Ασκήσεις στα Ειδικά Θέματα Κβαντομηχανικής

1) α) Έχουμε το σύνολο $M = \{1, 5, 7, 11\}$ εφοδιασμένο με την πράξη mod 24. Επομένως θα είναι

$(1\times 1) \bmod 24 = 1$ $\quad (1\times 5) \bmod 24 = 5$ $\quad (1\times 7) \bmod 24 = 7$ $\quad (1\times 11) \bmod 24 = 11$

$(5\times 5) \bmod 24 = 1$ $\quad (5\times 7) \bmod 24 = 11$ $\quad (5\times 11) \bmod 24 = 7$

$(7\times 7) \bmod 24 = 1$ $\quad (7\times 11) \bmod 24 = 5$

$(11\times 11) \bmod 24 = 1$

Το σύνολο αυτό εφοδιασμένο με την πράξη mod 24 είναι μία καλά ορισμένη ομάδα μιας και i) κάθε συνδυασμός των στοιχείων του M είναι ένα άλλο στοιχείο που ανήκει στο M,
ii) $\beta \circ \gamma = \beta\gamma - 24n = \delta$ και $n = \left[\dfrac{\beta\gamma}{24}\right]$ ο οποίος είναι ακέραιος

(το δεύτερο μέρος της ισότητας ουσιαστικά ορίζει την πράξη του modulo). Έτσι θα είναι

$$a \circ (\beta \circ \gamma) = a \circ \delta = a\delta - 24\left[\frac{a\delta}{24}\right] = a(\beta\gamma - 24n) - 24\left[\frac{a(\beta\gamma - 24n)}{24}\right]$$

$$\Rightarrow a \circ (\beta \circ \gamma) = a\beta\gamma - 24an - 24\left[\frac{a\beta\gamma}{24} - an\right] = a\beta\gamma - \cancel{24an} - 24\left[\frac{a\beta\gamma}{24}\right] + \cancel{24an}$$

$$\Rightarrow a \circ (\beta \circ \gamma) = a\beta\gamma - 24\left[\frac{a\beta\gamma}{24}\right] \quad (1)$$

Τώρα, ομοίως, έστω $a \circ \beta = a\beta - 24k = \varepsilon$, όπου $k = \left[\dfrac{a\beta}{24}\right]$

Θα έχουμε ότι

$$(a \circ \beta) \circ \gamma = \varepsilon \circ \gamma = \varepsilon\gamma - 24\left[\frac{\varepsilon\gamma}{24}\right] = a\beta\gamma - 24k\gamma - 24\left[\frac{a\beta\gamma}{24} - k\gamma\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a \circ \beta) \circ \gamma = a\beta\gamma - \cancel{24k\gamma} - 24\left[\frac{a\beta\gamma}{24}\right] + \cancel{24k\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a \circ \beta) \circ \gamma = a\beta\gamma - 24\left[\frac{a\beta\gamma}{24}\right] \quad (2)$$

(1) = (2) οπότε αποδεικνύεται η προσεταιριστική ιδιότητα.
iii) το ουδέτερο στοιχείο είναι το 1 και
iv) το αντίστροφο στοιχείο του εκάστοτε m_i είναι ο εαυτός του.

Ο πίνακας της ομάδας είναι:

$g_1 \backslash g_2$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο
$\Rightarrow$ Αβελιανή ομάδα.

β) Το σύνολό μας είναι το $M' = \{1,2,3,4\}$ και η πράξη είναι το mod5. Ό,τι ισχύει για το σύνολο M στο α) ισχύει και για το M' με τη διαφορά ότι τα αντίστροφα στοιχεία είναι $1^{-1}=1$, $2^{-1}=3$, $3^{-1}=2$, $4^{-1}=4$. Ο πίνακας της ομάδας είναι

$g_1 \backslash g_2$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Συμμετρικός $\Rightarrow$ Αβελιανή ομάδα.

2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Το μοναδιαίο στοιχείο του συνόλου είναι προφανώς το I.

