

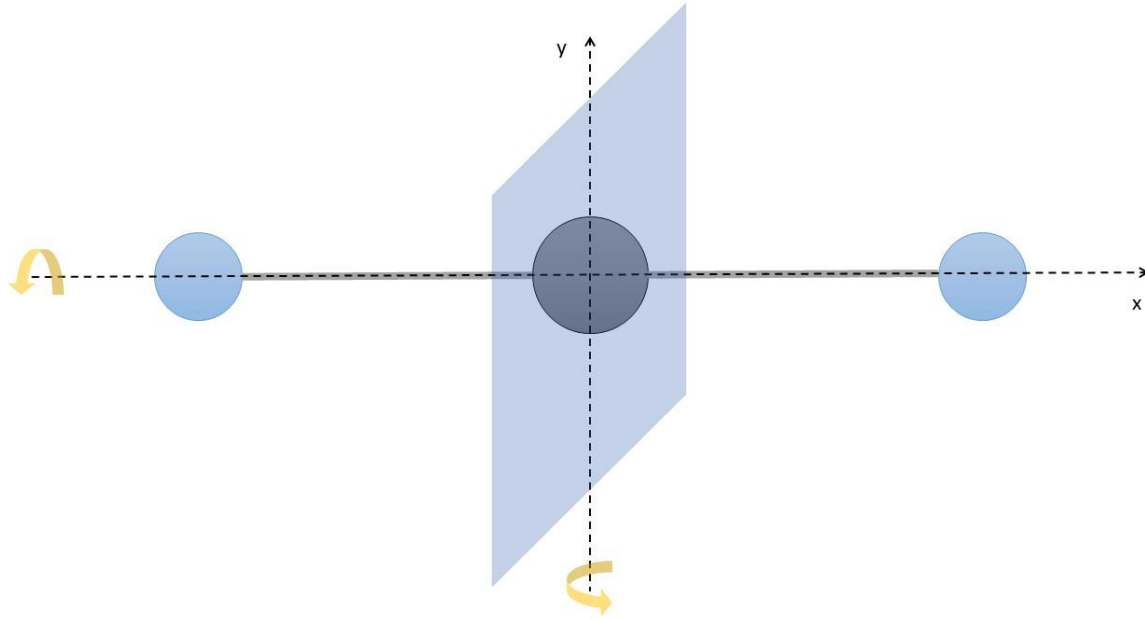
Ενότητα 1

1.1 Η έννοια της ομάδας

Στη φυσική υπάρχουν πολλά προβλήματα τα οποία παρουσιάζουν κάποιου είδους συμμετρία. Λέγοντας ότι ένα σύστημα έχει συμμετρία εννοούμε ότι μία ιδιότητα ή ένα στοιχείο του συστήματός μας διατηρείται ή παραμένει αναλλοίωτο υπό συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων σε ένα πολύ ευρύ φάσμα της φυσικής. Για παράδειγμα έχουμε σφαιρική συμμετρία στο άτομο του υδρογόνου, ενώ έχουμε κυλινδρική συμμετρία για ευθύγραμμες κατανομές φορτίου ή ρεύματος απείρου μήκους. Επίσης πιο σύνθετες συμμετρίες εμφανίζονται στη δομή των στερεών, όπως π.χ. η κρυσταλλική δομή, αλλά έχουμε συμμετρίες επίσης και σε θεωρητικά κατασκευάσματα όπως είναι για παράδειγμα η ζώνη Brillouin. Επιπλέον, πολύ κοινές συμμετρίες που εμφανίζονται σε πολλά φυσικά συστήματα είναι η περιστροφή (rotation), ο κατοπτρισμός (reflection) καθώς και η αντιστροφή (inversion). Πάρτε για παράδειγμα το μόριο του CO_2 στο Σχήμα 1.1. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1, αν περιστρέψουμε το μόριο γύρω από τον άξονα x τότε δε θα αλλάξει κάτι στο σύστημά μας, δηλαδή θα είναι ισοδύναμο με αυτό που είχαμε αρχικά (rotational symmetry). Επίσης, το ίδιο συμβαίνει αν περιστρέψουμε το μόριό μας κατά γωνία $n\pi$, όπου $n = 1, 2, \dots$, γύρω από τον άξονα y , ο οποίος διέρχεται από το άτομο του άνθρακα, δηλαδή από το κέντρο του μορίου μας. Επιπλέον, αν αντιστρέψουμε τα μόρια του οξυγόνου θα δε θα παρατηρήσουμε κάποια αλλαγή στο μόριό μας (inversion symmetry). Τέλος, έχουμε κατοπτρική συμμετρία (reflection symmetry) για επίπεδο το οποίο διέρχεται από το κέντρο του μορίου, είναι δηλαδή στο επίπεδο $x = 0$.

Μελετώντας τις συμμετρίες ενός φυσικού συστήματος μπορούμε σε αρκετές περιπτώσεις να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για το σύστημα αυτό. Έτσι λοιπόν κρίνεται αναγκαίο να μελετήσουμε τις ιδιότητες των συμμετριών που εμφανίζονται σε ένα φυσικό σύστημα. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε εκμεταλλευόμενοι τη θεωρία ομάδων (group theory) από τα μαθηματικά.

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω οι συμμετρίες είναι αποτέλεσμα κάποιων μετασχηματισμών που πραγματοποιούμε σε ένα φυσικό σύστημα αφήνοντας το σύστημα αυτό αναλλοίωτο. Οι μετασχηματισμοί αυτοί μπορούν να διαχωριστούν σε συνεχείς ή σε διακριτούς μετασχηματισμούς και έτσι αντίστοιχα προκύπτουν και δύο διαφορετικοί τύποι συμμετριών. Οι συνεχείς συμμετρίες περιγράφονται από τη θεωρία των ομάδων Lie (Lie groups) ενώ οι διάκριτες συμμετρίες περιγράφονται από την ομάδα συμμετρίας (Symmetry group) η οποία είναι προφανώς μία πεπερασμένη ομάδα. Συγκεκριμένα οι διάκριτες συμμετρίες εμφανίζονται κυρίως στον τομέα της Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, όπου μελετάται η δομή των μορίων καθώς και η κρυσταλλική δομή των στερεών. Σε κάθε περίπτωση πάντως, οι συμμετρίες οδηγούν στη δημιουργία μίας ομάδας, ή ενός group όπως είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία.



Σχήμα 1.1: Το μόριο του διοξειδίου του άνθρακα (CO_2), με το άτομο του άνθρακα στο κέντρο του μορίου, και οι άξονες συμμετρίας του.

Πριν προχωρήσουμε όμως στον ορισμό του group, ας δούμε ένα παράδειγμα φυσικού συστήματος στο οποίο υπάρχει συμμετρία. Χρησιμοποιούμε λοιπόν ως παράδειγμα το πιο απλό άτομο που υπάρχει στη φύση, το άτομο του υδρογόνου. Όπως ήδη γνωρίζουμε από την κβαντομηχανική η θεμελιώδης κατάσταση του ηλεκτρονίου, το οποίο περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα του ατόμου, έχει σφαιρική συμμετρία. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι το δυναμικό Coulomb το οποίο δημιουργεί ο πυρήνας είναι ανάλογο του $\frac{1}{r}$. Όσο αναφορά τώρα τις διεγερμένες καταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου (Εξ. 1.1), η συμμετρία περιστροφής (rotational symmetry) που παρατηρείται μπορεί να εκφραστεί με βάση τους κβαντικούς αριθμούς l και m οι οποίοι έχουν να κάνουν με τη στροφορμή του ηλεκτρονίου και την προβολή αυτής στον άξονα z .

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{n\alpha_0^*}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) Y_m^l(\theta, \varphi) \quad (1.1)$$

Εξ. 1.1: Οι κυματοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου. Έχουμε θέσει $\alpha_0^* = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/\mu e^2$ την ανηγμένη ακτίνα Bohr, $\rho = 2r/n\alpha_0^*$, $L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$ είναι το πολυώνυμο Laguerre βαθμού $n-l-1$ και $Y_m^l(\theta, \varphi)$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις βαθμού l και τάξης m .

Η ενέργεια της κάθε καταστάσεως δεν εξαρτάται από τον κβαντικό αριθμό m , κάτι που από φυσικής άποψης είναι αναμενόμενο, μιας και η επιλογή του άξονα z είναι τελείως τυχαία. Από μαθητικής απόψεως όμως, αυτό σημαίνει ότι οι κυματοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου θα είναι εκφυλισμένες, μιας και η ίδια ενεργειακή κατάσταση μπορεί να περιγραφεί από διαφορετικές κυματοσυναρτήσεις. Συγκεκριμένα, όπως γνωρίζουμε ο κβαντικός αριθμός m

μπορεί να πάρει τιμές από $-l$ έως $+l$, δηλαδή συνολικά $2l + 1$ διαφορετικές τιμές. Έτσι λοιπόν για δεδομένη ενέργεια E_{nl} , δηλαδή για δεδομένα n και l , θα έχουμε $2l + 1$ κυματοσυναρτήσεις οι οποίες θα μετασχηματίζονται η μία στην άλλη μέσω στροφών, δηλαδή με άλλα λόγια οι κυματοσυναρτήσεις αυτές αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο. Το σύνολο των περιστροφών στον τρισδιάστατο χώρο οι οποίες μετασχηματίζουν τις κυματοσυναρτήσεις αυτές εντός του διανυσματικού τους χώρου, αποτελούν μία αναπαράσταση (representation), η οποία περιγράφεται από έναν πίνακα διαστάσεων $(2l + 1) \times (2l + 1)$.

Έτσι λοιπόν, από τους μετασχηματισμούς συμμετρίας που μόλις μελετήσαμε για ένα φυσικό πρόβλημα φαίνεται αναγκαίο να μελετήσουμε περαιτέρω τη θεωρία ομάδων σε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Η θεωρία αυτή θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε και να κατατάξουμε τις συμμετρίες ενός συστήματος με τις λιγότερες δυνατές ανεξάρτητες μεταβλητές καθώς επίσης μας παρέχει τον τρόπο με τον οποίο τα εκάστοτε στοιχεία του συνόλου (στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου οι κυματοσυναρτήσεις) μετασχηματίζονται το ένα στο άλλο.

Ως ομάδα λοιπόν (ή αλλιώς group), ορίζεται ένα σύνολο G το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία $\{\alpha, \beta, \dots\}$ και είναι εφοδιασμένο με μία πράξη (π.χ. πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) η οποία συνδυάζει κάθε ζεύγος στοιχείων α, β μεταξύ τους με αποτέλεσμα να προκύπτουν νέα στοιχεία $\alpha \circ \beta$. Για την πράξη η οποία συνθέτει την ομάδα θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,

- Ιδιότητα κλειστότητας (closure): Για κάθε ζεύγος στοιχείων α, β τα οποία ανήκουν στο σύνολο G , 'το γινόμενο' $\alpha \circ \beta$ το οποίο προκύπτει από τη σύνθεσή τους, πρέπει να είναι και αυτό μέρος του συνόλου G .

- Προσεταιριστική ιδιότητα (associative law): Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$ ισχύει ότι

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma \quad (1.2)$$

- Ουδέτερο στοιχείο (unit element): Το σύνολο G περιέχει ένα ουδέτερο στοιχείο, το οποίο συμβολίζεται με e , το οποίο $\forall \alpha \in G$,

$$\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha \quad (1.3)$$

- Αντίστροφο στοιχείο (inverse element): Για κάθε $\alpha \in G$ υπάρχει στοιχείο, το οποίο συμβολίζεται με α^{-1} και ονομάζεται το αντίστροφο του α , για το οποίο ισχύει ότι

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = e \quad (1.4)$$

Σημειώνουμε ότι στον παραπάνω ορισμό δεν έχουμε ορίσει τη φύση της πράξης 'ο' (μπορεί να είναι πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, σύνθεση συναρτήσεων ή οποιαδήποτε άλλη πράξη ικανοποιεί τις ιδιότητες που δώσαμε παραπάνω). Επίσης, τονίζουμε ότι τα στοιχεία της ομάδας G μπορεί να είναι αριθμοί, συναρτήσεις, πίνακες ή οποιαδήποτε αντικείμενα είναι κατάλληλα εφοδιασμένα με την πράξη 'ο' όπως την ορίσαμε παραπάνω. Τώρα, αν από τις παραπάνω ιδιότητες ισχύουν μόνο οι δύο πρώτες, τότε η δομή (G, \circ) ονομάζεται ημιομάδα.

Τονίζουμε επιπλέον ότι γενικά $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$, δηλαδή η πράξη 'ο' δεν είναι απαραίτητα μεταθετική. Στην περίπτωση όμως που είναι μεταθετική, δηλαδή ισχύει ότι $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, τότε η ομάδα ονομάζεται Αβελιανή (Abelian group).

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε το σύνολο των ακέραιων αριθμών \mathbb{Z} εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης. Σε αυτή την περίπτωση το ρόλο του ουδέτερου στοιχείου της ομάδας τον παίζει το 0 ενώ το αντίστροφο στοιχείο του α είναι το $-\alpha$.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε και πάλι το σύνολο των ακέραιων αριθμών \mathbb{Z} αλλά αυτή τη φορά εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Τώρα το ρόλο του μοναδιαίου στοιχείου θα τον παίζει η μονάδα. Όμως το αντίστροφο στοιχείο ενός ακεραίου n είναι ο $\frac{1}{n}$, ο οποίος εν γένει δεν είναι ακεραίος και επομένως δεν είναι στοιχείο του συνόλου \mathbb{Z} . Επομένως το σύνολο \mathbb{Z} εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού δεν αποτελεί ομάδα. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που εφοδιάσουμε το σύνολο των ακεραίων \mathbb{Z} με την πράξη της αφαίρεσης ή της διαίρεσης. Και για τις δύο περιπτώσεις δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα της ομάδας όπως την ορίσαμε παραπάνω, μιας και

$$\begin{aligned}\alpha - (\beta - \gamma) &\neq (\alpha - \beta) - \gamma, \\ \alpha \div (\beta \div \gamma) &\neq (\alpha \div \beta) \div \gamma.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3: Στο μιγαδικό επίπεδο επιλέγουμε μόνο εκείνους τους μιγαδικούς οι οποίοι έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα, δηλαδή $z = |z|e^{i\theta}$ με $|z| = 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Το σύνολο αυτό των μιγαδικών εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελεί μία καλά ορισμένη ομάδα μιας και

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)} && \text{(κλειστότητα)} \\ e^{i0} &= 1 && \text{(μοναδιαίο στοιχείο)} \\ e^{i(2\pi - \theta)} \times e^{i\theta} &= e^{i2\pi} \equiv e^{i0} = 1 && \text{(αντίστροφο στοιχείο)}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4: Σε στενή συσχέτιση με το παραπάνω παράδειγμα θεωρούμε το σύνολο των τετράγωνων 2×2 πινάκων $M(\theta)$, οι οποίοι ορίζονται από τη σχέση

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Το σύνολο των πινάκων αυτών αποτελεί μία καλά ορισμένη ομάδα εφόσον το εφοδιάσουμε με την πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων. Μπορούμε λοιπόν να επαληθεύσουμε ότι

$$\begin{aligned}
 M(\theta)M(\varphi) &= M(\theta + \varphi) && \text{(κλειστότητα)} \\
 M(0) &= \mathbb{I}_2 && \text{(μοναδιαίο στοιχείο)} \\
 M(2\pi - \theta) &= M^{-1}(\theta) && \text{(αντίστροφο στοιχείο)}
 \end{aligned}$$

1.2 Πεπερασμένες ομάδες

Στον παραπάνω ορισμό για την ομάδα δεν είχαμε κανένα περιορισμό για το πόσα στοιχεία πρέπει να περιέχει το σύνολο G . Έτσι λοιπόν μία ομάδα μπορεί να περιέχει έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων (πεπερασμένη ομάδα ή finite group) ή άπειρο αριθμό από αυτά.

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν την ανάλυσή μας από την περίπτωση των πεπερασμένων ομάδων. Για μία πεπερασμένη ομάδα το πλήθος g των στοιχείων της ονομάζεται τάξη (order) της ομάδας. Επιπλέον, ένα στοιχείο a της ομάδας μπορεί να συνδυαστεί με τον εαυτό του έτσι ώστε να δώσει $a \circ a = a^2$, $a \circ a^2 = a^3$ κτλ., και μετά από το πολύ $g - 1$ τέτοιους συνδυασμούς θα πάρουμε το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας, δηλαδή $a^g = e$. Επομένως λέμε ότι το στοιχείο a έχει τάξη g . Κάποια απλά αλλά πολύ σημαντικά παραδείγματα πεπερασμένων ομάδων είναι η κυκλική ομάδα C_n , η ομάδα στροφών ενός κανονικού πολυγώνου D_n καθώς και η ομάδα μεταθέσεων S_n . Τις ομάδες αυτές θα τις μελετήσουμε αμέσως παρακάτω.

