γράφουμε την εξίσωση ιδιοτιμών για την ενέργεια ως

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad (35)$$

Με αφορμή την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$[\hat{H}, \hat{a}] = \hbar\omega\left[\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}, \hat{a}\right] = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\cancelto{0}{[\hat{a}, \hat{a}]} + \cancelto{-1}{[\hat{a}^{+}, \hat{a}]}\,\hat{a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^{+}] = \hbar\omega\left[\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}, \hat{a}^{+}\right] = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\cancelto{1}{[\hat{a}, \hat{a}^{+}]} + \cancelto{0}{[\hat{a}^{+}, \hat{a}^{+}]}\,\hat{a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\hat{H}, \hat{a}^{+}] = +\hbar\omega\hat{a}^{+}$$

Εφαρμόζοντας από τα δεξιά την κατάσταση $|n\rangle$ στις παραπάνω εξισώσεις, η οποία έχει να κάνει με τον αντίστοιχο τρόπο ταλάντωσης του πεδίου, παίρνουμε ότι

$$[\hat{H}, \hat{a}]|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle \Rightarrow (\hat{H}\hat{a} - \hat{a}\hat{H})|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{H}\hat{a}|n\rangle - E_n\hat{a}|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle \Rightarrow \hat{H}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^{+}]|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^{+}|n\rangle \Rightarrow (\hat{H}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{H})|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^{+}|n\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - E_n\hat{a}^{+}|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^{+}|n\rangle \Rightarrow \hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$(36)$$

Με άλλα λόγια, οι εξ. (36) υποδηλώνουν ότι οι τελεστές $\hat{a}$ και $\hat{a}^+$ μας επιτρέπουν να μεταβαίνουμε από τη μία ιδιοενέργεια στην άλλη. Συγκεκριμένα ο $\hat{a}$ καταβιβάζει τη συνολική ενέργεια ενώ ο $\hat{a}^+$ την ανεβάζει και για αυτό έχει επικρατήσει να λέγονται τελεστές καταβίβασης και αναβίβασης, αντίστοιχα. Προφανώς, επαναλαμβάνοντας τα βήματα της παραπάνω διαδικασίας, μπορούμε να μεταβούμε στη μεθεπόμενη ανώτερη ή κατώτερη κατάσταση αντίστοιχα κ.ο.κ. Το σύστημά μας, όμως, είναι λογικό να έχει μία κατώτατη ενεργειακή στάθμη για την οποία θα έχουμε και την ελάχιστη ενέργεια. Συμβολίζοντας με $|0\rangle$ τη θεμελιώδη αυτή ενεργειακή στάθμη, εξ' ορισμού θα ισχύει ότι

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad ,$$

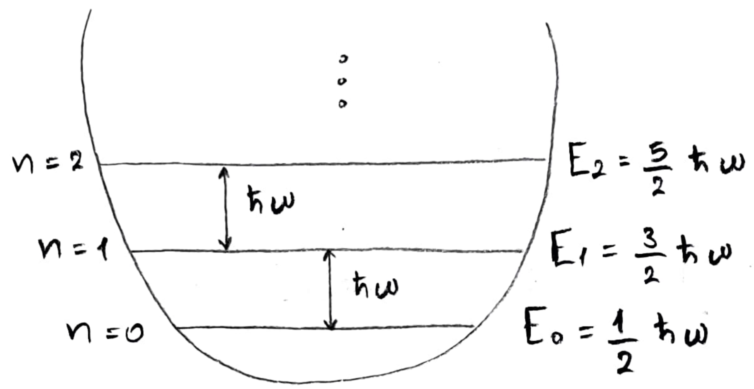
μιας και για το σύστημά μας δεν υπάρχει χαμηλότερη στάθμη. Από την εξ. (35) βρίσκουμε ότι

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle = E_0|0\rangle \quad , \qquad (37)$$

όπου $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ είναι η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης (zero-point energy). Από τη στιγμή που για τον number operator ισχύει ότι $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ ($\hat{n} = \hat{a}^{+}\hat{a}$ και n η ιδιοτιμή του), αυτό σημαίνει ότι η $|n\rangle$ και η $|n+1\rangle$ καταστάσεις θα απέχουν μεταξύ τους κατά μία ποσότητα $\hbar\omega$, μιας και

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle \\ \hat{H}|n+1\rangle &= \hbar\omega\left(n+1+\frac{1}{2}\right)|n+1\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$$