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = B$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = I$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = D$$

Άρα $A \cdot B = I \Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = I$ καθώς και
$A \cdot A = B \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow B \cdot A^{-1} = A \Rightarrow B \cdot B = A$

$A \cdot D = C \Rightarrow \overset{I}{\cancel{BA}} D = BC \Rightarrow B \cdot C = D$

$A \cdot C = E \Rightarrow \overset{I}{\cancel{BA}} C = BE \Rightarrow B \cdot E = C$

$A \cdot E = D \Rightarrow \overset{I}{\cancel{BA}} E = B \cdot D \Rightarrow B \cdot D = E$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = D$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = E$$

$$C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$C \cdot A = D \Rightarrow \overset{I}{\cancel{CC}} A = CD \Rightarrow C \cdot D = A$

$C \cdot B = E \Rightarrow \overset{I}{\cancel{CC}} B = CE \Rightarrow C \cdot E = B$

$CA = D \overset{\times A}{\Rightarrow} C\overset{B}{\cancel{AA}} = DA \Rightarrow DA = CB \Rightarrow DA = E$

$CA = D \overset{\times B}{\Rightarrow} C\overset{I}{\cancel{AB}} = DB \Rightarrow DB = C$

$CA = D \overset{\times C}{\Rightarrow} C\overset{E}{\cancel{AC}} = DC \Rightarrow CE = DC \Rightarrow DC = B$

$CA = D \overset{\times D}{\Rightarrow} C\overset{C}{\cancel{AD}} = DD \Rightarrow CC = DD \Rightarrow DD = I$

$CA = D \overset{\times E}{\Rightarrow} C\overset{D}{\cancel{AE}} = DE \Rightarrow CD = DE \Rightarrow DE = A$

$CB = E \overset{\times A}{\Rightarrow} C\overset{I}{\cancel{BA}} = EA \Rightarrow EA = C$

$CB = E \overset{\times B}{\Rightarrow} C\overset{A}{\cancel{BB}} = EB \Rightarrow EB = CA \Rightarrow EB = D$

$CB = E \overset{\times C}{\Rightarrow} C\overset{D}{\cancel{BC}} = EC \Rightarrow EC = CD \Rightarrow EC = A$

$CB = E \overset{\times D}{\Rightarrow} C\overset{E}{\cancel{BD}} = ED \Rightarrow ED = CE \Rightarrow ED = B$

$CB = E \overset{\times E}{\Rightarrow} C\overset{C}{\cancel{BE}} = EE \Rightarrow EE = CC \Rightarrow EE = I$

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Μη-συμμετρικός ⇒ Μη-Αβελιανή ομάδα.

3) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$, $f_5(x) = 1-x$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$

Ισχύει ότι $f_1 \circ f_i = f_i(x)$ με $i = 1, \dots, 6$.

$$f_2 \circ f_2 = \frac{1}{1-f_2} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{\cancel{1}-x-\cancel{1}}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = f_3(x)$$

$$f_2 \circ f_3 = \frac{1}{1-f_3} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{x}} = x = f_1(x)$$

$$f_2 \circ f_4 = \frac{1}{1-f_4} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} = f_6(x)$$

$$f_2 \circ f_5 = \frac{1}{1-f_5} = \frac{1}{\cancel{1}-\cancel{1}+x} = \frac{1}{x} = f_4(x)$$

$$f_2 \circ f_6 = \frac{1}{1-f_6} = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{x-1}} = 1-x = f_5(x)$$

Ομοίως, θα έχουμε ότι

$f_3 \circ f_2 = f_1$	$f_4 \circ f_2 = f_5$	$f_5 \circ f_2 = f_6$	$f_6 \circ f_2 = f_4$
$f_3 \circ f_3 = f_2$	$f_4 \circ f_3 = f_6$	$f_5 \circ f_3 = f_4$	$f_6 \circ f_3 = f_5$
$f_3 \circ f_4 = f_5$	$f_4 \circ f_4 = f_1$	$f_5 \circ f_4 = f_3$	$f_6 \circ f_4 = f_2$
$f_3 \circ f_5 = f_6$	$f_4 \circ f_5 = f_2$	$f_5 \circ f_5 = f_1$	$f_6 \circ f_5 = f_3$
$f_3 \circ f_6 = f_4$	$f_4 \circ f_6 = f_3$	$f_5 \circ f_6 = f_2$	$f_6 \circ f_6 = f_1$

Επομένως, i) κάθε σύνθεση στοιχείων μεταξύ τους δίνει στοιχείο της ομάδας (κλειστότητα), ii) $\underbrace{f[g}_{k}(h(x))] = f[\underbrace{g(h}_{w}(x))] =$ $\Rightarrow k[h(x)] = f[w(x)]$ (προσεταιριστική ιδιότητα), iii) το ουδέτερο στοιχείο είναι το $f_1(x)$ μιας και $f_1[g(x)] = g[f_1(x)] = g(x)$ και iv) το κάθε στοιχείο έχει το αντίστροφό του.