Η κυκλική ομάδα C_n

Κυκλική ομάδα είναι η ομάδα της οποίας όλα τα στοιχεία μπορούν να παραχθούν από ένα μόνο στοιχείο, το οποίο έστω ότι είναι το a . Μία κυκλική ομάδα τάξης g μπορεί να γραφεί ως

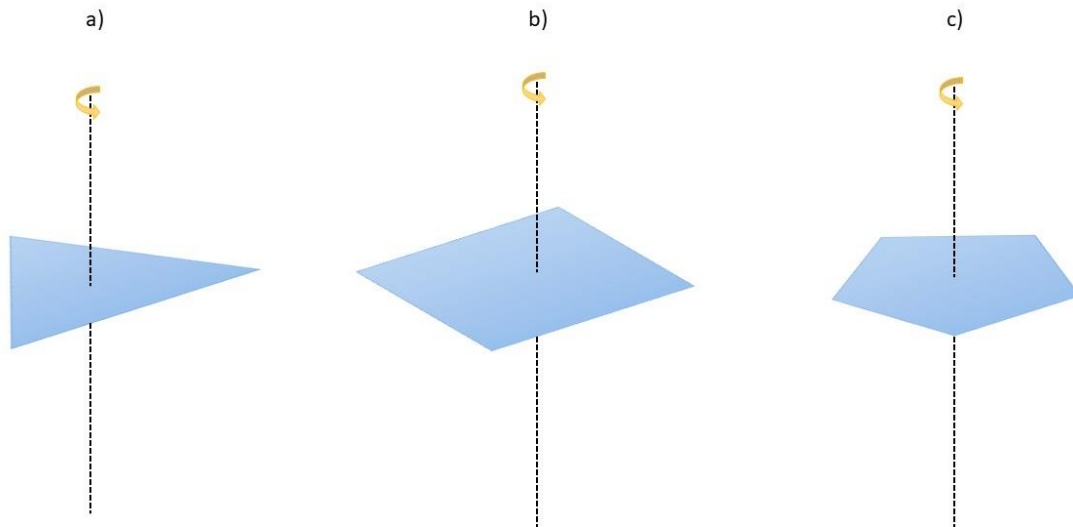
$$C_g = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{g-1}\}.$$

Είναι λοιπόν προφανές ότι κάθε κυκλική ομάδα είναι και Αβελιανή και κάθε στοιχείο της ομάδας, εκτός από το μοναδιαίο στοιχείο e , έχει τάξη g , δηλαδή την τάξη της ομάδας. Παραδείγματα εφαρμογής της κυκλικής ομάδας φαίνονται στο Σχήμα 1.2.

Βλέπουμε ότι στο Σχήμα 1.2(a) έχουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, στο Σχήμα 1.2(b) ένα τετράγωνο ενώ στο Σχήμα 1.2(c) ένα κανονικό πεντάγωνο. Θεωρούμε ότι τα πολύγωνα αυτά μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους. Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι τα στοιχεία της κυκλικής ομάδας για τα παραπάνω πολύγωνα θα είναι στροφές κατά γωνία $2\pi r/n$, όπου n ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου και $r = 0, 1, \dots, n - 1$, μιας και για τις συγκεκριμένες στροφές τα πολύγωνα μένουν ανεπηρέαστα. Συμβολίζοντας με C_n^r το εκάστοτε στοιχείο της ομάδας, και σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε παραπάνω, σημειώνουμε ότι το στοιχείο αυτό μπορεί να προκύψει από διαδοχικές εφαρμογές της μικρότερης μη-τετριμμένης γωνίας, δηλαδή

$$C_n^r = (C_n^1)^r,$$

όπου $C_n^1 = 2\pi/n$. Σημειώνουμε ότι $C_n^n = e$. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι το στοιχείο C_n^1 παράγει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ομάδας, και έτσι γράφουμε συμβολικά $C_n = \text{gp}\{C_n^1\}$.



Σχήμα 1.2: a) Ισόπλευρο τρίγωνο, b) τετράγωνο και c) κανονικό πεντάγωνο μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο τους. Διαγράφοντας γωνίες $2\pi r/n$, όπου n ο αριθμός των πλευρών του εκάστοτε πολυγώνου, παραμένουν αναλλοίωτα.

Συνοψίζοντας, η κυκλική ομάδα C_n τάξης n παράγεται από το στοιχείο C_n^1 και αποτελείται από τα στοιχεία $\{e, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}\}$, όπου e το μοναδιαίο στοιχείο. Με τον όρο 'παράγεται' εννοούμε ότι όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ομάδας προκύπτουν από διαδοχικές εφαρμογές του στοιχείου C_n^1 πάνω στον εαυτό του. Επίσης, είναι Αβελιανή ομάδα μιας και ισχύει η μεταθετική ιδιότητα

$$(C_n^1)^r (C_n^1)^s = (C_n^1)^{r+s} = (C_n^1)^{s+r} = (C_n^1)^s (C_n^1)^r.$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι προφανώς η κυκλική ομάδα μπορεί να οριστεί και για άλλα κανονικά πολύγωνα (εξάγωνο, οκτάγωνο κτλ.).

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο παράδειγμα, αξίζει να σημειώσουμε και έναν ακόμη τρόπο για να βρίσκουμε τα στοιχεία μιας πεπερασμένης ομάδας, όπως είναι η κυκλική ομάδα C_n που μόλις είδαμε. Θεωρούμε για το παράδειγμά μας την ομάδα $C_3 = \{e, c_1, c_2\}$. Εφόσον η ομάδα C_3 ανήκει στην κυκλική ομάδα που αναλύσαμε παραπάνω τότε, από το στοιχείο της c_1 θα παράγονται όλα τα υπόλοιπα, δηλαδή το c_2 στην περίπτωση μας. Επομένως, συμβολίζουμε με

$c_1 = c$, θα είναι $c_2 = c^2 \equiv d$, καθώς επίσης $C_3 = \text{gp}\{c\}$. Τώρα, το αποτέλεσμα της δράσης οποιουδήποτε στοιχείου της ομάδας C_3 πάνω σε οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της ομάδας, δίνεται στον παρακάτω πίνακα,

$g_1 \backslash g_2$	e	c	$d (= c^2)$
e	e	c	d
c	c	d	e
d	d	e	c

Πίνακας 1.1: Για την κατασκευή του πίνακα αυτού τοποθετούμε τα στοιχεία της ομάδας σε μία κάθετη στήλη αριστερά (g_1) και σε μία οριζόντια γραμμή (g_2). Συνθέτοντας τα στοιχεία της γραμμής και της στήλης μεταξύ τους με την πράξη της ομάδας, $g_1 \circ g_2$ (στην περίπτωση μας η πράξη αυτή είναι ο πολλαπλασιασμός), συνθέτουμε τα στοιχεία της ομάδας.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες ομάδες εκτός της κυκλικής. Χρειάζεται όμως να είμαστε πολύ προσεκτικοί μιας και η σειρά με την οποία παίρνουμε τα στοιχεία της ομάδας έχει σημασία όπως είδαμε παραπάνω στο γενικό ορισμό της ομάδας (η κυκλική ομάδα είναι Αβελιανή και έτσι δεν έχει σημασία η σειρά). Επίσης με τον πίνακα αυτό, αν και μπορούμε σχετικά εύκολα να αποκτήσουμε μία αίσθηση για το πώς παράγονται κάθε φορά τα στοιχεία μιας ομάδας, πρέπει να ελέγχουμε αν ισχύει και η προσεταιριστική ιδιότητα. Τέλος, σημειώνουμε κάποιες γενικές ιδιότητες του πίνακα αυτού

- i. Κάθε στοιχείο της ομάδας εμφανίζεται μία μόνο φορά σε κάθε στήλη ή γραμμή του πίνακα αυτού.
- ii. Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι εμφανίζεται το μοναδιαίο στοιχείο e για ορισμένους συνδυασμούς $g_1 \circ g_2$. Προφανώς, στη συγκεκριμένη περίπτωση το στοιχείο g_2 θα είναι το αντίστροφο στοιχείο του g_1 .
- iii. Για οποιαδήποτε Αβελιανή ομάδα ο παραπάνω πίνακας μπορεί να γραφεί σε μορφή που να είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο (δείτε για παράδειγμα τον Πίνακα 1.1).

Παράδειγμα 5: Είδαμε πιο πάνω, στο Παράδειγμα 2, ότι το σύνολο των ακέραιων αριθμών \mathbb{Z} αποτελεί μία καλά ορισμένη ομάδα αν εφοδιαστεί με την πράξη της πρόσθεσης. Αντίθετα, αν το σύνολο αυτό το εφοδιάσουμε με τις πράξεις της αφαίρεσης, της διαίρεσης και του κοινού πολλαπλασιασμού τότε δε συνιστά ομάδα. Διευκρινίζουμε ότι όταν λέμε 'κοινός πολλαπλασιασμός' εννοούμε την πράξη του πολλαπλασιασμού όπως ήδη την ξέρουμε.

Παρ' όλα αυτά, στα μαθηματικά υπάρχει ένα σύστημα αριθμητικής το οποίο ονομάζεται αριθμητική υπολοίπων, ή αλλιώς modulo, το οποίο αναπτύχθηκε από τον Gauss στις αρχές του

17^{ου} αιώνα. Αυτό το σύστημα αριθμητικής χρησιμοποιείται για ακέραιους αριθμούς, και εφαρμόζεται κυρίως σε συστήματα στα οποία τα στοιχεία ενός συνόλου αριθμών συνδυάζονται μεταξύ τους για την επίτευξη μιας συγκεκριμένης τιμής. Ένα χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι το ρολόι, μιας και πρέπει να αναλύσουμε την ημέρα σε δύο περιόδους 12 ωρών η κάθε μία. Για δύο ακέραιους N και a η πράξη ($a \text{ modulo } N$) ή αλλιώς ($a \bmod N$) ορίζεται ως το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\frac{a}{N}$.

Για την καλύτερη κατανόηση της πράξης αυτής, ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα. Θεωρήστε το σύνολο

$$M = \{1,3,5,7\},$$

το οποίο είναι εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού με ($\bmod 8$). Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι $5 \times 7 = 35$, οπότε $35 \bmod 8 = 3$ αφού η διαίρεση $35 \div 8$ δίνει υπόλοιπο 3. Εφόσον ισχύει στο σύνολό μας η μεταθετική ιδιότητα $X \times Y = Y \times X$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 \times 1 &= 1, & 1 \times 3 &= 3, & 1 \times 5 &= 5, & 1 \times 7 &= 7, \\ 3 \times 3 &= 1, & 3 \times 5 &= 7, & 3 \times 7 &= 5, \\ 5 \times 5 &= 1, & 5 \times 7 &= 3, \\ 7 \times 7 &= 1, \end{aligned}$$

όπου πραγματοποιήσαμε όλες τις δυνατές πράξεις που μπορούν να γίνουν μεταξύ των στοιχείων που ανήκουν στο σύνολο M . Καταρχήν, παρατηρούμε ότι όλα τα αποτελέσματα του πολλαπλασιασμού ($\bmod 8$) που πραγματοποιήσαμε ανήκουν στο σύνολο M , δηλαδή το σύνολο αυτό είναι κλειστό. Επίσης, όπως φαίνεται από τα παραπάνω, το ρόλο του μοναδιαίου στοιχείου τον παίζει το στοιχείο 1, μιας και $1 \times Y = Y$. Επιπλέον, για κάθε στοιχείο Y του συνόλου M υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο Y^{-1} για το οποίο ισχύει ότι $Y \times Y^{-1} = 1$ (από την πρώτη στήλη των πολλαπλασιασμών που πραγματοποιήσαμε παραπάνω φαίνεται ότι το αντίστροφο του Y συμπίπτει με το ίδιο το Y). Οι παρατηρήσεις αυτές σε συνδυασμό με την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού με το ($\bmod 8$) καθιστούν το σύνολο M μία Αβελιανή ομάδα τάξης 4 (μιας και το M περιέχει 4 στοιχεία). Σημειώνουμε λοιπόν ότι η πράξη ($\bmod N$) αποτελεί μία ακόμη πράξη, εκτός της πρόσθεσης, με την οποία μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο των ακεραίων \mathbb{Z} έτσι ώστε να δημιουργήσουμε μία ομάδα.

Τελειώνοντας την ανάλυσή μας για το παράδειγμα αυτό, παραθέτουμε τον πίνακα της ομάδας αυτής στον Πίνακα 1.2, όπως κάναμε και για την κυκλική ομάδα C_3 παραπάνω.

Άσκηση 1: α) Θεωρήστε το σύνολο $M' = \{1,5,7,11\}$ εφοδιασμένο με την πράξη ($\bmod 24$). Δείξτε ότι το σύνολο αυτό εφοδιασμένο με τη συγκεκριμένη πράξη αποτελεί μία καλά ορισμένη ομάδα και βρείτε τον αντίστοιχο πίνακα της ομάδας. Συγκρίνετε τον πίνακα που βρήκατε με τον Πίνακα

1.2. β) Εργαστείτε με όμοιο τρόπο για το σύνολο $M'' = \{1,2,3,4\}$ εφοδιασμένο με την πράξη (mod 5).

$g_1 \backslash g_2$					
		1	3	5	7
1		1	3	5	7
3		3	1	7	5
5		5	7	1	3
7		7	5	3	1

Πίνακας 1.2: Ο πίνακας στοιχείων του συνόλου $M = \{1,3,5,7\}$ εφοδιασμένο με την πράξη (mod 8). Παρατηρούμε και εδώ ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο, όπως συμβαίνει και για την κυκλική ομάδα C_3 (Πίνακας 1.1).

Η ομάδα στροφών κανονικού πολυγώνου D_n

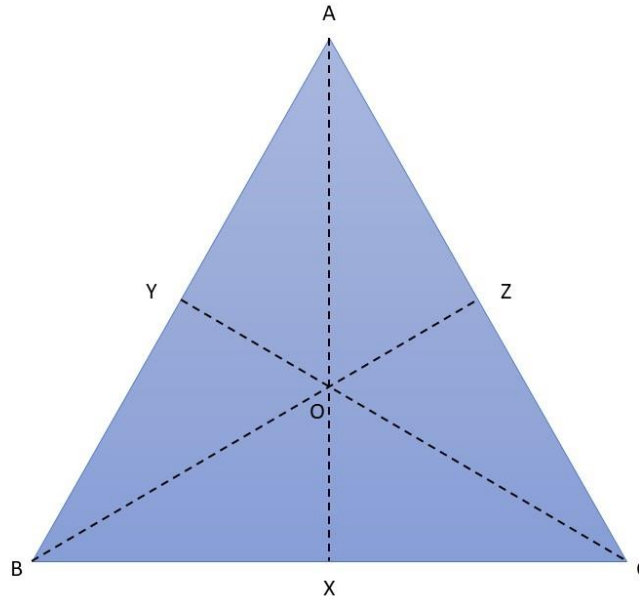
Όπως λέει και το όνομά της, η ομάδα αυτή περιλαμβάνει όλες τις δυνατές στροφές κατά τις οποίες μπορούμε να στρέψουμε ένα πολύγωνο γύρω από έναν άξονα, αφήνοντας ανεπηρέαστο το αρχικό μας πολύγωνο. Σημειώνουμε εδώ ότι, στην περίπτωση της κυκλικής ομάδας C_n χρησιμοποιήσαμε τα πολύγωνα ως ένα παράδειγμα εφαρμογής της ομάδας αυτής. Παρ' όλα αυτά, η ομάδα η οποία μελετά όλες τις δυνατές στροφές ενός πολυγώνου είναι η ομάδα D_n , την οποία θα μελετήσουμε αμέσως παρακάτω.

Για να γίνει πιο κατανοητή αυτή η ομάδα, ας δούμε για παράδειγμα το μέλος της ομάδας για $n = 3$, δηλαδή την ομάδα D_3 . Η ομάδα αυτή περιλαμβάνει όλες τις πιθανές στροφές κατά τις οποίες μπορούμε να στρέψουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο αφήνοντάς το ανεπηρέαστο (Σχήμα 1.3). Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.3 το ισόπλευρο τρίγωνο έχει 4 άξονες γύρω από τους οποίους μπορεί να περιστραφεί: τους άξονες AX, BZ και CY οι οποίοι έχουν σημειωθεί με διακεκομμένη γραμμή καθώς επίσης γύρω από άξονα ο οποίος περνάει από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο του τριγώνου [δείτε επίσης το Σχήμα 1.2(a)].