Μιας και ο αριθμός n είναι τυχαίος, αυτό σημαίνει ότι οι ενεργειακές καταστάσεις του συστήματός μας θα ισαπέχουν μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως είδαμε παραπάνω οι τελεστές $\hat{a}$ και $\hat{a}^{+}$ μας επιτρέπουν να μεταβαίνουμε από τη μία τιμή της ενέργειας στην άλλη. Αυτό σημαίνει ότι για τους τελεστές αυτούς μπορούμε να γράψουμε τις εξής εξισώσεις

$$\hat{a}\,|n\rangle = c_{n-1}|n-1\rangle \qquad (38a)$$

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = c_{n+1}|n+1\rangle \qquad (38b)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι εξισώσεις ιδιοτιμών μιας και από το ένα μέρος έχουμε την κατάσταση $|n\rangle$ ενώ στο άλλο έχουμε την $|n-1\rangle$ (ή την $|n+1\rangle$) (επιπλέον έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι $\hat{a}$ και $\hat{a}^{+}$ δεν αντιστοιχούν σε κάποιο πραγματικό φυσικό μέγεθος και έτσι είναι αναμενομενόμενο να μην υπάρχει εξίσωση ιδιοτιμών για τους τελεστές αυτούς.)

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο $\hat{a}|n\rangle$ με τον εαυτό του, βρίσκουμε με τη βοήθεια της εξ. (38a) ότι

$$(\langle n|\hat{a}^{+})\,a|n\rangle = (\langle n-1|\,c_{n-1}^{*})\,c_{n-1}|n-1\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle n|\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle = \langle n-1|\,c_{n-1}^{*}c_{n-1}|n-1\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle n\cancelto{n}{|\hat{n}|}n\rangle = |c_{n-1}|^{2}\,\langle n-\cancelto{1}{1|n}-1\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = |c_{n-1}|^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{n-1} = \sqrt{n}$$

όπου πήραμε τη θετική λύση στην παραπάνω εξίσωση.

Από τα παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad (39)$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα για τον $\hat{a}^+$ έχουμε ότι

$$(\langle n|\hat{a})\,\hat{a}^+|n\rangle = (\langle n+1|\,c^*_{n+1})\,c_{n+1}\,|n+1\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle n|\underbrace{\hat{a}\,\hat{a}^+}_{=\hat{a}^+\hat{a}+1}|n\rangle = |c_{n+1}|^2\,\overbrace{\langle n+1|n+1\rangle}^{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 = |c_{n+1}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{n+1} = \sqrt{n+1}\,,$$

όπου και πάλι διαλέξαμε τη θετική λύση. Τελικά, για τον τελεστή αναβίβασης $\hat{a}^+$ έχουμε

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad (40)$$

Ουσιαστικά, με τη βοήθεια της εξ. (40) μπορούμε να παράξουμε από τη θεμελιώδη κατάσταση $|0\rangle$ όλες τις υπόλοιπες με συνεχόμενη εφαρμογή του τελεστή $\hat{a}^+$:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle \qquad (41)$$

Προφανώς, η ενέργεια της $|n\rangle$ κατάστασης θα δίνεται από τη σχέση

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (42)$$

όπου n η ιδιοτιμή του number operator. Από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω φαίνεται αρκετά λογικό να αντιστοιχίσουμε στην ιδιοτιμή n του number operator τον αριθμό των φωτονίων της κατάστασης (μεγαλύτερο n ⇒ περισσότερα φωτόνια ⇒ μεγαλύτερη ενέργεια).

Οι καταστάσεις $|n\rangle$ ονομάζονται καταστάσεις Fock και αντίστοιχα ο χώρος στον οποίο ανήκουν ονομάζεται χώρος Fock. Συγκεκριμένα, ο χώρος Fock περιλαμβάνει το σύνολο των καταστάσεων

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \qquad (43)$$

Προφανώς, στο χώρο αυτό η ενέργεια είναι κβαντισμένη μιας και για μία τυχαία κατάσταση $|n\rangle$, αυτή δίνεται από την εξ. (42).

Στη συνέχεια θυμηθείτε ότι έχουμε θεωρήσει από την αρχή της ανάλυσής μας ότι το πεδίο μας είναι μονοχρωματικό, δηλαδή χαρακτηρίζεται από μία μόνο συχνότητα και μία μόνο πόλωση [εξ. (33)]. Τώρα, αν πάρουμε την αναμενόμενη τιμή της εξ. (33), $\langle n|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)|n\rangle$, φαίνεται πολύ εύκολα ότι μηδενίζεται, δηλαδή $\langle n|\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)|n\rangle = 0$. Παρ' όλα αυτά δε συμβαίνει το ίδιο και για το $\hat{\vec{E}}^2(\vec{r},t)$ μιας και (αποδείξτε το)

$$\langle n|\hat{\vec{E}}^2|n\rangle = 2\,\mathcal{E}_0^2\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad (44)$$