Επομένως, ο πίνακας της ομάδας είναι

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Ίδιος πίνακας με την Άσκ. 2
$\Rightarrow$ οι δύο ομάδες είναι ισόμορφες

4) $S_3 = \{I, A, B, C, D, E\}$ με $I = (1)(2)(3)$, $A = (1\ 2\ 3)$, $B = (1\ 3\ 2)$, $C = (1)(2\ 3)$, $D = (3)(1\ 2)$, $E = (2)(1\ 3)$.

Κάνε όλες τις πράξεις με την κλασική μορφή, δηλαδή για

$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

~~$(1\ 2\ 3)(1)(2\ 3) = (2\ 1)(3)$~~

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 1)(3)$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$A \cdot A = B$	$BA = I$	$CA = E$	$DA = C$	$EA = D$
$AB = I$	$BB = A$	$CB = D$	$DB = E$	$EB = C$
$AC = D$	$BC = E$	$CC = I$	$DC = A$	$EC = B$
$AD = E$	$BD = C$	$CD = B$	$DD = I$	$ED = A$
$AE = C$	$BE = D$	$CE = A$	$DE = B$	$EE = I$

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

$I = (1)(2)(3) \rightarrow$ 1ης τάξης

$\left.\begin{array}{l} A = (1\ 2\ 3) \\ B = (1\ 3\ 2) \end{array}\right\} \rightarrow$ 3ης -״-

$\left.\begin{array}{l} C = (1)(2\ 3) \\ D = (3)(1\ 2) \\ E = (2)(1\ 3) \end{array}\right\} \rightarrow$ 2ης -״-

5) $S_3 = \{I, A, B, C, D, E\}$, όπου $I = (1)(2)(3)$, $A = (1\ 2\ 3)$, $B = (1\ 3\ 2)$, $C = (1)(2\ 3)$, $D = (3)(1\ 2)$, $E = (2)(1\ 3)$. Τα διανύσματα βάσης είναι $u_1 = (L\ M\ N)$, $u_2 = (M\ N\ L)$, $u_3 = (N\ L\ M)$, $u_4 = (L\ N\ M)$, $u_5 = (M\ L\ N)$, $u_6 = (N\ M\ L)$.

Το I είναι το μοναδιαίο στοιχείο και αφήνει όλα τα u_i $(i = 1, \dots, 6)$ ανεπηρέαστα. Για τις υπόλοιπες μεταθέσεις έχουμε ότι

$u_1' = A \cdot u_1 = (1\ 2\ 3)(L\ M\ N) = (M\ N\ L) = u_2$
$u_2' = A \cdot u_2 = (1\ 2\ 3)(M\ N\ L) = (N\ L\ M) = u_3$
$u_3' = A \cdot u_3 = (1\ 2\ 3)(N\ L\ M) = (L\ M\ N) = u_1$
$u_4' = A \cdot u_4 = (1\ 2\ 3)(L\ N\ M) = (N\ M\ L) = u_6$
$u_5' = A \cdot u_5 = (1\ 2\ 3)(M\ L\ N) = (L\ N\ M) = u_4$
$u_6' = A \cdot u_6 = (1\ 2\ 3)(N\ M\ L) = (M\ L\ N) = u_5$

$u_1' = B u_1 = (1\ 3\ 2)(L\ M\ N) = (N\ L\ M) = u_3$
$u_2' = B u_2 = (1\ 3\ 2)(M\ N\ L) = (L\ M\ N) = u_1$
$u_3' = B u_3 = (1\ 3\ 2)(N\ L\ M) = (M\ N\ L) = u_2$
$u_4' = B u_4 = (1\ 3\ 2)(L\ N\ M) = (M\ L\ N) = u_5$
$u_5' = B u_5 = (1\ 3\ 2)(M\ L\ N) = (N\ M\ L) = u_6$
$u_6' = B u_6 = (1\ 3\ 2)(N\ M\ L) = (L\ N\ M) = u_4$