Προφανώς στα στοιχεία της ομάδας D_3 θα περιέχονται όλα τα στοιχεία της ομάδας C_3 , μιας και όπως είδαμε και στις δύο περιπτώσεις λαμβάνουμε υπόψιν τις στροφές που αφήνουν αναλλοίωτο το τρίγωνό μας γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του. Επιπλέον των στοιχείων αυτών, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις στροφές κατά γωνία π γύρω από τους άξονες AX, BZ και CY και θα ονομάσουμε τα στοιχεία αυτά b_1 , b_2 και b_3 αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι αν εφαρμόσουμε κάποια από τις στροφές b_i ($i = 1,2,3$) δύο διαδοχικές φορές τότε θα πάρουμε πάλι το αρχικό μας τρίγωνο, μιας και θα έχουμε ουσιαστικά μία στροφή κατά γωνία 2π . Επομένως συμπεραίνουμε ότι $b_i^2 = e$, ($i = 1,2,3$), και έτσι λέμε ότι τα στοιχεία b_i είναι τάξης

δύο. Σε συμφωνία με το συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε για τα στοιχεία της ομάδας C_3 , μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία της ομάδας D_3 ως

$$D_3 = \{e, c, d, b_1, b_2, b_3\} \quad (1.5)$$



Σχήμα 1.3: Οι άξονες συμμετρίας ισόπλευρου τριγώνου. Εκτός από τους άξονες AX, BZ και CY που φαίνονται στο σχήμα, υπάρχει ακόμα ένας άξονας συμμετρίας ο οποίος διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο του τριγώνου. Ο άξονας αυτός φαίνεται πολύ καλύτερα στο Σχήμα 1.2(a).

Σημειώνουμε επίσης ότι αν εφαρμόσουμε το στοιχείο c , δηλαδή μία στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ με φορά αντίθετη εκείνης της φοράς του ρολογιού γύρω από τον άξονα που περνάει από το σημείο O, τότε οι άξονες AX, BZ και CY περιστρέφονται επίσης με αποτέλεσμα ο ένας να παίρνει τη θέση του άλλου. Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας τη στροφή c , που μόλις περιγράψαμε, θα ισχύει για τους άξονες συμμετρίας ότι $c(BZ) = (CY)$, $c(CY) = (AX)$ καθώς και $c(AX) = (BZ)$. Από το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι τα στοιχεία b_2 και b_3 , b_3 και b_1 καθώς και b_1 και b_2 είναι συζυγή το ένα του άλλου. Σε μαθηματική μορφή αυτό εκφράζεται από τις σχέσεις,

$$b_3 = cb_2c^{-1}, \quad (1.6)$$

$$b_1 = cb_3c^{-1}, \quad (1.7)$$

$$b_2 = cb_1c^{-1}. \quad (1.8)$$

Με άλλα λόγια, η Εξ. (1.6) λέει ότι το αποτέλεσμα της στροφής b_3 μπορεί να αναπαραχθεί πραγματοποιώντας αρχικά μία στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω

από τον άξονα που περνάει από το O (δηλαδή τη c^{-1}), στη συνέχεια μία στροφή κατά π γύρω από τον άξονα BZ (τον θεωρούμε σταθερό στο χώρο) και τέλος μία στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού γύρω από τον άξονα που περνάει από το O (δηλαδή τη c). Η διαδικασία περιγράφεται στο Σχήμα 1.4. Τα αντίστοιχα ισχύουν προφανώς και τις Εξ. (1.7)-(1.8). Σαν άσκηση, επαληθεύστε με την ίδια διαδικασία τα συμπεράσματα των Εξ. (1.7)-(1.8).

Στη συνέχεια φτιάχνουμε τον αντίστοιχο πίνακα με όλα τα στοιχεία της ομάδας και πώς αυτά μετασχηματίζονται το ένα στο άλλο, όπως κάναμε και στην περίπτωση της κυκλικής ομάδας C_3 . Ο αντίστοιχος πίνακας λοιπόν για την ομάδα D_3 δίνεται στον Πίνακα 1.3. Αρχικά παρατηρούμε ότι πλέον ο πίνακας αυτός δεν είναι συμμετρικός όπως στην περίπτωση της ομάδας C_3 . Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα D_3 είναι μία μη-Αβελιανή ομάδα και έτσι δεν ισχύει η μεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$. Παρ' όλα αυτά παρατηρούμε ότι ο Πίνακας 1.3 μπορεί να χωριστεί σε 4 μπλοκ 3×3 στα οποία υπάρχει συμμετρία. Η παρατήρηση αυτή παραπέμπει στην έννοια της υποομάδας, την οποία θα ορίσουμε σε επόμενη υποενότητα.

Επιπλέον των Εξ. (1.6)-(1.8) και εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις μεταξύ των αξόνων συμμετρίας που αναφέραμε παραπάνω, μπορούμε να συναγάγουμε τις παρακάτω εξισώσεις,

$$b_3 = b_2c, \quad (1.9)$$

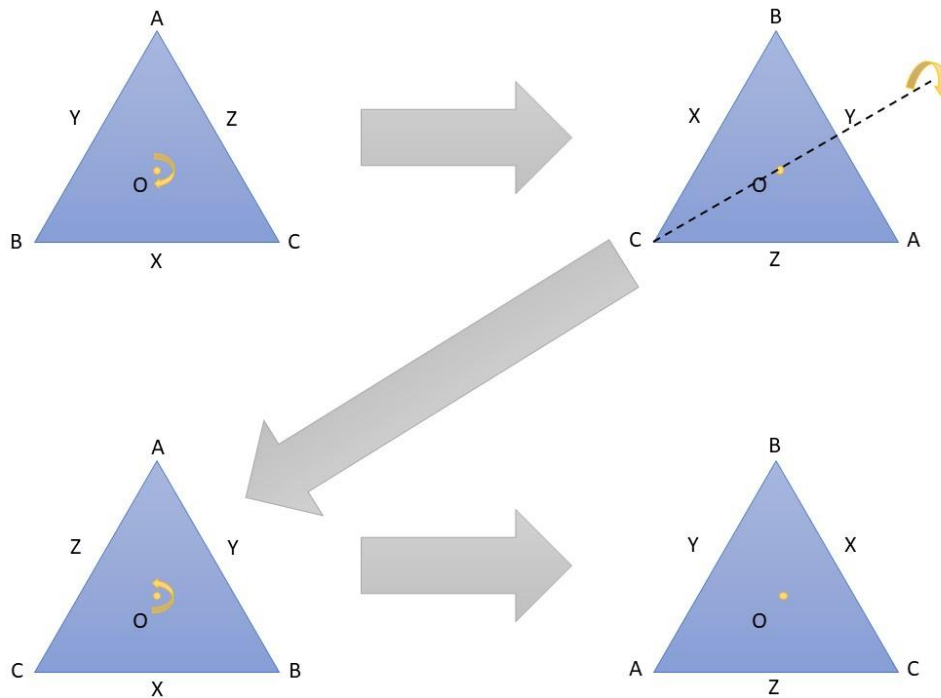
$$b_1 = b_3c, \quad (1.10)$$

$$b_2 = b_1c. \quad (1.11)$$

Ας δούμε πώς αυτές οι εξισώσεις μετασχηματίζουν κάθε φορά τις πλευρές του τριγώνου. Παίρνουμε για παράδειγμα την πλευρά του αρχικού τριγώνου (AB) και εφαρμόζουμε σε αυτή τους μετασχηματισμούς που υπάρχουν στο δεξί μέλος της Εξ. (1.11). Θα είναι λοιπόν $b_1c(AB) = b_1(CA) = (CB)$. Προφανώς τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις επιβεβαιώσουμε για όλες τις πλευρές του τριγώνου.

Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε το στοιχείο του συνόλου b_1 απλά ως b . Έτσι λοιπόν η Εξ. (1.11) θα γράφεται απλά ως $b_2 = bc$, δηλαδή το στοιχείο b_2 παράγεται από τα b και c . Επομένως η Εξ. (1.9) μπορεί αντίστοιχα να γραφεί $b_3 = bc^2$. Επομένως βλέπουμε ότι όλα τα στοιχεία της ομάδας D_3 μπορούν να παραχθούν μόνο από τα στοιχεία c και b , και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τα στοιχεία αυτά ως γεννήτορες της ομάδας, κατ' αντιστοιχία με το στοιχείο c που ήταν ο γεννήτορας της κυκλικής ομάδας C_3 . Άρα τώρα γράφουμε $D_3 = \langle c, b \rangle$. Επίσης, για τα στοιχεία c και b ισχύει ότι $b^2 = c^3 = (bc)^2 = e$. Τέλος, ξαναγράφοντας τα στοιχεία της ομάδας D_3 θα είναι

$$D_3 = \{e, c, c^2, b, bc, bc^2\}.$$



Σχήμα 1.4: Οι μετασχηματισμοί του αρχικού τριγώνου του Σχ. 1.3 οι οποίοι περιγράφονται από το δεξί μέλος την Εξ. (1.6). Παρατηρούμε ότι το τελικό αποτέλεσμα μπορούμε να το πάρουμε πραγματοποιώντας απλά μία στροφή κατά π γύρω από τον άξονα CY του αρχικού τριγώνου.

$g_1 \backslash g_2$	e	c	d	b_1	b_2	b_3
e	e	c	d	b_1	b_2	b_3
c	c	d	e	b_3	b_1	b_2
d	d	e	c	b_2	b_3	b_1
b_1	b_1	b_2	b_3	e	c	d
b_2	b_2	b_3	b_1	d	e	c
b_3	b_3	b_1	b_2	c	d	e

Πίνακας 1.3: Τα στοιχεία της ομάδας D_3 και πώς αυτά μετασχηματίζονται το ένα στο άλλο.

Άσκηση 2: Θεωρήστε ένα σύνολο M το οποίο περιέχει έξι ορθογώνιους 2×2 πίνακες οι οποίοι

γράφονται: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ και $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο M εφοδιασμένο με την πράξη του

πολλαπλασιασμού πινάκων αποτελεί ομάδα. Φτιάξτε τον αντίστοιχο πίνακα της ομάδας και συγκρίνετε με τον Πίνακα 1.3.

Άσκηση 3: Θεωρήστε ένα σύνολο F το οποίο περιέχει τις εξής συναρτήσεις: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$, $f_5(x) = 1-x$ και $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$. Αποδείξτε ότι αν εφοδιάσουμε το σύνολο F με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων $\{δηλαδή\} f_i \circ f_j = f_i[f_j(x)]$, τότε αποτελεί ομάδα. Φτιάξτε τον αντίστοιχο πίνακα της ομάδας αυτής και συγκρίνετε και πάλι με τον πίνακα της προηγούμενης άσκησης καθώς και με τον Πίνακα 1.3. Τι παρατηρείτε?

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα ακόμα μέλος της ομάδας D_n , την ομάδα D_4 η οποία περιλαμβάνει όλες τις πιθανές στροφές κατά τις οποίες μπορούμε να στρέψουμε ένα τετράγωνο (Σχήμα 1.5). Σε αντιστοιχία με την ομάδα D_3 , η ομάδα D_4 θα περιλαμβάνει τις στροφές κατά $\frac{\pi}{2}$ με φορά αντίθετη με εκείνη των δεικτών του ρολογιού γύρω από άξονα ο οποίος περνά από το O και είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου, καθώς επίσης και στροφές κατά π γύρω από τους άξονες OX (b_1), AC (b_2), OY (b_3) και BD (b_4). Όπως και πριν, η στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$ θα συμβολίζεται με c και θα ισχύει ότι $c^4 = e$, δηλαδή το στοιχείο c είναι 4^{ης} τάξης. Αντίστοιχα το στοιχείο $b_1 = b$ είναι 2^{ης} τάξης μιας και $b^2 = e$. Οι άλλες στροφές, συναρτήσει της b θα γράφονται

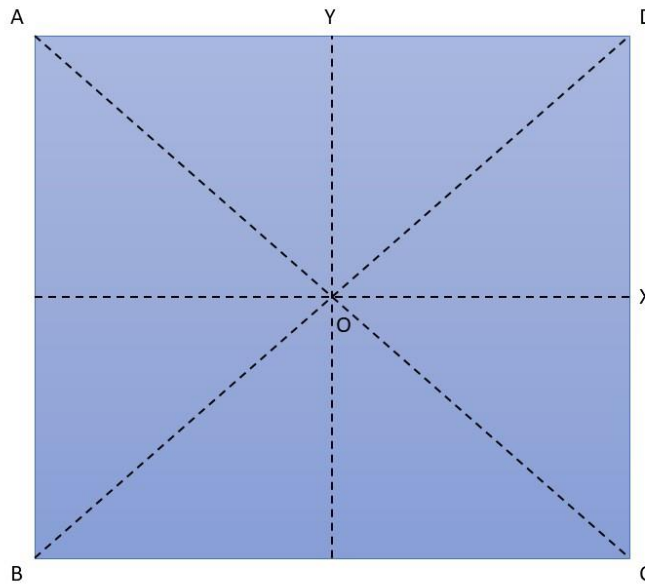
$$b_2 = bc, \quad (1.12)$$

$$b_3 = bc^2, \quad (1.13)$$

$$b_4 = bc^3. \quad (1.14)$$

Επομένως μπορούμε και πάλι να ισχυριστούμε ότι τα στοιχεία c και b παράγουν την ομάδα D_4 και έτσι γράφουμε $D_4 = \text{grp}\{c, b\}$, όπου $c^4 = b^2 = (cb)^2 = e$. Τελικά, τα στοιχεία της ομάδας D_4 συναρτήσει των γεννητόρων γράφονται

$$D_4 = \{e, c, c^2, c^3, b, bc, bc^2, bc^3\}.$$



Σχήμα 1.5: Οι άξονες συμμετρίας του τετραγώνου. Όπως και για το τρίγωνο, θεωρούμε ότι από το κέντρο O του τετραγώνου διέρχεται άξονας ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου [καλύτερα φαίνεται στο Σχ. 1.2(b)].

Από την παραπάνω ανάλυση για τις ομάδες D_3 και D_4 μπορούμε πλέον να γενικεύσουμε για την ομάδα D_n ενός κανονικού πολυγώνου με n γωνίες. Έτσι λοιπόν η ομάδα D_n παράγεται από το στοιχείο c , το οποίο είναι n -τάξης και περιγράφει στροφή κατά $\frac{2\pi}{n}$ γύρω από άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του πολυγώνου και είναι κάθετος στο επίπεδό του, καθώς επίσης και από το στοιχείο b το οποίο είναι 2^{ns} τάξης και περιγράφει μία περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα συμμετρίας του πολυγώνου: $D_n = \langle c, b \rangle$ και $c^n = b^2 = (cb)^2 = e$. Τα στοιχεία της ομάδας λοιπόν θα είναι

$$D_n = \{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}, b, bc, bc^2, \dots, bc^{n-1}\}$$

δηλαδή η ομάδα είναι τάξεως $2n$, μιας και τόσα είναι τα στοιχεία τα οποία περιέχει. Σημειώνουμε επίσης ότι τα στοιχεία $\{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$, δηλαδή η ομάδα C_n αποτελεί μία υποομάδα της D_n . Περισσότερα για τις υποομάδες θα πούμε σε επόμενη παράγραφο. Επίσης κάθε περιστροφή b παράγει την υποομάδα C_2 η οποία αποτελείται από την περιστροφή αυτή και το τετράγωνό της b^2 , το οποίο ισούται με τη μονάδα, όπως είδαμε και πιο πάνω.

Πριν προχωρήσουμε στην ομάδα μεταθέσεων S_n , και με αφορμή τη σύνδεση των στοιχείων μεταξύ τους όπως τη σημειώσαμε στις Εξ. (1.6)-(1.8), θα θέλαμε να ορίσουμε τα συζυγή στοιχεία μιας ομάδας. Ορίζουμε λοιπόν ότι, δύο στοιχεία X και Y μιας ομάδας G είναι συζυγή μεταξύ τους αν υπάρχει ένα τρίτο στοιχείο G_i της ομάδας αυτής, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $Y = G_i X G_i^{-1}$. Αν ισχύουν τα παραπάνω θα συμβολίζουμε θα συμβολίζουμε τα συζυγή στοιχεία ως

$X \sim Y$, δηλαδή τα δύο στοιχεία συνδέονται με μία σχέση ισοδυναμίας. Για να είναι καλά ορισμένη η σχέση αυτή της ισοδυναμίας, θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

- Για το στοιχείο X ισχύει ότι $X \sim X$ μιας και $X = IXI^{-1}$, όπου I το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας G .
- Η σχέση $X \sim Y$ σημαίνει ότι $Y = G_i X G_i^{-1}$ και συνεπώς $X = G_i^{-1} Y (G_i^{-1})^{-1}$. Από τη στιγμή που το G_i ανήκει στην ομάδα G , στην ομάδα αυτή θα ανήκει και το G_i^{-1} , οπότε θα ισχύει ότι $Y \sim X$.
- Αν ισχύει ότι $X \sim Y$ καθώς και $Y \sim Z$, αυτό σημαίνει ότι ισχύουν οι σχέσεις $Y = G_i X G_i^{-1}$ και $Z = G_j Y G_j^{-1}$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις αυτές θα είναι $Z = G_j G_i X G_i^{-1} G_j^{-1} = (G_j G_i) X (G_i G_j)^{-1}$. Από τη στιγμή που τα G_i και G_j ανήκουν στην ομάδα G το ίδιο θα ισχύει και για το $G_i G_j$, οπότε παίρνουμε ότι $X \sim Z$.