όπου $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}$. Η εξ. (44) υποδηλώνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζει διακυμάνσεις (fluctuations) γύρω από μια μηδενική μέση τιμή ακόμη και για τη θεμελιώδη κατάσταση $|0\rangle$.(*) Αυτές οι διακυμάνσεις του κενού στην ουσία, μιας και για τη $|0\rangle$ έχουμε $n=0$ φωτόνια στο χώρο, είναι υπεύθυνες για μια σειρά φαινομένων στην Κβαντική Οπτική. Τα πιο αξιοσημείωτα από αυτά είναι ότι ουσιαστικά αυτές οι διακυμάνσεις του κενού (vacuum flactuations) προκαλούν την αυθόρμητη εκπομπή των ατόμων στον ελεύθερο χώρο, καθώς επίσης οι διακυμάνσεις αυτές είναι υπεύθυνες για τη μετατόπιση Lamb η οποία παρατηρείται στα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου του υδρογόνου.

(*) μιας και $(\Delta\hat{\vec{E}}(\vec{r},t))^2 = \langle\hat{\vec{E}}^2(\vec{r},t)\rangle - \cancel{\langle\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)\rangle}^{\,0\;2} = \langle\hat{\vec{E}}^2(\vec{r},t)\rangle$ (ο τύπος είναι από την αρχή της αβεβαιότητας).

Έως τώρα δεν έχουμε πει τίποτα για το πώς εξαρτώνται οι τελεστές $\hat{a}$ και $\hat{a}^+$ από το χρόνο. Για να βρούμε τη χρονική τους εξέλιξη ξεκινάμε από την εξίσωση Heisenberg (στην εικόνα Heisenberg), η οποία για έναν τυχαίο τελεστή $\hat{O}$ γράφεται

$$\frac{d}{dt}\hat{O} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}] \quad , \qquad (45)$$

όπου $\hat{H}$ η Χαμιλτονιανή του συστήματός μας. Έτσι λοιπόν, για τον τελεστή $\hat{a}$ έχουμε ότι

$$(45) \Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{a}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{a}(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{a}(t) = \frac{i}{\cancel{\hbar}}\left[\cancel{\hbar}\omega\left(\hat{a}^+(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}\right), \hat{a}(t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{a}(t) = i\omega\left[\hat{a}^+(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}, \hat{a}(t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{a}(t) = i\omega\left(\cancelto{0}{\left[\frac{1}{2}, \hat{a}(t)\right]} + \hat{a}^+(t)\cancelto{0}{[\hat{a}(t), \hat{a}(t)]} + \cancelto{-1}{[\hat{a}^+(t), \hat{a}(t)]}\hat{a}(t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{a}(t) = -i\omega\,\hat{a}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{a}(t) = \hat{a}(0)\,e^{-i\omega t} \qquad (46)$$

Αντίστοιχα, για τον τελεστή δημιουργίας έχουμε

$\hat{a}^{+}(t) = \hat{a}^{+}(0)\, e^{i\omega t}$ (47).

Κλείνοντας, αξίζει να πούμε πως ότι κάναμε έως τώρα στην ενότητα αυτή αφορούσε το μονοχρωματικό πεδίο. Εάν όμως το πεδίο μας δεν είναι μονοχρωματικό τότε αυτό θα περιγράφεται από τις καταστάσεις $|n_{\vec{k},s}\rangle$, όπου αντίστοιχος number operator θα είναι ο $\hat{n}_{\vec{k},s} = \hat{a}^{+}_{\vec{k},s}\hat{a}_{\vec{k},s}$ με ιδιοτιμή $n_{\vec{k},s}$ (δηλαδή ο αριθμός των φωτονίων που έχουν $\vec{k}$ και s), όπως αναφέραμε και παραπάνω. Έτσι λοιπόν, η γενική Χαμιλτονιανή της εξ. (27) έχει $n_{\vec{k}_1 s_1}$ φωτόνια στον πρώτο τρόπο ταλάντωσης (mode), $n_{\vec{k}_2 s_2}$ στο δεύτερο και $n_{\vec{k}_j s_j}$ στον j-τρόπο ταλάντωσης. Ορίζοντας για ευκολία $\hat{a}^{(+)}_{\vec{k}_j, s_j} \equiv \hat{a}^{(+)}_j$, $\hat{n}_{\vec{k}_j, s_j} \equiv n_j$, μπορούμε να γράψουμε τη Χαμιλτονιανή μας ως

$$(27) \Rightarrow \hat{H} = \sum_j \hbar\omega_j \left(\hat{n}_j + \frac{1}{2}\right) \qquad (48)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής αυτής, οι οποίες θα είναι οι αντίστοιχες number states για το πεδίο με τους πολλούς τρόπους ταλάντωσης (multimode field), γράφονται

$$|n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots\rangle \equiv |\{n_j\}\rangle \qquad (49)$$