$u_1' = C u_1 = (1)(2\ 3)(L\ M\ N) = (L\ N\ M) = u_4$
$u_2' = C u_2 = (1)(2\ 3)(M\ N\ L) = (M\ L\ N) = u_5$
$u_3' = C u_3 = (1)(2\ 3)(N\ L\ M) = (N\ M\ L) = u_6$
$u_4' = C u_4 = (1)(2\ 3)(L\ N\ M) = (L\ M\ N) = u_1$
$u_5' = C u_5 = (1)(2\ 3)(M\ L\ N) = (M\ N\ L) = u_2$
$u_6' = C u_6 = (1)(2\ 3)(N\ M\ L) = (N\ L\ M) = u_3$

$u_1' = D u_1 = (3)(1\ 2)(L\ M\ N) = (M\ L\ N) = u_5$
$u_2' = D u_2 = (3)(1\ 2)(M\ N\ L) = (N\ M\ L) = u_6$
$u_3' = D u_3 = (3)(1\ 2)(N\ L\ M) = (L\ N\ M) = u_4$

$$u_4' = D u_4 = (3)(1\ 2)(L\ N\ M) = (N\ L\ M) = u_3$$
$$u_5' = D u_5 = (3)(1\ 2)(M\ L\ N) = (L\ M\ N) = u_1$$
$$u_6' = D u_6 = (3)(1\ 2)(N\ M\ L) = (M\ N\ L) = u_2$$

$\vdots$

$$u_1' = E u_1 = (2)(1\ 3)(L\ M\ N) = (N\ M\ L) = u_6$$
$$u_2' = E u_2 = (2)(1\ 3)(M\ N\ L) = (L\ N\ M) = u_4$$
$$u_3' = E u_3 = (2)(1\ 3)(N\ L\ M) = (M\ L\ N) = u_5$$
$$u_4' = E u_4 = (2)(1\ 3)(L\ N\ M) = (M\ N\ L) = u_2$$
$$u_5' = E u_5 = (2)(1\ 3)(M\ L\ N) = (N\ L\ M) = u_3$$
$$u_6' = E u_6 = (2)(1\ 3)(N\ M\ L) = (L\ M\ N) = u_1$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα στοιχεία της 6-διάστατης αναπαράστασης $F = \{F(X)\}$ θα είναι

$$F(A) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad F(B) = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix},$$

$$F(C) = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad F(D) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$F(E) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad F(I) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, πραγματοποιώντας όλες τις πράξεις $F(X)\cdot F(Y)$ $\forall X, Y \in \{I, A, B, C, D, E\}$, παίρνουμε το χαρακτηριστικό πίνακα της ομάδας ο οποίος είναι

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

6) $$e^A \cdot e^B = \sum_{n=0} \frac{A^n}{n!} \cdot \sum_{m=0} \frac{B^m}{m!} = \left(1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots\right)\left(1 + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots\right) =$$

$$= 1 + A + B + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + A\cdot B + \dots = 1 + A + B + A\cdot B + \frac{1}{2}(A+B)^2 -$$

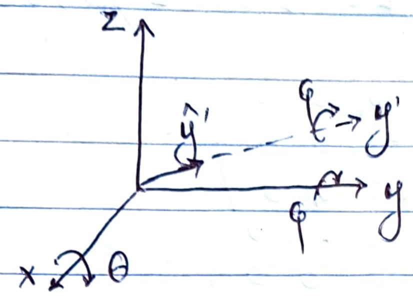
$$-\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}B\cdot A = 1 + A + B + \frac{1}{2}(AB - BA) + \frac{1}{2}(A+B^2) + \dots =$$

$$= 1 + A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}(A+B)^2 + \dots =$$

$$= \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots\right)$$

7) Στο μάθημα δείξαμε ότι αν ο πίνακας $S(\theta)$ περιγράφει μία στροφή γύρω από τον άξονα z και ο $R_x(\varphi)$ μία στροφή γύρω από τον άξονα, τότε ισχύει ότι $[X_3, X_1] = iX_2$ όπου X_1, X_2, X_3 οι γεννήτορες των στοιχειωδών στροφών γύρω από τους άξονες x, y, z αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, θέλουμε να αποδείξουμε τη σχέση $[X_1, X_2] = iX_3$. Εργαζόμενοι σε πλήρη αντιστοιχία όπως και στο μάθημα, θεωρούμε ότι ο πίνακας $S(\theta)$ περιγράφει στροφή κατά θ γύρω από τον άξονα x, ενώ οι $R_y(\varphi)$ και $R_{y'}(\varphi)$ περιγρά-φουν στροφή κατά φ γύρω από τους άξονες y και y' όπως στο σχήμα