Επομένως, τα παραπάνω καταδεικνύουν ότι η ιδιότητα της συζυγίας (conjugacy στη διεθνή βιβλιογραφία) είναι μια καλά ορισμένη ιδιότητα, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να χωρίσουμε την ομάδα G σε κλάσεις (classes): δύο στοιχεία οποία ανήκουν στην ίδια κλάση, αν και μόνο αν, είναι συζυγή μεταξύ τους. Οι τάξεις οι οποίες δημιουργούνται ονομάζονται conjugacy classes (για ευκολία θα χρησιμοποιούμε το διεθνή όρο ή απλά τον όρο κλάση). Άμεση συνέπεια των conjugacy classes είναι ότι το μοναδιαίο στοιχείο μιας ομάδας G αποτελεί από μόνο του μία κλάση. Επιπλέον, αν ένα στοιχείο X της ομάδας G αποτελεί από μόνο του μία κλάση τότε θα ισχύει $X G_i = G_i X$, για κάθε στοιχείο G_i της ομάδας (με άλλα λόγια θα εναλλάσσεται με όλα τα στοιχεία). Επομένως η εναλλαγή ενός στοιχείου με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ομάδας είναι απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να αποτελεί μία κλάση από μόνο του. Αν κάθε στοιχείο μιας ομάδας αποτελεί από μόνο του μία conjugacy class τότε η ομάδα αυτή θα είναι Αβελιανή.

Η ομάδα μεταθέσεων S_n

Η ομάδα των μεταθέσεων αποτελεί μία πολύ σημαντική ομάδα μιας και έχει πολλές εφαρμογές στον τομέα της φυσικής, όπως για παράδειγμα στη μελέτη των πολύ-ηλεκτρονιακών ατόμων όπου έχουμε συνύπαρξη πολλών ταυτόσημων σωματίων (ηλεκτρόνια). Συγκεκριμένα η ομάδα αυτή συντίθεται από τις μεταθέσεις n αντικειμένων μεταξύ τους και η τάξη της είναι $n!$. Τονίζουμε εδώ ότι η ομάδα μεταθέσεων S_n συντίθεται από τις μεταθέσεις, δηλαδή την ανακατανομή n στοιχείων, και όχι από τα ίδια τα στοιχεία n .

Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας αυστηρά τη μετάθεση P και στη συνέχεια θα περάσουμε σε κάποια απλά παραδείγματα. Θεωρήστε λοιπόν ότι έχουμε ένα σύνολο $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Αν P είναι μία μετάθεση του συνόλου M τότε γράφουμε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ P(1) & P(2) & \dots & P(n) \end{pmatrix},$$

όπου στην πρώτη γραμμή τοποθετούμε τα στοιχεία n του συνόλου M που θέλουμε να μεταθέσουμε, ενώ στη δεύτερη γραμμή γράφουμε τα στοιχεία που προκύπτουν μετά τη μετάθεση. Πάρτε για παράδειγμα το σύνολο $M = \{1,2,3,4,5\}$. Μία μετάθεση του συνόλου αυτού γράφεται ως

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

όπου έχουμε $P(1) = 4$, $P(2) = 1$, $P(3) = 5$, $P(4) = 3$ και $P(5) = 2$. Προφανώς η σειρά με την οποία γράφουμε τις στήλες δεν έχει σημασία αφού το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι η αντιστοιχία $x \rightarrow P(x)$, δηλαδή πώς μετασχηματίζονται τα στοιχεία υπό τη συγκεκριμένη μετάθεση. Επομένως, ο πίνακας της μετάθεσης στο παραπάνω παράδειγμα θα μπορούσε να γραφεί ισοδύναμα

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Εάν τώρα θέλουμε να εφαρμόσουμε δύο διαδοχικές μεταθέσεις (έστω P και Q οι μεταθέσεις αυτές) στο σύνολο των στοιχείων του συνόλου M , τότε θα πρέπει να ορίσουμε το γινόμενο PQ . Καταρχήν σημειώνουμε ότι η μετάθεση η οποία πραγματοποιείται πρώτη είναι αυτή που γράφεται στα δεξιά, στην περίπτωση μας η Q . Έτσι λοιπόν, το γινόμενο των μεταθέσεων PQ των στοιχείων ενός συνόλου $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ μοιάζει με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, δηλαδή $P[Q(x)]$ μιας και όπως είπαμε η μετάθεση Q εφαρμόζεται πρώτη. Επομένως, είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι γενικά ισχύει

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \neq QP.$$

Ας δούμε όμως τα παραπάνω μέσα από ένα παράδειγμα. Θεωρήστε και πάλι το σύνολο των στοιχείων $M = \{1,2,3,4,5\}$ και δύο μεταθέσεις αυτών των στοιχείων οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, το γινόμενο των μεταθέσεων αυτών γράφεται,

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για να πραγματοποιήσουμε την πράξη αυτή συνεχίζουμε ως εξής: Γνωρίζουμε καταρχήν ότι η δεύτερη σειρά στον πίνακα Q έχει προέλθει από την πράξη $x \rightarrow Q(x)$. Επειδή όπως είπαμε το γινόμενο PQ προσομοιάζει τη σύνθεση συναρτήσεων, αναδιατάσσουμε τις στήλες του πίνακα P έτσι ώστε η πρώτη γραμμή του πίνακα αυτού να έχει ακριβώς ίδια μορφή με εκείνη της δεύτερης γραμμής του Q , δηλαδή

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως τώρα είμαστε έτοιμοι να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα. Η πρώτη στήλη του πίνακα Q υποδεικνύει τη μετάθεση $1 \rightarrow 3$, ενώ η αντίστοιχη στήλη του πίνακα P ορίζει τη μετάθεση $3 \rightarrow 5$, και έτσι το τελικό αποτέλεσμα για τη μετάθεση του στοιχείου 1 είναι το 5 μέσω της διαδικασίας $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$, οποία τονίζεται αμέσως παρακάτω από το πράσινο πλαίσιο,

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τα άλλα στοιχεία του συνόλου M καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα της δράσης των δύο διαδοχικών μεταθέσεων P και Q ,

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το τελικό αποτέλεσμα δίνεται από την πρώτη γραμμή του πίνακα Q και από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα P . Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και στην περίπτωση που έχουμε να πραγματοποιήσουμε παραπάνω από δύο μεταθέσεις στη σειρά.

Ένας επίσης πολύ διαδεδομένος τρόπος να γράφουμε τις μεταθέσεις είναι σε μορφή μη-κλειστού κύκλου. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη μετάθεση P_1 , όπου

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρείστε ότι η μετάθεση αυτή μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη, ή αλλιώς σε δύο 'ανοιχτούς κύκλους' (disjoint circle στη διεθνή βιβλιογραφία): ο ένας είναι ο $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ και ο άλλος ο $3 \rightarrow 3$, δηλαδή ο πρώτος κύκλος καταλήγει στο στοιχείο με το οποίο ξεκινήσαμε, ενώ ο δεύτερος κύκλος δεν είναι τίποτα άλλο παρά η μετάθεση του στοιχείου 3 με τον εαυτό του. Αναδιατάσσοντας τις στήλες του P_1 έχουμε

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 4)(3).$$

Από την παραπάνω εξίσωση, φαίνεται ότι όλη η πληροφορία για τις μεταθέσεις των στοιχείων περιέχεται μόνο στην πρώτη γραμμή των πινάκων (δείτε ξανά την πρώτη γραμμή του πίνακα στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης καθώς και τον 'ανοιχτό κύκλο' $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$). Έτσι λοιπόν, μπορούμε να παραλείψουμε τη δεύτερη γραμμή και να γράψουμε τις μεταθέσεις απλά κρατώντας την πρώτη γραμμή, όπως φαίνεται στο τρίτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης. Μία επιπλέον εφαρμογή του συγκεκριμένου συμβολισμού μπορεί να γίνει στις μεταθέσεις P και Q που είχαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των 'ανοιχτών κύκλων' η Εξ. (1.15) γράφεται (δείξτε το)

$$PQ = (1 \ 4 \ 3 \ 5 \ 2)(1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5) = (1 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3).$$

Εφόσον είδαμε πώς συνθέτονται τα στοιχεία της ομάδας μεταθέσεων S_n , ας ελέγξουμε και τις άλλες απαιτήσεις που προϋποθέτουν μία καλά ορισμένη ομάδα, όπως τις δώσαμε στο γενικό ορισμό στην Ενότητα 1.1. Το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας μεταθέσεων S_n συμβολίζεται με I και παριστάνει τη μετάθεση του εκάστοτε στοιχείου με τον εαυτό του, δηλαδή

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2) \dots (n),$$

όπου δώσαμε και τη γραφή του μοναδιαίου στοιχείου σε κυκλική μορφή. Επίσης, το αντίστροφο στοιχείο της ομάδας αυτής, P^{-1} , θα γράφεται

$$\text{Αν } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ P(1) & P(2) & \dots & P(n) \end{pmatrix} \text{ τότε } P^{-1} = \begin{pmatrix} P(1) & P(1) & \dots & P(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Πριν δούμε κάποια παραδείγματα στην ομάδα S_n , ένα ακόμα λεπτό σημείο που πρέπει να επισημάνουμε είναι η τάξη των στοιχείων που αποτελούν την ομάδα αυτή. Έχουμε ήδη πει ότι η τάξη της ομάδας S_n είναι $n!$, λόγω του ότι περιέχει $n!$ στοιχεία. Όπως είδαμε όμως και στις προηγούμενες ομάδες η τάξη ορίζεται και για τα εκάστοτε στοιχεία της ομάδας. Ένας πολύ εύκολος τρόπος να βρίσκουμε την τάξη των στοιχείων της ομάδας μεταθέσεων δίνεται από τον εξής ορισμό: Η τάξη οποιασδήποτε μετάθεσης βαθμού n , η οποία ανήκει στην ομάδα S_n και έχει γραφεί με τη μορφή των 'ανοιχτών κύκλων', μπορεί να εξαχθεί από το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των μηκών των κύκλων αυτών. Για παράδειγμα, το μοναδιαίο στοιχείο I έχει τάξη 1, κάτι το οποίο βέβαια αναμέναμε. Ως ένα πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα θεωρίστε τη μετάθεση

$$(1 \ 4 \ 3 \ 5 \ 2)(7 \ 9)(6 \ 8 \ 0),$$

η οποία όπως βλέπουμε γράφεται συναρτήσεως τριών διαφορετικών 'ανοιχτών κύκλων' με μήκη 5, 2 και 3 αντίστοιχα. Το ΕΚΠ των 2, 3 και 5 είναι το 20. Οπότε το παραπάνω στοιχείο, το οποίο ανήκει στην ομάδα S_{10} , είναι $20^{\text{ος}}$ τάξης.

Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα της ομάδας μεταθέσεως. Ξεκινάμε λοιπόν με την ομάδα S_2 , η οποία είναι η πιο απλή ομάδα της οικογένειας αυτής μιας και οι μόνες μεταθέσεις που περιέχει είναι η μοναδιαία καθώς και η $1 \rightarrow 2$. Γράφοντας τη μετάθεση αυτή σε κυκλική μορφή θα είναι $(1 \ 2)$, και σημειώνοντας ότι ισούται με την αντίστροφή της (γιατί?), έχουμε

$$S_2 = \{(1)(2), (1 \ 2)\}.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η ομάδα S_2 είναι πανομοιότυπη με την κυκλική ομάδα C_2 .

Συνεχίζουμε με την ομάδα S_3 . Η ομάδα αυτή περιγράφει τη μετάθεση τριών στοιχείων οπότε η τάξη της ομάδας αυτής θα είναι $3! = 6$. Γράφοντας τα στοιχεία της ομάδας σε κυκλική μορφή παίρνουμε ότι

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2), (1)(2 \ 3), (3)(1 \ 2), (2)(1 \ 3)\}.$$

Άσκηση 4: Συμβολίστε τα στοιχεία της ομάδας S_3 ως: $I = (1)(2)(3)$, $A = (1 \ 2 \ 3)$, $B = (1 \ 3 \ 2)$, $C = (1)(2 \ 3)$, $D = (3)(1 \ 2)$ και $E = (2)(1 \ 3)$. Βρείτε το χαρακτηριστικό πίνακα της ομάδας αυτής, όπως κάναμε για τις ομάδες C_n και D_n . Συγκρίνετε τον πίνακα που

βρήκατε με τον Πίνακα 1.2. Τι τάξης είναι τα εκάστοτε στοιχεία της ομάδας αυτής? Ποιες είναι οι αντίστροφες μεταθέσεις των A, B, C, D, E ? Η ομάδα αυτή είναι Αβελιανή ή όχι?

1.3 Απεικονίσεις, ομομορφισμός και ισομορφισμός

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα πεπερασμένων ομάδων. Τώρα θα συνεχίσουμε την ανάλυσή μας στις ομάδες αυτές δίνοντας κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες θα μας βοηθήσουν να συσχετίσουμε τις ομάδες αυτές μεταξύ τους.

Πριν ξεκινήσουμε θα θέλαμε να τονίσουμε το εξής. Όπως αναλύσαμε πιο πάνω, μία ομάδα χαρακτηρίζεται από το σύνολο των στοιχείων που αποτελείται, έστω $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, καθώς και από την πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένη, την οποία συμβολίσαμε με 'ο', και έτσι μία ομάδα συμβολίζεται ως (G, \circ) . Από εδώ και πέρα, μία ομάδα (G, \circ) θα τη συμβολίζουμε απλά με το σύμβολο του συνόλου το οποίο την αποτελεί, δηλαδή θα τη γράφουμε απλά ως G , μιας και λόγω του ότι δε θα ασχοληθούμε με σύνολα δεν θα υπάρξει κάποια σύγχυση με τον συμβολισμό. Τονίζουμε ότι στην περίπτωση που έχουμε δύο διαφορετικές ομάδες G και G' , τότε, εν γένει, αυτές οι ομάδες δε θα διαφέρουν μόνο στα σύνολα τα οποία θα τις αποτελούν, αλλά θα διαφέρουν και στην πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένες. Θα χρησιμοποιήσουμε τον αρχικό συμβολισμό (G, \circ) μόνο σε περιπτώσεις όπου θέλουμε να δείξουμε με ξεκάθαρο τρόπο ότι η πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένες δύο ομάδες διαφέρει.

Μετά από αυτή την απαραίτητη διευκρίνιση ξεκινάμε λοιπόν την ανάλυσή μας με την έννοια της απεικόνισης (mapping). Εάν $G = \{X, Y, \dots\}$ και $G' = \{X', Y', \dots\}$ είναι δύο διαφορετικές ομάδες, τότε μπορούμε να ορίσουμε ως απεικόνιση

$$\Phi: G \rightarrow G'$$

της ομάδας G στην ομάδα G' . Εάν λοιπόν X ένα στοιχείο της ομάδας G , τότε η εικόνα του στην ομάδα G' υπό την απεικόνιση Φ θα γράφεται $X' = \Phi(X)$. Στην ουσία λοιπόν, η απεικόνιση είναι μία συνάρτηση η οποία μας επιτρέπει να πηγαίνουμε από τα στοιχεία της μίας ομάδας στα αντίστοιχα στοιχεία της άλλης.

Εφόσον τώρα έχουμε τον ορισμό της απεικόνισης, μπορούμε συνεχίσουμε στους ορισμούς δύο πολύ σημαντικών εννοιών. Θα ορίσουμε αρχικά τον ομομορφισμό (homomorphism) δύο ομάδων και στη συνέχεια θα ορίσουμε τον ισομορφισμό (isomorphism) και θα δούμε σε ποια σημεία αυτές οι δύο έννοιες διαφέρουν.

