat{S}(\zeta) = \hat{D}(b) \hat{S}(\zeta) \quad (130)$$

όπου $b = a \cosh r + a^* e^{i\phi} \sinh r$. Με άλλα λόγια, η εξ. (130)

μας λέει ότι αν θέλουμε να γράψουμε τη squeezed coherent state $\hat{S}(\zeta) \hat{D}(a) |0\rangle$ με κάποιο τρόπο ώστε

ο τελεστής μετατόπισης να εφαρμόζεται πρώτος, τότε για να πάρουμε την ίδια κατάσταση με την αρχική ο τελεστής μετατόπισης δε θα πρέπει να μετατοπίσει την κατάσταση κενού κατά a , αλλά θα πρέπει να την μετατοπίσει κατά $\theta = a \cosh r + a^* e^{i\phi} \sinh r$. Τονίζουμε εδώ ότι οι δύο ορισμοί για τις squeezed coherent states, $\hat{S}(\zeta) \hat{D}(a) |0\rangle$ και $\hat{D}(a) \hat{S}(\zeta) |0\rangle$, δίνουν ίδια αποτελέσματα για το squeezing [δηλαδή και με τους δύο ορισμούς καταλήγουμε στις εξ. (126) και (127)] αλλά βρίσκουμε διαφορετικές τιμές για τα $\langle \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}^2 \rangle = \langle \hat{a}^{+2} \rangle$, $\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle$ που δίνονται στην εξ. (123) (επιβεβαιώστε το).

- Χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών

Μέχρι τώρα είδαμε με ποιον τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το H/M πεδίο στην περίπτωση της κοιλότητας