$S(\theta) = e^{i\theta X_1} \Rightarrow S^{-1}(\theta) = e^{-i\theta X_1}$

$y' = S(\theta)\, y$ → έχει συνιστώσες $(0, \cos\theta, \sin\theta)$ μιας και ισχύει $\hat{y}'\cdot\vec{X} = X_2\cos\theta + X_3\sin\theta$

Η σχέση συζυγίας θα γράφεται

$$R_{y'}(\varphi) = S^{-1}(\theta)\, R_y(\varphi)\, S(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{i(X_2\cos\theta + X_3\sin\theta)\varphi} = e^{-i\theta X_1}\, e^{i\varphi X_2}\, e^{i\theta X_1} \xrightarrow[\text{εκθετικών}]{\text{ανάπτυξη}}$$

$$\Rightarrow 1 + i(X_2\cos\theta + X_3\sin\theta)\varphi = e^{-i\theta X_1}(1 + i\varphi X_2)\, e^{+i\theta X_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{1} + i(X_2\cos\theta + X_3\sin\theta)\varphi = \cancel{1} + i(e^{-i\theta X_1} X_2\, e^{i\theta X_1})\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_2\cos\theta + X_3\sin\theta = e^{-i\theta X_1} X_2\, e^{+i\theta X_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}(X_2\cos\theta + X_3\sin\theta)\Big|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}\left(e^{-i\theta X_1} X_2\, e^{i\theta X_1}\right)\Big|_{\theta=0} \Rightarrow$$

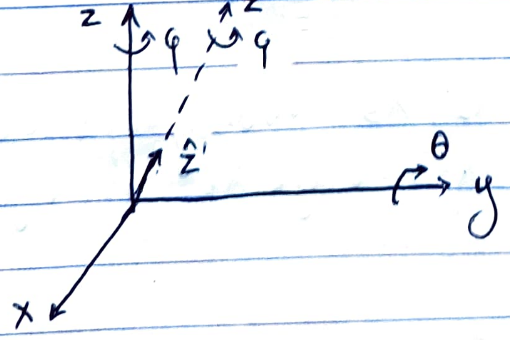
$$\Rightarrow (-X_2\sin\theta + X_3\cos\theta)\big|_{\theta=0} = (-iX_1 e^{-i\theta X_1} X_2 e^{i\theta X_1} + e^{-i\theta X_1} X_2 \cdot iX_1 e^{i\theta X_1})\big|_{\theta=0}$$

$$\Rightarrow X_3 = -iX_1 \cdot X_2 + iX_2 \cdot X_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow iX_3 = X_1 \cdot X_2 - X_2 \cdot X_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow iX_3 = [X_1, X_2]$$

Ομοίως, για τη σχέση $[X_2, X_3] = iX_1$ θα είναι



Τώρα, η σχέση συζυγίας θα είναι $R_{z'}(\varphi) = S^{-1}(\theta)\, R_z(\varphi)\, S(\theta)$ όπου $S(\theta) = e^{i\theta X_2} \Rightarrow S^{-1}(\theta) = e^{-i\theta X_2}$ και $z' = S(\theta)\cdot z$ με συνιστώσες $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ εφόσον ισχύει ότι $\hat{z}'\cdot\vec{X} = \sin\theta\cdot X_1 + \cos\theta\cdot X_3$

8) Γεννήτορες : $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

και η εξίσωση που πρέπει να αποδείξουμε είναι η $[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k$, με $i,j,k = 1,2,3$. Έχουμε ότι

$$X_1 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 \cdot X_2 - X_2 \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iX_3 \Rightarrow [X_1, X_2] = iX_3$$

$$X_2 \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 \cdot X_3 - X_3 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = iX_1 \Rightarrow [X_2, X_3] = iX_1$$

$$X_1 \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 \cdot X_3 - X_3 \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = iX_2 \Rightarrow [X_1, X_3] = iX_2$$

9) Για τους γεννήτορες X_1, X_2, X_3 γνωρίζουμε ότι ισχύει η μεταθετική σχέση $[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k$ με $i,j,k = 1,2,3$. Η ταυτότητα Jacobi θα γράφεται

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]$$

και αντικαθιστώντας $X \to X_1$, $Y \to X_2$, $Z \to X_3$, παίρνουμε

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] =$$
$$= [iX_3, X_3] + [iX_1, X_1] + [-iX_2, X_2] = 0$$

που είναι και το ζητούμενο.