Θεωρούμε και πάλι δύο ομάδες $(G, *)$ και (G', \times) καθώς και μία απεικόνιση Φ . Εάν για κάθε ζεύγος στοιχείων X και Y τα οποία ανήκουν στο G ισχύει ότι

$$\Phi(X * Y) = \Phi(X) \times \Phi(Y) = X' \times Y',$$

τότε η απεικόνιση Φ ονομάζεται ομομορφισμός, καθώς επίσης η ομάδα G' ονομάζεται ομομορφική εικόνα του G . Ουσιαστικά, ο παραπάνω ορισμός μας λέει ότι είναι ισοδύναμο να κατασκευάσουμε πρώτα το 'γινόμενο' δύο στοιχείων και ύστερα να πάρουμε την εικόνα τους

με το να πάρουμε πρώτα την εικόνα καθενός από τα στοιχεία αυτά και στη συνέχεια να πάρουμε το 'γινόμενο' τους. Ο όρος 'γινόμενο' μπαίνει σε εισαγωγικά μιας και δεν εννοούμε το κλασικό γινόμενο που ξέρουμε, αλλά το αποτέλεσμα της πράξης με την οποία είναι εφοδιασμένη η εκάστοτε ομάδα. Στην ουσία, ο σκοπός του ορισμού του ομομορφισμού είναι να κατασκευάσουμε μία συνάρτηση η οποία να διατηρεί την αλγεβρική δομή. Αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό με τον ισοδύναμο ορισμό για τον ομομορφισμό: Η απεικόνιση $\Phi: G \rightarrow G'$ ονομάζεται ομομορφισμός εάν για οποιαδήποτε στοιχεία X, Y και Z τα οποία ανήκουν στο G ισχύει ότι

$$\text{Αν } X * Y = Z \text{ τότε } \Phi(X) \times \Phi(Y) = \Phi(Z) \implies X' \times Y' = Z'.$$

Από τους παραπάνω ισοδύναμους ορισμούς για τον ομομορφισμό προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- i. Εάν I είναι το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας G , τότε θα είναι $I * X = X$ για κάθε $X \in G$. Οπότε θα ισχύει ότι

$$X' = (I * X)' = I' \times X',$$

για κάθε $X' \in G'$. Επομένως και το I' θα είναι το μοναδιαίο στοιχείο του G' . Με άλλα λόγια, η εικόνα του μοναδιαίου στοιχείου της ομάδας G αντιστοιχεί στο μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας G' .

- ii. Επιπλέον, ισχύει

$$I' = (X * X^{-1})' = X' \times (X^{-1})',$$

δηλαδή θα είναι $(X^{-1})' = (X')^{-1}$. Άρα, η εξίσωση αυτή μας λέει ότι η εικόνα του αντιστρόφου στοιχείου X είναι το ίδιο στοιχείο στην ομάδα G' με την αντίστροφη εικόνα του.

- iii. Εάν το στοιχείο X το οποίο ανήκει στην ομάδα G έχει τάξη m , δηλαδή ισχύει $X^m = I$, τότε

$$I' = (X^m)' = (X * X^{m-1})' = X' \times (X^{m-1})' = \dots = \underbrace{X' \times X' \dots X'}_{m \text{ φορές}}$$

Με άλλα λόγια, η εικόνα ενός στοιχείου έχει την ίδια τάξη με το ίδιο το στοιχείο.

Τώρα, εφόσον ορίσαμε τον ομομορφισμό και είδαμε τις βασικές του ιδιότητες, θα συνεχίσουμε ορίζοντας τον ισομορφισμό. Θεωρώντας ξανά δύο ομάδες $(G, *)$ και (G', \times) , θα λέμε ότι η μία είναι ισόμορφη της άλλης αν υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση (ή αλλιώς απεικόνιση) $\Phi: G \rightarrow G'$ έτσι ώστε για κάθε στοιχείο $X, Y \in G$ ισχύει

$$\Phi(X * Y) = \Phi(X) \times \Phi(Y) = X' \times Y',$$

όπου $X', Y' \in G'$. Για δύο ισόμορφες ομάδες θα γράφουμε $G \cong G'$.

Παρατηρείστε ότι οι ορισμοί για τον ομομορφισμό και τον ισομορφισμό φαίνονται πανομοιότυποι. Η ειδοποιός διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών είναι ότι στην περίπτωση του ισομορφισμού η συνάρτηση Φ η οποία απεικονίζει τα στοιχεία της ομάδας G σε εκείνα της G' θα πρέπει να είναι ένα-προς-ένα, δηλαδή αν $X = Y$ τότε $X' = Y'$. Στον ορισμό του ομομορφισμού, η απαίτηση αυτή δεν ήταν απαραίτητη και έτσι ένα στοιχείο της ομάδας G θα μπορούσε να έχει παραπάνω από μία εικόνες στην ομάδα G' , ή από την άλλη πλευρά, θα μπορούσε η εικόνα του να συμπίπτει με την εικόνα κάποιου άλλου στοιχείου. Επίσης, η απαίτηση που έχουμε στον ορισμό του ισομορφισμού να είναι η συνάρτηση Φ ένα-προς-ένα, μας υποδεικνύει ότι κάθε στοιχείο της ομάδας G' θα είναι η εικόνα ενός και μόνο ενός στοιχείου της ομάδας G . Από τα παραπάνω λοιπόν, μπορούμε να εξαγάγουμε το επιπλέον συμπέρασμα ότι οι ισόμορφες ομάδες περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, καθώς επίσης, και το εκάστοτε στοιχείο είναι ίδιας τάξης με την εικόνα του.

Υπάρχει και κάτι άλλο, εξίσου σημαντικό που πρέπει να παρατηρήσουμε από τον ορισμό του ισομορφισμού. Όπως είδαμε, αν δύο ομάδες είναι ισόμορφες τότε αυτό σημαίνει ότι έχουν την ίδια δομή, αν και μπορεί να διαφέρουν στη φύση των στοιχείων από τα οποία αποτελούνται καθώς και στην πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένες. Το γεγονός όμως ότι έχουν ίδια δομή σημαίνει ότι θα έχουν ίδιο πίνακα στοιχείων. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε κάποια τέτοια παραδείγματα, όπου ο χαρακτηριστικός πίνακας κάποιων ομάδων ήταν ίδιος. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο αυτές ομάδες είναι ισόμορφες. Σημειώνουμε επίσης ότι, αν οι ομάδες G και G' είναι ισόμορφες, και είναι επίσης ισόμορφες και οι ομάδες G και G'' , τότε συμπεραίνουμε ότι θα είναι ισόμορφες και οι ομάδες G' και G'' . Για λόγους πληρότητας σημειώνουμε επιπλέον ότι, αν η αρχική ομάδα G στην οποία εφαρμόζεται η συνάρτηση Φ είναι η ίδια με την τελική ομάδα G' στην οποία ανήκουν οι απεικονίσεις των στοιχείων, δηλαδή $G = G'$, τότε ο ισομορφισμός $G \rightarrow G'$ ονομάζεται αυτομορφισμός.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, θα εισάγουμε μία τελευταία έννοια, την έννοια του πυρήνα, ή αλλιώς kernel όπως είναι ευρύτερα γνωστός ο όρος. Επειδή ο όρος πυρήνας είναι αρκετά παραπλανητικός, θα χρησιμοποιούμε τον όρο kernel από εδώ και στο εξής. Έτσι λοιπόν, για ένα γενικό ομομορφισμό, το σύνολο των στοιχείων της ομάδας G των οποίων η εικόνα στην ομάδα G' είναι το μοναδιαίο στοιχείο I' ονομάζεται kernel του ομομορφισμού. Προφανώς, για έναν ισομορφισμό το kernel αποτελείται μόνο από το μοναδιαίο στοιχείο.

Παράδειγμα 6: Θεωρείστε μία απεικόνιση Φ μεταξύ της ομάδας των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} εφοδιασμένη με την πράξη της πρόσθεσης και της ομάδας των μιγαδικών αριθμών με μέτρο μονάδα (δηλαδή $z = |z|e^{i\varphi}$ με $|z| = 1$), η οποία συμβολίζεται ως $U(1)$, εφοδιασμένη με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Αν η δράση της απεικόνισης Φ είναι $\Phi: x \rightarrow e^{ix}$, τότε η συνάρτηση αυτή ορίζει έναν ομομορφισμό μιας και

$$\Phi(x + y) = (x + y)' = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = x'y'.$$

Προσέξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση δεν ορίζει έναν ισομορφισμό διότι παραπάνω από ένα στοιχεία (άπειρα στη συγκεκριμένη περίπτωση) μπορούν να έχουν την ίδια εικόνα στην ομάδα $U(1)$. Για παράδειγμα όλοι οι αριθμοί $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2n + 1)\pi$ που ανήκουν στο \mathbb{R} , έχουν εικόνα -1 στην ομάδα $U(1)$, ενώ αντίστοιχα όλοι οι αριθμοί $0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$ έχουν εικόνα $+1$ στην ομάδα $U(1)$. Συγκεκριμένα το σύνολο των αριθμών $0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$ αποτελούν το kernel του ομομορφισμού, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω.

1.4 Υποομάδες και τα Θεωρήματα Lagrange και Cayley

Στις παραπάνω ενότητες είδαμε πόσο χρήσιμο είναι να κατασκευάσουμε το χαρακτηριστικό πίνακα της εκάστοτε ομάδας. Θυμίζουμε ότι ο πίνακας αυτός περιέχει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των στοιχείων μεταξύ τους. Εάν ο πίνακας δύο ομάδων είναι πανομοιότυπος τότε οι δύο ομάδες είναι ισόμορφες μεταξύ τους, όπως αναφέραμε και παραπάνω.

Στη συνέχεια, ξαναγράψουμε τον Πίνακα 1.3, ο οποίος είναι ο χαρακτηριστικός πίνακας της ομάδας D_3 . Όπως είχαμε παρατηρήσει και στην Ενότητα 1.2, αν και ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός, μιας και η ομάδα D_3 είναι μη-Αβελιανή, παρατηρήσαμε ότι παρουσιάζεται συμμετρία σε κάποια μπλοκ 3×3 του πίνακα αυτού, τα οποία σημειώνονται στον Πίνακα 1.4. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί κατ' ευθείαν στην έννοια της υποομάδας. Επομένως, μία υποομάδα μιας ομάδας G , ορίζεται ένα μη-κενό υποσύνολο $H = \{h_i\}$ του G , του οποίου τα στοιχεία συμπεριφέρονται ως μία ομάδα η οποία είναι εφοδιασμένη με την ίδια πράξη που είναι εφοδιασμένη και η ομάδα G . Από τον ορισμό αυτό της υποομάδας, συμπεραίνουμε ότι κάθε ομάδα G περιέχει δύο τετριμμένες υποομάδες (trivial subgroups): i) την ίδια ομάδα G και ii) το σύνολο \mathcal{I} το οποίο περιέχει μόνο το μοναδιαίο στοιχείο I . Όλες οι άλλες υποομάδες που μπορεί να περιέχει μία ομάδα G ονομάζονται 'κατάλληλες' υποομάδες (proper subgroups). Στην περίπτωση της ομάδας D_3 μία 'κατάλληλη' υποομάδα είναι η $\{e, c, d\}$. Υπάρχουν ομάδες οι οποίες δεν έχουν καμία 'κατάλληλη' υποομάδα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η κυκλική ομάδα C_n , η οποία έχει μόνο τις τετριμμένες υποομάδες. Αυτό συμβαίνει διότι στην κυκλική ομάδα κάθε στοιχείο της ομάδας αυτής εκτός του μοναδιαίου, έχει τάξη ίδια με αυτό της ομάδας, με αποτέλεσμα κανένας συνδυασμός στοιχείων να μην μπορεί να σχηματίσει υποομάδα με τάξη μικρότερη της αρχικής. Η παρατήρηση αυτή θα μας οδηγήσει στο Θεώρημα Lagrange που θα δώσουμε παρακάτω. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι οι ομάδες C_n και D_n μπορούν να θεωρηθούν υποομάδες της S_n (επιβεβαιώστε το για τις C_3, D_3 και S_3 μιας και για τις τρεις αυτές ομάδες έχουμε ήδη φτιάξει το χαρακτηριστικό τους πίνακα).

Στη συνέχεια, δίνουμε κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες των υποομάδων. Έχουμε λοιπόν ότι αν G είναι μία ομάδα τότε:

- Το μοναδιαίο στοιχείο της G θα ανήκει σε κάθε υποομάδα H .
- Αν ένα στοιχείο X ανήκει στην υποομάδα H , τότε στην υποομάδα αυτή θα ανήκει και το στοιχείο X^{-1} .

- Το σύνολο των στοιχείων της G τα οποία ανήκουν σε κάθε υποομάδα της G , δημιουργούν τα ίδια μία υποομάδα της G (το πιο απλό παράδειγμα τέτοιου συνόλου είναι το \mathcal{I} το οποίο περιέχει μόνο το μοναδιαίο στοιχείο I).

$g_1 \backslash g_2$	e	c	d	b_1	b_2	b_3
e	e	c	d	b_1	b_2	b_3
c	c	d	e	b_3	b_1	b_2
d	d	e	c	b_2	b_3	b_1
b_1	b_1	b_2	b_3	e	c	d
b_2	b_2	b_3	b_1	d	e	c
b_3	b_3	b_1	b_2	c	d	e

Πίνακας 1.4

Έστω τώρα δύο ομάδες G και G' και ένας ομομορφισμός μεταξύ αυτών $\Phi: G \rightarrow G'$. Τότε θα είναι:

- Το σύνολο των στοιχείων H' της ομάδας G' , τα οποία είναι εικόνες των στοιχείων της ομάδας G , αποτελούν υποομάδα του G' .
- Το σύνολο των στοιχείων K της G των οποίων η εικόνα είναι το μοναδιαίο στοιχείο I' στη G' , αποτελούν υποομάδα του G . Στην ουσία, το σύνολο K είναι το kernel του ομομορφισμού, όπως το ορίσαμε παραπάνω.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, αλλά και γενικά το κεφάλαιο, παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τα θεωρήματα του Lagrange και του Cayley.

Θεώρημα Lagrange: Εάν G είναι μία πεπερασμένη ομάδα τάξης g και H είναι μία υποομάδα του G , η οποία έχει τάξη h , τότε το g είναι πολλαπλάσιο του h .

Θεώρημα Cayley: Κάθε πεπερασμένη ομάδα τάξης n μπορεί να θεωρηθεί υποομάδα της S_n .

Θυμηθείτε για παράδειγμα το γεγονός ότι οι ομάδες C_n και D_n μπορούν να θεωρηθούν υποομάδες της S_n . Θυμίζουμε επίσης ότι η ομάδα D_3 έχει $2 \cdot 3 = 6$ στοιχεία και αντίστοιχα η ομάδα S_3 έχει επίσης $3! = 6$ στοιχεία, οπότε αυτές οι δύο ομάδες είναι ισόμορφες μεταξύ τους, $D_3 \cong S_3$. Το θεώρημα του Cayley προέρχεται από την παρατήρηση ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας πεπερασμένης ομάδας G με ένα τυχαίο στοιχείο της ομάδας g , τότε αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα απλά να μεταθέσει τα στοιχεία της ομάδας μεταξύ τους, δηλαδή

$$\{g\alpha_1, g\alpha_2, \dots, g\alpha_n\} = \{\alpha_{\pi_1}, \alpha_{\pi_2}, \dots, \alpha_{\pi_n}\}.$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι κάθε στοιχείο α_i της ομάδας G αντιστοιχεί σε μία μετάθεση $\Pi(g)$ της ομάδας S_n ,

$$g \rightarrow \Pi(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η εκάστοτε μετάθεση μπορεί να γίνει μόνο από το εκάστοτε στοιχείο g , δηλαδή υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία στη διαδικασία αυτή, $g \leftrightarrow \Pi(g)$.

Ενότητα 2

2.1 Ορισμός τις αναπαραστάσεως

Όπως είπαμε και στην προηγούμενη ενότητα, η μελέτη των συμμετριών στη φυσική είναι πολύ σημαντική, μιας και από τη μελέτη τους μπορούμε να εξαγάγουμε χρήσιμες πληροφορίες για το σύστημά μας. Έτσι, μέσω της μελέτης των συμμετριών του προβλήματος μπορούμε να συσχετίσουμε δύο εντελώς διαφορετικά συστήματα, τα οποία με μία πρώτη ματιά δεν έχουν τίποτα κοινό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συμμετρία που προκύπτει από ένα κεντρικό δυναμικό της μορφής $V \sim 1/r$, και έτσι μπορούμε να βρούμε ομοιότητες για σώμα το οποίο βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας με ένα ηλεκτρόνιο το οποίο βρίσκεται μέσα σε δυναμικό που προκαλείται από φορτίο Q .

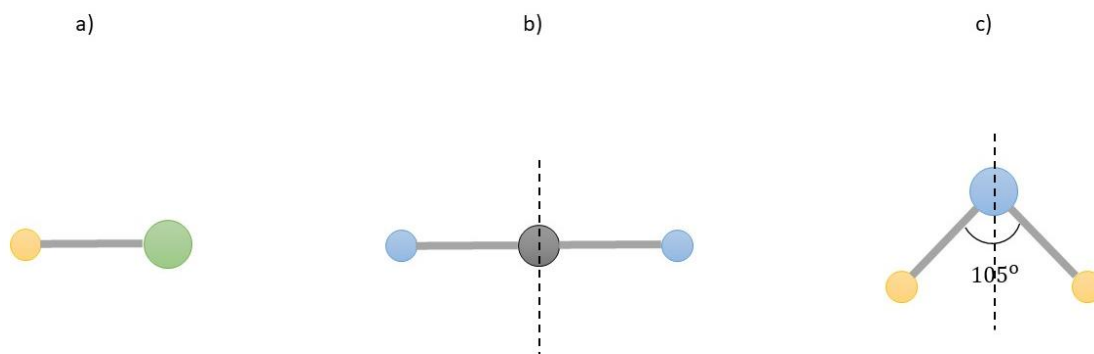
Στην προηγούμενη ενότητα λοιπόν, είδαμε κάποια βασικά παραδείγματα πεπερασμένων ομάδων. Τα στοιχεία της εκάστοτε ομάδας αναπαριστάνονταν, τις περισσότερες φορές, από ένα γράμμα ή από κάποιον αριθμό. Σε αναλογία με την περίπτωση που αναπαριστάνουμε με κάποιον πίνακα στήλης τα διανύσματα του Καρτεσιανού χώρου, όταν π.χ. δουλεύουμε με διανύσματα, έτσι και εδώ θα αναπαριστάνουμε τα στοιχεία μιας τυχαίας ομάδας με κάποιους κατάλληλους πίνακες. Οι πίνακες αυτοί θα υπακούουν κάθε φορά στην πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένη η ομάδα, ότι ακριβώς γίνεται δηλαδή και με τα Καρτεσιανά διανύσματα.