και επομένως σε αντιστοιχία με την εξ. (35) θα είναι

$$\hat{H}|\{n_j\}\rangle = \sum_j \hbar\omega_j \left(n_j + \frac{1}{2}\right)|\{n_j\}\rangle = E|\{n_j\}\rangle \qquad (50)$$

Για τις καταστάσεις της εξ. (49) θα ισχύει επίσης ότι

$$\hat{a}_j|n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots\rangle = \sqrt{n_j}\,|n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, \ldots\rangle \qquad (51)$$

$$\hat{a}_j^+|n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots\rangle = \sqrt{n_j+1}\,|n_1, n_2, \ldots, n_{j+1}, \ldots\rangle \qquad (52)$$

όπου κάθε φορά οι τελεστές $\hat{a}_j$ και $\hat{a}_j^+$ επηρεάζουν μόνο τον j-mode. Τέλος, η κατάσταση του κενού στην περίπτωση αυτή (multimode vacuum) θα είναι

$$|\{0\}\rangle = |0_1, 0_2, \ldots, 0_j, \ldots\rangle \qquad (53)$$

και προφανώς θα ισχύει ότι $\hat{a}_j|\{0\}\rangle = 0$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω όλες οι number states για το multimode field θα παράγονται από τη σχέση

$$|\{n_j\}\rangle = \prod_j \frac{(\hat{a}_j^+)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}|\{0\}\rangle \qquad (54)$$

Σε όλη την παραπάνω ανάλυση που κάναμε για την κβάντωση του ηλεκτρικού, είτε αυτό ήταν μονοχρωματικό (single-mode field) είτε όχι (multimode field), το κοινό στοιχείο που πρέπει να σημειώσουμε είναι το εξής: το κενό έχει μη-μηδενική ενέργεια. Από τη στιγμή μάλιστα που ο εκάστοτε τρόπος ταλάντωσης του πεδίου (το εκάστοτε mode με άλλα λόγια) συνεισφέρει στην ενέργεια του κενού μία ποσότητα $\frac{1}{2}\hbar\omega$ [δείτε πάλι την εξ. (37)] και υπάρχουν άπειροι τρόποι ταλάντωσης, αυτό σημαίνει ότι για την ενέργεια του κενού θα ισχύει

$$E_{\text{κενού}} = \frac{1}{2}\hbar\sum_{\omega}\omega \longrightarrow \infty \quad \text{(zero-point energy)}$$

Τις περισσότερες φορές, τουλάχιστον για όλες τις περιπτώσεις που θα αντιμετωπίσουμε εδώ, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η διαφορά ενέργειας μεταξύ δύο καταστάσεων, οπότε μπορούμε να αδιαφορήσουμε για αυτό τον απειρισμό (αν και οι περισσότεροι απειρισμοί απαλείφονται με τη μέθοδο της επανακανονικοποίησης, ή αλλιώς renormalization, ο συγκεκριμένος απειρισμός απαιτεί διαφορετικές τεχνικές για να απαλειφθεί).

Αυτό που χρειάζεται να κρατήσουμε από εδώ είναι ότι η ενέργεια του κενού και οι διακυμάνσεις που αυτό παρουσιάζει [δείτε πάλι την εξ. (44)] ευθύνονται για κάποια πολύ ενδιαφέροντα φαινόμενα, όπως είναι η αυθόρμητη εκπομπή, η μετατόπιση Lamb καθώς και το φαινόμενο Casimir.

- <u>Coherent states</u>

Γνωρίζουμε ότι οι δύο πυλώνες της σύγχρονης Φυσικής, η Θεωρία της Σχετικότητας και η Κβαντομηχανική, αποτελούν κατά κάποιο τρόπο γενίκευση της ήδη προϋπάρχουσας θεωρίας. Έτσι λοιπόν, αν και η σωστή θεωρία, σύμφωνα με τα υπάρχοντα δεδομένα, η οποία εξηγεί την κίνηση των σωμάτων είναι η Γενική Σχετικότητα, στο όριο των μικρών ταχυτήτων θεωρούμε ότι η κίνηση των σωμάτων περιγράφεται από τη Νευτώνια Φυσική. Αντίστοιχα, στην Κβαντομηχανική, αν και γνωρίζουμε ότι οι φυσικές ποσότητες είναι κβαντισμένες, αν πάρουμε το όριο ότι έχουμε έναν άπειρο αριθμό κβάντων, τότε θα πρέπει να επανερχόμαστε στην κλασική Φυσική (κλασικό όριο).

Στην προηγούμενη ενότητα όπου αναπτύξαμε τις number states είδαμε ότι η μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, δηλαδή $\langle n|\vec{E}(\vec{r},t)|n\rangle=0$, ανεξαρτήτως του