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας με ένα παράδειγμα το οποίο θα μας υποδείξει πώς μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για ένα σύστημα χρησιμοποιώντας μόνο επιχειρήματα για τη συμμετρία του, και ύστερα, θα συνεχίσουμε με τον ορισμό της αναπαράστασης.

Παράδειγμα Ζ: Δείτε λοιπόν, για παράδειγμα, το Σχήμα 2.1. Στο σχήμα αυτό απεικονίζουμε τα μόρια του υδροχλωρίου (HCl), του διοξειδίου του άνθρακα (CO_2) καθώς και του νερού (H_2O) και αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εξετάσουμε τη διπολική ροπή των μορίων αυτών. Ξεκινώντας από το μόριο του υδροχλωρίου, Σχήμα 2.1(a), βλέπουμε ότι είναι ένα γραμμικό μόριο, μιας και αποτελείται από δύο μόνο άτομα. Γνωρίζοντας ότι το χλώριο είναι πιο ηλεκτραρνητικό από το υδρογόνο ($Cl: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ και θέλει να συμπληρώσει την υποστοιβάδα $3p$), αυτό σημαίνει ότι θα μετατοπίσει το ηλεκτρόνιο του υδρογόνου προς το μέρος του με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μία διπολική ροπή με κατεύθυνση από το άτομο του χλωρίου προς αυτό του υδρογόνου (από τα αρνητικά στα θετικά). Αυτό σημαίνει ότι όπως και να περιστρέψουμε το μόριο του υδροχλωρίου ποτέ δε θα πάρουμε ξανά το αρχικό μόριο με τη συγκεκριμένη διεύθυνση τις διπολικής ροπής, παρά μόνο αν το στρέψουμε κατά γωνία 2π γύρω από άξονα κάθετο στον άξονα της διπολικής του ροπής (που είναι και ο άξονας του μορίου όπως φαίνεται και στο σχήμα).

Κάτι τέτοιο δε συμβαίνει για το μόριο του διοξειδίου του άνθρακα, στο Σχήμα 2.1(b). Γνωρίζοντας ότι το άτομο του οξυγόνου είναι πιο ηλεκτραρνητικό από του άνθρακα, αυτό

σημαίνει ότι θα δημιουργηθούν δύο διπολικές ροπές, αντίρροπη η μία προς την άλλη, με κατεύθυνση από το άτομο του άνθρακα προς το αντίστοιχο του οξυγόνου. Επειδή όμως το μόριο του διοξειδίου του άνθρακα είναι γραμμικό αυτό σημαίνει ότι η συνολική διπολική ροπή του μορίου θα είναι μηδέν. Το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να το εξαγάγουμε χρησιμοποιώντας μόνο επιχειρήματα για τη συμμετρία του μορίου. Έτσι λοιπόν, από τη στιγμή που μπορούμε να περιστρέψουμε το μόριο του διοξειδίου κατά γωνία $n\pi$ ($n = 1,2,3, \dots$) γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του μορίου και είναι κάθετος στον άξονα του μορίου, αυτό σημαίνει ότι το μόριο πρέπει να μένει ακριβώς το ίδιο με το αρχικό και καμία φυσική του ιδιότητα δε θα πρέπει να μεταβάλλεται. Αυτό σημαίνει με τη σειρά του ότι, δε θα υπάρχει συνιστώσα τις διπολικής ροπής παράλληλη στον άξονα του μορίου, μιας και αν υπήρχε θα έπρεπε να αλλάζει πρόσημο κατά τη στροφή $n\pi$ του μορίου. Επιπλέον, λόγω της γραμμικότητας του μορίου, η διπολική ροπή δεν μπορεί να έχει καμία άλλη συνιστώσα εκτός του επιπέδου που μόλις ορίσαμε, και έτσι καταλήγουμε στο ότι η συνολική διπολική ροπή του μορίου είναι μηδέν.



Σχήμα 2.1: a) Το μόριο του HCl , b) το μόριο του CO_2 και c) το μόριο του H_2O . Για κάθε μόριο έχουμε και διαφορετική συμμετρία, όσο αναφορά τη διπολική τους ροπή.

Τώρα, όσο αναφορά το μόριο του νερού, βλέπουμε ότι αν και αυτό αποτελείται από τρία άτομα όπως και αυτό του διοξειδίου του άνθρακα, παρατηρούμε ότι δεν είναι γραμμικό μόριο μιας και σχηματίζεται μία γωνία περίπου 105° μεταξύ των δύο υδρογόνων [Σχήμα 2.1(c)]. Χρησιμοποιώντας και πάλι μόνο επιχειρήματα από τη συμμετρία του μορίου, βλέπουμε ότι το μόριο του νερού θα μείνει ανεπηρέαστο κατά στροφή $n\pi$ ($n = 1,2,3, \dots$) γύρω από τον άξονα που έχουμε σχεδιάσει [σκεφτείτε ότι μπορούμε να γυρίσουμε το μόριο του νερού σαν 'σβούρα' γύρω από τον άξονα που φαίνεται στο Σχήμα 2.1(c)]. Επομένως, επιτρέπεται να έχει μη μηδενική συνιστώσα μόνο κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, αφού δεν υπάρχει κάποια επιπλέον συμμετρία που να απαγορεύει το γεγονός αυτό.

Από τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα. Παρατηρήσαμε ότι όσο πιο συμμετρικό το μόριό μας, τόσο περισσότεροι περιορισμοί υπάρχουν όσο αναφορά τις συνιστώσες τις διπολικής ροπής. Έτσι λοιπόν, για το μόριο του διοξειδίου του

άνθρακα, το οποίο έχει άξονα συμμετρίας ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του μορίου [Σχήμα 2.1(b)], απαγορεύεται να έχει μη-μηδενική συνιστώσα της διπολικής ροπής κάθετη στον άξονα αυτό, κάτι που δεν ισχύει για το μόριο του υδροχλωρίου [Σχήμα 2.1(a)]. Το γεγονός ότι όσο πιο πολλές συμμετρίες έχει το σύστημά μας, τόσο περισσότερους περιορισμούς έχουμε σε αυτό, είναι ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα πάνω στο οποίο στηρίζεται ένα πολύ γνωστό θεώρημα της κβαντικής θεωρίας πεδίου, το θεώρημα Noether. Ως ένα γενικό λοιπόν συμπέρασμα, μπορούμε να πούμε ότι:

Εάν σε ένα φυσικό σύστημα ύστερα από την εφαρμογή συγκεκριμένων περιστροφών (rotations) ή ανακλάσεων (reflections), ή συνδυασμό αυτών, το σύστημα παραμένει ίδιο με το αρχικό τότε αυτό σημαίνει ότι και οι συναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν κάποια χαρακτηριστικά του συστήματος αυτού θα παραμείνουν επίσης αναλλοίωτες. Υπό τους συγκεκριμένους χειρισμούς λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι το σύστημά μας έχει την ιδιότητα του αναλλοίωτου.

Όπως είπαμε λοιπόν και παραπάνω, τα στοιχεία μιας πεπερασμένης ομάδας μπορούν να αναπαρασταθούν με κάποιους κατάλληλους πίνακες. Θεωρείστε λοιπόν γενικά, τα διανύσματα

βάσης του n -διάστατου χώρου, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, όπου τα στοιχεία u_i μπορεί να είναι απλά αριθμοί,

συνιστώσες, συναρτήσεις ή οποιαδήποτε άλλη 'οντότητα'. Αφού επιλέξαμε μία βάση διανυσμάτων για τον n -διάστατο χώρο μας, μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε έτσι ώστε να δημιουργήσουμε μία n -διάστατη αναπαράσταση μιας ομάδας στο χώρο αυτό ως εξής. Θεωρείστε λοιπόν, ένα στοιχείο X της ομάδας μας το οποίο μπορεί να μετασχηματίσει κάθε u_i με τον εξής τρόπο

$$u'_i = Xu_i, \quad (2.1)$$

δηλαδή οδηγεί στη δημιουργία ενός νέου διανύσματος $u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$. Έχοντας ορίσει τα

διανύσματα u και u' και με αφορμή την Εξ (2.1), μπορούμε να γράψουμε έναν $n \times n$ πίνακα, $M(X)$, έτσι ώστε

$$u' = M(X)u. \quad (2.2)$$

Η παραπάνω διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, καθορίζει ότι ο πίνακας $M(X)$ αντιπροσωπεύει το στοιχείο X της ομάδας μας στη n -διάστατη αναπαράσταση με βάση το διάνυσμα u . Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή για κάθε στοιχείο X της ομάδας, καταλήγουμε σε ένα σύνολο $n \times n$ πινάκων $M = \{M(X)\}$, το οποίο θα λέμε ότι αποτελεί μία n -διάστατη αναπαράσταση μιας ομάδας G με βάση τα διανύσματα u . Με έναν πιο αυστηρό τρόπο, ορίζουμε ως αναπαράσταση διάστασης n μιας ομάδας G τον ομομορφισμό $M: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, δηλαδή την ομάδα $n \times n$ πινάκων με μιγαδικά στοιχεία και ορίζουσα διάφορη του μηδενός. Η ομάδα $GL(n)$ είναι γνωστή ως general linear group (από όπου προέρχονται και τα αρχικά της

ομάδας) και περιέχει όλους τους τετράγωνους $n \times n$ πίνακες με μη-μηδενική ορίζουσα. Σημειώνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων σέβεται την ιδιότητα σύνθεσης των στοιχείων της ομάδας, μιας και για όλα τα στοιχεία $X, Y \in G$ ισχύει ότι

$$M(XY) = M(X)M(Y). \quad (2.3)$$

Επομένως για το κάθε στοιχείο του ομομορφισμού $M(X)$ θα υπάρχει και το αντίστροφο στοιχείο, δηλαδή

$$M(X^{-1}) = M(X)^{-1}, \quad (2.4)$$

Το οποίο προκύπτει από την απαίτηση οι εκάστοτε πίνακες $M(X)$ να έχουν μη-μηδενική ορίζουσα. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι θα υπάρχει πάντα αντίστροφο στοιχείο.

Παράδειγμα 8: Θεωρήστε την Αβελιανή ομάδα η οποία αποτελείται από το σύνολο $\{1, i, -1, -i\} = \{A, B, C, D\}$ εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Επίσης, για την ομάδα αυτή θεωρήστε ως διάνυσμα βάσης το $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Για να βρούμε την αναπαράσταση $M(X)$, δουλεύουμε ως εξής: Εφαρμόζουμε κάθε στοιχείο της ομάδας που θέλουμε να βρούμε την αναπαράσταση πάνω στο διάνυσμα βάσης, όπως κάνουμε στην Εξ. (2.1). Έτσι λοιπόν, για το στοιχείο $A = 1$, θα έχουμε ότι

$$u'_1 = Au_1 = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$u'_2 = Au_2 = 1 \cdot i = i.$$

Επομένως, τώρα θέλουμε να βρούμε τον πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι

$$u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = M(A) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = M(A) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, ο πίνακας $M(A) = M(1)$ που ψάχνουμε θα είναι ένας πίνακας 2×2 ο οποίος θα αφήνει αμετάβλητο το διάνυσμα βάσης. Προφανώς, ο πίνακας αυτός είναι ο μοναδιαίος πίνακας, δηλαδή

$$M(A) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για τα στοιχεία $B = i, C = -1$ και $D = -i$, θα έχουμε ότι

$$u'_1 = Bu_1 = i \cdot 1 = i,$$

$$u'_2 = Bu_2 = i \cdot i = -1,$$

$$u'_1 = Cu_1 = -1 \cdot 1 = -1,$$

$$u'_2 = Cu_2 = -1 \cdot i = -i,$$

$$u'_1 = Du_1 = -i \cdot 1 = -i,$$

$$u'_2 = Du_2 = -i \cdot i = 1,$$

και έτσι οι αντίστοιχοι πίνακες θα δίνονται από τις εξισώσεις

$$M(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M(-i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για περαιτέρω εξοικείωση με τους πίνακες αλλά και με την έννοια της αναπαράστασης, ελέγξτε ότι ο πολλαπλασιασμός των πινάκων δίνει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων μεταξύ τους, δηλαδή $AB = M(A)M(B) = M(AB)$ κτλ.

Άσκηση 5: Θεωρείστε την ομάδα S_3 , η οποία περιγράφει τις μεταθέσεις τριών αντικειμένων, όπως αυτή δίνεται στην Άσκηση 4. Θεωρείστε τώρα ως διανύσματα βάσης τα $u_1 = \{L \ M \ N\}$, $u_2 = \{M \ N \ L\}$, $u_3 = \{N \ L \ M\}$, $u_4 = \{L \ N \ M\}$, $u_5 = \{M \ L \ N\}$ καθώς και $u_6 = \{N \ M \ L\}$. Δημιουργείστε μία 6-διάσταση αναπαράσταση $F = \{F(X)\}$ της ομάδας αυτής και επιβεβαιώστε ότι τα στοιχεία της αναπαράστασης δίνουν το χαρακτηριστικό πίνακα της ομάδας, όπως αυτός βρέθηκε στην Άσκηση 4 (δείτε επίσης τον Πίνακα 1.3).

Σαν παράδειγμα θα βρούμε την αναπαράσταση που προκύπτει από το μοναδιαίο στοιχείο καθώς και από το στοιχείο A της ομάδας S_3 . Κατ' αρχήν ξεκινώντας από την Εξ. (2.1) βλέπουμε ότι το μοναδιαίο στοιχείο I της ομάδας αφήνει ανεπηρέαστα όλα τα διανύσματα βάσης, δηλαδή ισχύει ότι $u'_i = u_i$. Επομένως, ο πίνακας αναπαράστασης του μοναδιαίου στοιχείου I είναι ο 6×6 μοναδιαίος πίνακας I_6 , δηλαδή $F(I) = I_6$. Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για το στοιχείο A ώστε να βρούμε τον αντίστοιχο πίνακα $F(A)$, και από την Εξ. (2.1) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} u'_1 &= Au_1 = (1 \ 2 \ 3)(L \ M \ N) = (M \ N \ L) = u_2, \\ u'_2 &= Au_2 = (1 \ 2 \ 3)(M \ N \ L) = (N \ L \ M) = u_3, \\ &\vdots \\ u'_6 &= Au_6 = (1 \ 2 \ 3)(N \ M \ L) = (M \ L \ N) = u_5. \end{aligned}$$

Επομένως, μαζεύοντας τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να γράψουμε σε μορφή πίνακα

$$u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \equiv M(A)u.$$

Στη συνέχεια, θα θέλαμε να σημειώσουμε κάποιες παρατηρήσεις. Όπως είπαμε και προηγουμένως, ως αναπαράσταση ορίζεται ο ομομορφισμός $M: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, ο οποίος

αντιστοιχεί τα στοιχεία μιας ομάδας G σε τετράγωνους $n \times n$ πίνακες με μη-μηδενική ορίζουσα. Το μοναδιαίο στοιχείο της νέας ομάδας είναι το $M(I) = I_n$, δηλαδή ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας, ενώ για δύο στοιχεία X και Y που ανήκουν στην ομάδα G , ισχύει ότι $M(X)M(Y) = M(XY)$. Δε θα πρέπει να συγχέουμε εδώ, τη διάσταση n των πινάκων με την τάξη g της ομάδας G , αν και οι δύο αυτοί αριθμοί μπορεί να συμπίπτουν. Επιπλέον, αν κάθε στοιχείο της ομάδας G αναπαριστάνεται με διαφορετικό πίνακα στην ομάδα $GL(n, \mathbb{C})$ τότε ο ομομορφισμός γίνεται ισομορφισμός και η αναπαράσταση ονομάζεται 'πιστή αναπαράσταση' (faithful representation).

Από εδώ και στο εξής, θα ασχοληθούμε κυρίως με αναπαραστάσεις πεπερασμένων ομάδων οι οποίες περιγράφουν ανακλάσεις και περιστροφές στο χώρο. Οι ομάδες αυτές, δηλαδή οι ομάδες ανακλάσεων (reflection groups) και περιστροφών (reflection groups), αναφέρονται ως crystal point groups στη διεθνή βιβλιογραφία. Θυμηθείτε λοιπόν τις ομάδες αυτές όπως τις ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα και σημειώστε μία πολύ χρήσιμη παρατήρηση για τη συνέχεια. Δείτε για παράδειγμα την ομάδα C_3 : η ομάδα αυτή περιγράφει τη στροφή ενός ισοσκελούς τριγώνου κατά γωνία $2\pi/3$ στο επίπεδο $x - y$, δηλαδή γύρω από άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του τριγώνου. Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε ως διάνυσμα βάσης ένα διάνυσμα $\vec{r} = (x, y, z)$ του τρισδιάστατου χώρου αυτό σημαίνει ότι η ομάδα C_3 θα επηρεάζει μόνο τις συνιστώσες x και y του διανύσματος, αφήνοντας τη συνιστώσα z αμετάβλητη. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε (ή αλλιώς να κάνουμε 'αναγωγή') τις συνιστώσες σε δύο μικρότερα σύνολα: το ένα σύνολο θα αποτελείται μόνο από τη συνιστώσα z , η οποία μένει αμετάβλητη κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό επιβάλλει η ομάδα C_3 , ενώ το άλλο σύνολο θα αποτελείται από τις συνιστώσες x και y , οι οποίες μεταβάλλονται ως σύνολο με συγκεκριμένους γραμμικούς συνδυασμούς.

Κλείνοντας τώρα την παράγραφο αυτή, θα δώσουμε τον ορισμό της ισοδύναμης αναπαράστασης (equivalent representation). Θεωρήστε λοιπόν, ότι M είναι μία n -διάστατη αναπαράσταση της ομάδας G , και Q ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας [$\det(Q) \neq 0$] με σταθερούς συντελεστές. Το σύνολο των πινάκων οι οποίοι ορίζονται από τη σχέση

$$M_Q(X) = Q^{-1}M(X)Q \quad (2.5)$$

αποτελούν και αυτοί μία αναπαράσταση M_Q της ομάδας G , η οποία λέμε ότι είναι ισοδύναμη με την αναπαράσταση M . Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι το σύνολο M_Q όντως αποτελεί μία αναπαράσταση της ομάδας G μιας και ισχύει ότι,

- i. $M_Q(I) = Q^{-1}M(I)Q = Q^{-1}I_nQ = I_n$,
- ii. $M_Q(X)M_Q(Y) = Q^{-1}M(X)Q Q^{-1}M(Y)Q = Q^{-1}M(X)M(Y)Q = M_Q(XY)$.

Ουσιαστικά, ο γενικός αντιστρέψιμος πίνακας Q ο οποίος εμφανίζεται στον ορισμό της ισοδύναμης αναπαράστασης που δώσαμε στην Εξ. (2.5), μπορεί να προκύψει από κάποια

αλλαγή της βάσης διανυσμάτων u που χρησιμοποιούμε. Στην περίπτωση όπου δύο αναπαραστάσεις δεν είναι ισοδύναμες τότε θα λέμε ότι είναι διακεκριμένες.

Παράδειγμα 8: Θεωρείστε και πάλι την Αβελιανή ομάδα του Παραδείγματος 7. Στη θέση του διανύσματος βάσης που χρησιμοποιήσαμε στο Παράδειγμα 7, δηλαδή του $u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, θεωρείστε ένα νέο διάνυσμα βάσης $u_Q = \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i-5 \end{pmatrix}$. Το ερώτημα τώρα είναι, πώς μετασχηματίζεται η αναπαράσταση M στην περίπτωση αυτή. Πρώτα απ' όλα, θα πρέπει να βρούμε τον πίνακα Q , ο οποίος στην ουσία μετασχηματίζει την αναπαράσταση M σε μια νέα αναπαράσταση M_Q . Ο πίνακας αυτός, προφανώς μας δείχνει και πώς μετασχηματίζεται το διάνυσμα βάσης. Επομένως, για τον πίνακα Q , ο οποίος είναι ένας 2×2 πίνακας, γράφουμε

$$\begin{pmatrix} 3-i \\ 2i-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

όπου τα στοιχεία q_i είναι πραγματικοί αριθμοί. Από την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να βρούμε τον πίνακα Q , καθώς και τον αντίστροφό του. Οι πίνακες αυτοί γράφονται

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Εφόσον προσδιορίσαμε τον πίνακα Q καθώς και τον αντίστροφό του, μπορούμε να βρούμε πώς μετασχηματίζεται κάθε στοιχείο της αναπαράστασης M , ή με άλλα λόγια, πώς μετασχηματίζονται οι πίνακες $M(1), M(i), M(-1)$ και $M(-i)$. Συμβολίζοντας με $M_Q(X)$ τους μετασχηματισμένους πίνακες, παίρνουμε ότι

$$M_Q(1) = QM(1)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_Q(i) = QM(i)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ -29 & -17 \end{pmatrix},$$

$$M_Q(-1) = QM(-1)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_Q(-i) = QM(-i)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -10 \\ -29 & 17 \end{pmatrix}.$$

2.2 Αναγώγιμες (reducible) και ανάγωγες (irreducible) αναπαραστάσεις, και χαρακτήρας των αναπαραστάσεων

Όπως είδαμε παραπάνω, για μία ομάδα G μπορούμε να έχουμε παραπάνω από μία αναπαραστάσεις (όπως είδαμε στα Παραδείγματα 7 και 8). Άρα, γενικά, για μία ομάδα G μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει τις αναπαραστάσεις $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(N)}$ οι οποίες εν γένει μπορεί να έχουν και διαφορετικές διαστάσεις. Έτσι λοιπόν, για ένα στοιχείο X της ομάδας G το οποίο θα έχει τις αναπαραστάσεις $M^{(1)}(X), M^{(2)}(X), \dots, M^{(N)}(X)$, μπορούμε να τις συνδυάσουμε όλες μαζί έτσι ώστε να δημιουργήσουμε τον πίνακα

$$M(X) = \begin{pmatrix} M^{(1)}(X) & & & 0 \\ & M^{(2)}(X) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M^{(N)}(X) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Ουσιαστικά, ο παραπάνω πίνακας δημιουργήθηκε τοποθετώντας όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις του στοιχείου X κατά μήκος της κύριας διαγωνίου του. Προφανώς, τα στοιχεία $M^{(i)}(X)$ δεν είναι αριθμοί, αλλά πίνακες, και για αυτό ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται block-diagonal matrix. Επιπλέον, τα μηδενικά που εμφανίζονται στα δύο άκρα του πίνακα δεν είναι αριθμοί, αλλά μηδενικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων έτσι ώστε ο $M(X)$ να αποτελεί έναν τετράγωνο πίνακα. Έτσι λοιπόν, $M = \{M(X)\}$ είναι ο πίνακας αναπαράστασης της ομάδας ο οποίος προέκυψε από το συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης των $M^{(1)}(X), M^{(2)}(X), \dots, M^{(N)}(X)$, με αποτέλεσμα να προκύψει ένα μεγαλύτερο διάνυσμα βάσης. Ο πίνακας της Εξ. (2.6) ορίζει την αναγώγιμη αναπαράσταση (reducible representation). Σημειώνουμε ότι ο πίνακας αυτός μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια του ευθέως αθροίσματος (direct sum) ως

$$M(X) = M^{(1)}(X) \oplus M^{(2)}(X) \oplus \dots \oplus M^{(N)}(X).$$

Σημειώνουμε εδώ ότι, το ευθύ άθροισμα για δύο πίνακες A και B διαστάσεων $m \times n$ και $p \times q$ αντίστοιχα, θα είναι ο πίνακας $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, ο οποίος θα έχει διαστάσεις $(m + p) \times (n + q)$. Γενικά, υπάρχει περίπτωση μερικοί (ή όλοι) από τους πίνακες $M^{(i)}(X)$ που έχουμε παραπάνω να μπορούν να αναχθούν περαιτέρω, δηλαδή, με άλλα λόγια, ο εκάστοτε πίνακας $M^{(i)}(X)$ να γραφεί σε block-diagonal μορφή. Θυμηθείτε για παράδειγμα την ομάδα C_3 την οποία αναλύσαμε στην Ενότητα 1, αλλά επίσης αναφέραμε στην Υποενότητα 2.1. Η ομάδα αυτή μπορεί να περιγραφεί από μία αναπαράσταση η οποία να περιέχει πίνακες 3×3 . Παρ' όλα αυτά, όπως είδαμε στην Υποενότητα 2.1, επειδή η ομάδα αυτή περιγράφει στροφές στο επίπεδο $x - y$ αυτό σημαίνει ότι τον πίνακα 3×3 μπορούμε να τον γράψουμε σαν το ευθύ άθροισμα ενός πίνακα 2×2 , ο οποίος αφορά τις συνισταμένες x και y , και έναν πίνακα 1×1 , ο οποίος αφορά τη συνισταμένη z η οποία μένει αμετάβλητη. Αν τη διαδικασία αυτή την πραγματοποιήσουμε για όλους τους πίνακες $M^{(i)}(X)$ της Εξ. (2.6), τότε οι πίνακες οι οποίοι θα βρίσκονται κατά μήκος της κύριας διαγωνίου του πίνακα $M(X)$ δε θα μπορούν να αναχθούν σε απλούστερους. Με τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, βρίσκουμε την ανάγωγη αναπαράσταση (irreducible representation). Οι πίνακες, ή αλλιώς τα blocks, κατά μήκος της διαγωνίου ονομάζονται ανάγωγες αναπαραστάσεις (irreducible representations) της ομάδας G , και για συντομία αναφέρονται ως irrep, ενώ συμβολίζονται ως $\widehat{M}^{(i)}(X)$. Οποιαδήποτε αναπαράσταση λοιπόν, μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός από ανάγωγες αναπαραστάσεις (από εδώ και στο εξής τις ανάγωγες αναπαραστάσεις θα τις αναφέρουμε ως irrep, όπως στη διεθνή βιβλιογραφία). Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω, βλέπουμε ότι οποιαδήποτε αναπαράσταση $M(X)$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει των irrep $\widehat{M}^{(i)}(X)$ ως

$$M(X) = m_1 \widehat{M}^{(1)}(X) \oplus m_2 \widehat{M}^{(2)}(X) \oplus \dots \oplus m_N \widehat{M}^{(N)}(X),$$

όπου ο κάθε irrep $\widehat{M}^{(i)}(X)$ μπορεί να εμφανιστεί πάνω από μία φορά στο παραπάνω άθροισμα. Επιπλέον, το άθροισμα των διαστάσεων των εκάστοτε irrep θα πρέπει να ισούται με τη διάσταση της αναπαράστασης $M(X)$.

Σημειώνουμε επίσης γενικά ότι, οι αναπαραστάσεις $M^{(i)}(X)$ στην Εξ. (2.6) αποτελούνται από μη-μοναδιαίους πίνακες, δηλαδή από πίνακες με ορίζουσα διάφορη της μονάδας. Παρ' όλα αυτά, μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε αναπαράσταση $M^{(i)}(X)$ μιας πεπερασμένης ομάδας G , υπάρχει μία ισοδύναμη αναπαράσταση $\Gamma^{(i)}(X)$ η οποία αποτελείται από μοναδιαίους πίνακες, δηλαδή από πίνακες με ορίζουσα μονάδα, και η οποία ονομάζεται μοναδιαία αναπαράσταση. Η ισοδύναμη αναπαράσταση $\Gamma^{(i)}(X)$ έχει προκύψει με τη βοήθεια ενός αντιστρέψιμου πίνακα Q για τον οποίο ισχύει ότι $\Gamma^{(i)}(X) = QM^{(i)}(X)Q^{-1}$. Σημειώνουμε επίσης, ότι αν η $\widehat{M}^{(i)}(X)$ είναι ανάγωγη (irreducible) αναπαράσταση τότε ανάγωγη θα είναι και η $\Gamma^{(i)}(X)$. Εφόσον η ισοδυναμία αυτή ισχύει για κάθε irrep μιας πεπερασμένης ομάδας, από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε μόνο μοναδιαίους irreps. Για τους μοναδιαίους αυτούς irreps δε θα χρησιμοποιούμε κάποιο συγκεκριμένο γράμμα ή κάποιο συγκεκριμένο σύμβολο.

Σημειώνουμε επίσης ότι, στην περίπτωση όπου τα στοιχεία της ομάδας G δεν είναι μοναδιαίοι τελεστές τότε ο μετασχηματισμός Q ο οποίος μας πηγαίνει από τη μία αναπαράσταση στην άλλη έχει μία απλή φυσική σημασία: αν σκεφτούμε για παράδειγμα τον τρισδιάστατο χώρο τότε ο μετασχηματισμός Q μας πηγαίνει από ένα πλάγιο σύστημα συντεταγμένων σε ένα ορθογώνιο. Το γεγονός ότι οι πίνακες $M^{(i)}(X)$ δεν είναι μοναδιαίοι σημαίνει ότι τα διανύσματα βάσης της αναπαράστασης $M(X)$ δεν είναι ορθογώνια. Αντιθέτως, τα διανύσματα βάσης της αναπαράστασης $\Gamma(X)$ είναι ορθογώνια.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειώσουμε κάποιες ιδιότητες των irreps. Δείξαμε παραπάνω ότι, μία αναπαράσταση $M(X)$ μπορεί να αναλυθεί σε ένα ευθύ άθροισμα από irreps. Επίσης στην αναπαράσταση $M(X)$ θα αντιστοιχεί ένα διάνυσμα βάσης με αντίστοιχες συνιστώσες. Οι συνιστώσες του διανύσματος βάσης οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα block (έναν πίνακα δηλαδή) 1×1 , παραμένουν αναλλοίωτες υπό τους μετασχηματισμούς της ομάδας. Θυμηθείτε και πάλι την ομάδα C_3 , όπου η συνιστώσα z αντιπροσωπεύεται στον πίνακα αναπαράστασης από πίνακα 1×1 , μιας και παραμένει αναλλοίωτη υπό τις στροφές που περιγράφει η ομάδα C_3 . Σημειώνουμε επίσης ότι, οι irreps των πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων αντιπροσωπεύονται πάντοτε από πίνακες 1×1 , μιας και αυτοί είναι οι μόνοι πίνακες οι οποίοι μπορούν να κατέχουν τη μεταθετική ιδιότητα.

Όπως έχουμε δει έως τώρα, το να χειριζόμαστε τις αναπαραστάσεις ή τους irreps με τη βοήθεια των πινάκων, μπορεί να μας βοηθά να εξαγάγουμε όσο το δυνατόν περισσότερη πληροφορία για τη δομή μιας ομάδας, αλλά από ένα σημείο και μετά γίνεται αρκετά περίπλοκο και στριφνό ως αναφορά τις πράξεις. Επομένως, θα προσπαθήσουμε να αναζητήσουμε έναν ισοδύναμο τρόπο έτσι ώστε να χειριζόμαστε τις αναπαραστάσεις.

Στην αρχή της ενότητας αυτής, δώσαμε τον ορισμό της ισοδύναμης αναπαράστασης από την Εξ. (2.5). Θυμηθείτε τώρα από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι δύο πίνακες οι οποίοι σχετίζονται μεταξύ τους με ένα μετασχηματισμό ομοιότητας σαν αυτόν της Εξ. (2.5) διατηρούν ίδιο το ίχνος τους. Θυμίζουμε ότι το ίχνος ενός πίνακα A δίνεται από την εξίσωση

$$\text{Tr}A = \sum_{i=1}^n A_{ii}. \quad (2.7)$$

Από το μετασχηματισμό ομοιότητας της Εξ. (2.5) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{aligned} [M_Q(X)]_{ii} &= [Q^{-1}]_{ij}[M(X)]_{jk}[Q]_{ki} \\ &= [M(X)]_{jk}[Q]_{ki}[Q^{-1}]_{ij} \\ &= [M(X)]_{jk}[I]_{kj} \\ &= [M(X)]_{jj}. \end{aligned}$$

Το γεγονός λοιπόν αυτό, μπορούμε να το εκμεταλλευτούμε έτσι ώστε να απλοποιήσουμε τις πράξεις που πραγματοποιούμε με τις αναπαραστάσεις μιας ομάδας, με κόστος βέβαια μέρος της πληροφορίας η οποία περιέχεται σε ολόκληρους τους πίνακες. Ορίζουμε λοιπόν ως χαρακτήρες $\chi[M(X)]$ μιας αναπαράστασης M της ομάδας G τα ίχνη των πινάκων $M(X)$ οι οποίοι αποτελούν την αναπαράσταση M . Προφανώς τα στοιχεία X είναι στοιχεία της ομάδας G .

Θυμίζουμε τώρα ότι σε μία ομάδα μπορεί να υπάρχουν στοιχεία A και B τα οποία να συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση συζυγίας, όπως την ορίσαμε στην Ενότητα 1. Επομένως, τα δύο αυτά στοιχεία θα ανήκουν στην ίδια κλάση, αλλά επίσης θα αντιπροσωπεύονται από τους πίνακες $M(A)$ και $M(B)$ μιας αναπαράστασης M της ομάδας G . Από τον ορισμό του χαρακτήρα που δώσαμε παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι οι χαρακτήρες των δύο πινάκων θα είναι οι ίδιοι. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι, για στοιχεία τα οποία ανήκουν στην ίδια conjugacy class, θα έχουν τον ίδιο χαρακτήρα, δηλαδή $\chi[M(A)] = \chi[M(B)]$. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι, όπως μία αναπαράσταση είναι ουσιαστικά μία συνάρτηση των στοιχείων της ομάδας, έτσι και ο χαρακτήρας είναι μία συνάρτηση των κλάσεων. Σημειώνουμε επίσης ότι από τον παραπάνω ορισμό για το χαρακτήρα, μπορούμε να συμπεράνουμε πως αν δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες τότε θα έχουν το ίδιο σύνολο χαρακτήρων (ισχύει και το αντίστροφο). Επομένως (εδώ φαίνεται η χρησιμότητα του χαρακτήρα), για να ελέγξουμε αν δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες δε χρειάζεται να βρούμε τον πίνακα Q μέσω του οποίου συνδέονται: το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να ελέγξουμε το χαρακτήρα τους. Θυμίζουμε επιπλέον από την Ενότητα 1 ότι, το μοναδιαίο στοιχείο μιας ομάδας αποτελεί από μόνο του μία κλάση. Ο χαρακτήρας της κλάσης η οποία περιέχει το μοναδιαίο στοιχείο θα ισούται με τη διάσταση της αναπαραστάσεως, μιας και ο πίνακας του μοναδιαίου στοιχείου έχει τη διάσταση της αναπαραστάσεως έτσι ώστε να εναλλάσσεται με όλα τα στοιχεία της.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, και πριν περάσουμε στη μελέτη των ομάδων Lie, θα δώσουμε ένα θεώρημα και δύο σημαντικά λήμματα τα οποία προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση. Θα ξεκινήσουμε από τα δύο λήμματα τα οποία είναι γνωστά ως λήμματα Schur και στη συνέχεια θα

δώσουμε το θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό ως Θεώρημα της ορθογωνιότητας. Τα δύο λήμματα καθώς και το Θεώρημα της ορθογωνιότητας παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

1^ο Λήμμα Schur: Αν M είναι ένας *irrep* της ομάδας G και υπάρχει ένας πίνακας N ο οποίος μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της αναπαράστασης M , τότε ο N θα είναι πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή $N = \lambda I$. Διατυπώνοντας με μαθηματική σχέση την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι

$$\text{Αν } NM(X) = M(X)N \text{ για κάθε } X \in G \text{ τότε θα είναι } N = \lambda I.$$

Το αντίθετο της παραπάνω πρότασης ισχύει επίσης. Δηλαδή, αν αποδείξουμε ότι κάποιος πίνακας N μετατίθεται με όλους τους πίνακες της αναπαράστασης, τότε αυτός είναι σταθερός και ανάλογος του μοναδιαίου πίνακα ενώ η αναπαράσταση είναι ένας *irrep*.

2^ο Λήμμα Schur: Αν M^i και M^j δύο *irreps* της ομάδας G με διαστάσεις d_i και d_j αντίστοιχα, και υπάρχει πίνακας N διάστασης $d_i \times d_j$ τέτοιος ώστε

$$M^i(X)N = NM^j(X),$$

για κάθε στοιχείο $X \in G$, τότε είτε ο πίνακας N είναι μηδενικός, είτε οι δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες.

Από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα δύο παραπάνω λήμματα, μπορούμε τώρα να δώσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το θεώρημα της ορθογωνιότητας, το οποίο, όπως είπαμε, θα το παραθέσουμε εδώ χωρίς απόδειξη (για την ακριβή εξαγωγή του θεωρήματος αυτού, η οποία όμως είναι έξω από τα πλαίσια του μαθήματος, μπορείτε να ανατρέξετε στο Κεφάλαιο 4 του βιβλίου 'Groups, Representations and Physics', του H.F. Jones).

Θεώρημα ορθογωνιότητας: Έστω M^i και M^j δύο μη ισοδύναμοι *irreps* της ομάδας G με διαστάσεις d_i και d_j αντίστοιχα. Αν η ομάδα G είναι τάξης g , δηλαδή περιέχει g στοιχεία, τότε ισχύει ότι,

$$\sum_{X \in G} M_{km}^i(X) M_{nl}^{j*}(X) = \frac{g}{d_i} \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml}. \quad (2.8)$$

Το παραπάνω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό διότι συνδέει δύο διαφορετικούς *irreps* έτσι ώστε να εξαγάγουμε κάποια συμπεράσματα για την ομάδα G . Θεωρείστε για παράδειγμα ότι η παραπάνω ομάδα G έχει c τον αριθμό διαφορετικούς *irreps*. Όπως είπαμε παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε μία αναπαράσταση M^i ως μία συνάρτηση της ομάδας G μιας και ορίζεται σε g διακεκριμένα σημεία. Τα στοιχεία της αναπαράστασης αυτής θα συμβολίζονται ως M_{km}^i , μιας και η αναπαράσταση είναι στην ουσία ένας πίνακας. Σύμφωνα με τους ορισμούς που έχουμε δώσει οι δείκτες της αναπαράστασης M_{km}^i μπορούν να μεταβάλλονται μεταξύ των τιμών $0 \leq i \leq c$, μιας και έχουμε c το πλήθος *irreps*, καθώς και $0 \leq k, m \leq d_i$, μιας και d_i είναι η διάσταση του συγκεκριμένου *irrep*. Για κάθε διαφορετική λοιπόν τιμή των i, k, m θα έχουμε και μία διαφορετική συνάρτηση, και επομένως ο συνολικός αριθμός των συναρτήσεων αυτών θα είναι $\sum_{i=1}^c d_i^2$, δηλαδή για κάθε τιμή της μεταβλητής i θα έχουμε d_i^2 συναρτήσεις. Το σύνολο αυτό

των συναρτήσεων θα είναι g σε πλήθος, μιας και προέρχονται από το σύνολο των irreps της ομάδας G , δηλαδή θα είναι $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_c^2 = g$. Οι συναρτήσεις λοιπόν αυτές, ορίζουν ένα g -διάστατο διανυσματικό χώρο ο οποίος αναφέρεται ως χώρος της ομάδας G (ή αλλιώς G -module).

Το αριστερό μέλος της Εξ. (2.8) θυμίζει ένα εσωτερικό γινόμενο, και έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\langle M_{km}^i | M_{nl}^j \rangle = \sum_{X \in G} M_{km}^i(X) M_{nl}^{j*}(X),$$

το οποίο καταδεικνύει ότι οι δύο συναρτήσεις M_{km}^i και M_{nl}^j είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Για τις δύο αυτές συναρτήσεις, και σύμφωνα με αυτά που είπαμε παραπάνω, μπορεί να αποδειχθεί ότι αποτελούν ένα πλήρες σύνολο και σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση με

$$\sum_{i=1}^c d_i^2 = g \quad (2.9)$$

στοιχεία. Η Εξ. (2.9) είναι πολύ σημαντική διότι μας λέει ότι οι συναρτήσεις M_{km}^i , οι οποίες ονομάζονται αναπαραστατικά διανύσματα (representation vectors) θα ισούνται με την τάξη της ομάδας.

Σημειώστε τώρα ότι, για το δεξί μέλος της Εξ. (2.8) υπάρχει μία διπλή ορθογωνιότητα. Η διπλή αυτή ορθογωνιότητα αφορά την ίδια αναπαράσταση ($i = j$) αλλά διαφορετικά στοιχεία $[(k, m) \neq (n, l)]$, ή τα ίδια στοιχεία $[(k, m) = (n, l)]$, αλλά διαφορετική αναπαράσταση ($i \neq j$). Με άλλα λόγια, το δεξί μέλος της Εξ. (2.8) είναι μη μηδενικό μόνο για την περίπτωση όπου ισχύει ταυτόχρονα ότι $i = j$ και $(k, m) = (n, l)$.

Τη σχέση ορθογωνιότητας που ορίσαμε στην Εξ. (2.8) μπορούμε τώρα να την εκφράσουμε με τη βοήθεια των χαρακτήρων των αναπαραστάσεων. Θέτοντας λοιπόν στην Εξ. (2.8) ότι $k = m$ και $n = l$, και αθροίζοντας για όλα τα k και n παίρνουμε

$$\sum_{X \in G} \left[\sum_k M_{kk}^i(X) \right] \left[\sum_n M_{nn}^{j*}(X) \right] = \sum_k \frac{g}{d_i} \delta_{ij} \delta_{kn}$$

$$\sum_{X \in G} \chi^{(i)}(X) \chi^{(j)*}(X) = g \delta_{ij}, \quad (2.10)$$

που είναι το θεώρημα της ορθογωνιότητας εκφρασμένο με τη βοήθεια των χαρακτήρων. Σημειώστε για το δεξί μέρος της πρώτης γραμμής της Εξ. (2.10) ότι το άθροισμα $\sum_k \delta_{kn} = \sum_k \delta_{kk}$ ουσιαστικά μας δίνει αποτέλεσμα μονάδα κάθε φορά που ο αριθμός της στήλης ισούται με τον αριθμό της γραμμής του irrep, δηλαδή με άλλα λόγια μας γίνει τη διάσταση του irrep την οποία εξαρχής έχουμε υποθέσει ότι είναι d_i . Προσέξτε επίσης κάτι σημαντικό. Για $i = j$ στην Εξ. (2.10) παίρνουμε ότι $\sum_{X \in G} \chi^{(i)}(X) \chi^{(i)*}(X) = g$, δηλαδή, για έναν irrep μπορούμε να πούμε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των χαρακτήρων όλων των στοιχείων της ομάδας ισούται με την τάξη

της ομάδας αυτής. Το αποτέλεσμα αυτό, δε θα πρέπει να συγχέεται με εκείνο που είχαμε στην Εξ. (2.9), μιας και η Εξ. (2.9) συσχετίζει τις διαστάσεις (και όχι τους χαρακτήρες) όλων των irreps (και όχι ενός) με την τάξη της ομάδας. Με άλλα λόγια, το μόνο κοινό στοιχείο που έχουν οι Εξ. (2.9) και (2.10) είναι το δεξί τους μέρος.

Θυμηθείτε τώρα ότι, όπως είχαμε πει και στην Ενότητα 1, μία ομάδα G αποτελείται από conjugacy classes (ή απλά κλάσεις). Λίγο πιο πριν όμως είπαμε ότι, ο χαρακτήρας όλων των στοιχείων μιας κλάσης θα είναι ο ίδιος. Θεωρώντας λοιπόν ότι, η ομάδα G αποτελείται από r το πλήθος κλάσεις, R_1, R_2, \dots, R_r , και η κάθε κλάση έχει στοιχεία g_1, g_2, \dots, g_r αντίστοιχα, τότε από την Εξ. (2.10) παίρνουμε ότι

$$\sum_{a=1}^r g_a \chi_a^{(i)} \chi_a^{(j)*} = g \delta_{ij}$$

$$\sum_{a=1}^r \sqrt{\frac{g_a}{g}} \chi_a^{(i)} \sqrt{\frac{g_a}{g}} \chi_a^{(j)*} = \delta_{ij}. \quad (2.11)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το $\chi_a^{(i)}$ είναι στην ουσία ο χαρακτήρας του irrep $M^i(X_a)$ ενός στοιχείου X_a το οποίο ανήκει στην κλάση R_a . Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η Εξ. (2.11) εκφράζει την ορθογωνιότητα των χαρακτήρων ενός irrep, με τις συναρτήσεις $e_a^{(i)} = \sqrt{\frac{g_a}{g}} \chi_a^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) να αποτελούν τα ορθοκανονικά διανύσματα στον r -διάστατο χώρο των κλάσεων. Ο αριθμός n των ορθοκανονικών διανυσμάτων φαίνεται με μία πρώτη ματιά λογικό, να είναι μικρότερος από τη διάσταση r του χώρου των κλάσεων, δηλαδή $n \leq r$. Παρ' όλα αυτά, αποδεικνύεται ότι ισχύει η ισότητα $n = r$ (για την απόδειξη δείτε για παράδειγμα M. Hamermesh, 'Group Theory and its Application to Physical Problems', Pergamon Press, 1962). Καταλήγουμε λοιπόν στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι, ο αριθμός των irreps μιας ομάδας G ισούται με τον αριθμό των κλάσεων της ομάδας αυτής.

Συγκεντρωτικά λοιπόν, για μία ομάδα G τάξης g , η οποία χωρίζεται σε r τον αριθμό κλάσεις, έχουμε:

- i. Ο αριθμός των irreps της ομάδας ισούται με το πλήθος των κλάσεών της, δηλαδή $n = r$.
- ii. Τα στοιχεία των πινάκων όλων των irreps της ομάδας G , τα οποία μπορούν να θεωρηθούν και ως συναρτήσεις των στοιχείων $X \in G$, αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο. Ένα άμεσο αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού, είναι ότι το σύνολο των διαστάσεων των irreps θα ισούται με την τάξη της ομάδας, δηλαδή $\sum_{i=1}^r d_i^2 = g$.
- iii. $\sum_{a=1}^r \sqrt{\frac{g_a}{g}} \chi_a^{(i)} \sqrt{\frac{g_a}{g}} \chi_a^{(j)*} = \delta_{ij}$, όπου $\chi_a^{(i)}$ είναι ο χαρακτήρας του irrep i που αντιστοιχεί στην κλάση R_a .
- iv. Όλοι οι irreps μιας Αβελιανής ομάδας έχουν διάσταση ίση με τη μονάδα. Επίσης, οι κλάσεις μιας Αβελιανής ομάδας αποτελούνται από ένα μόνο στοιχείο. Από το γεγονός

αυτό καταλήγουμε στο ότι, ο αριθμός των κλάσεων μίας Αβελιανής ομάδας ισούται με την τάξη της ομάδας αυτής.

Ενότητα 3

Έως τώρα, στις δύο προηγούμενες ενότητες έχουμε ασχοληθεί μόνο με πεπερασμένες ομάδες. Συγκεκριμένα, επικεντρωθήκαμε στις περιπτώσεις των ομάδων C_n, D_n και S_n , όπου οι δύο πρώτες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τις στροφές ενός πολυγώνου κατά συγκεκριμένες γωνίες γύρω από κάποιους άξονες, ενώ η τελευταία ασχολείται με τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να αναδιαταχθούν τα στοιχεία ενός συνόλου. Γενικά όμως, στη φυσική, τις περισσότερες φορές εμφανίζονται σύνολα τα οποία περιέχουν έναν άπειρο αριθμό στοιχείων, παρά έναν πεπερασμένο. Για παράδειγμα, στις περισσότερες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε πώς, και αν, αλλάζει μορφή ένα διάνυσμα στο χώρο στρέφοντάς το γύρω από έναν άξονα κατά μία τυχαία γωνία. Ένα άλλο παράδειγμα, είναι η κρυσταλλική δομή των στερεών η οποία παραμένει αμετάβλητη για οποιαδήποτε μετατόπιση στο τρισδιάστατο χώρο. Όπως καταλαβαίνει κανείς, το κλειδί για να θεωρείται η υπό μελέτη ομάδα στα παραπάνω παραδείγματα ότι έχει άπειρο αριθμό στοιχείων, βρίσκεται στις λέξεις «τυχαία γωνία» και «οποιαδήποτε μετατόπιση».

Ξεκινώντας λοιπόν από ένα παράδειγμα στο δισδιάστατο και ένα στον τρισδιάστατο χώρο στην Υποενότητα 3.1, θα συνεχίσουμε με τον ορισμό των συνεχών ομάδων, οι οποίες είναι γνωστές και ως ομάδες Lie.

3.1 Στροφές στο χώρο και η ομάδα $SO(n)$

Θεωρήστε το τρισσορθόγωνιο σύστημα αξόνων, όπως αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Θεωρούμε ότι κινούμαστε στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r και στρέφουμε την επιβατική του ακτίνα κατά γωνία θ από την αρχική της θέση. Χρησιμοποιώντας λοιπόν πολικές συντεταγμένες, η τελική θέση του σημείου συναρτήσει της αρχικής του θέσης, θα δίνεται από τις σχέσεις

$$x' = r \cos(\varphi + \theta) = r(\cos\varphi \cos\theta - \sin\varphi \sin\theta) = x \cos\theta - y \sin\theta$$

$$y' = r \sin(\varphi + \theta) = r(\sin\varphi \cos\theta + \cos\varphi \sin\theta) = y \cos\theta + x \sin\theta$$

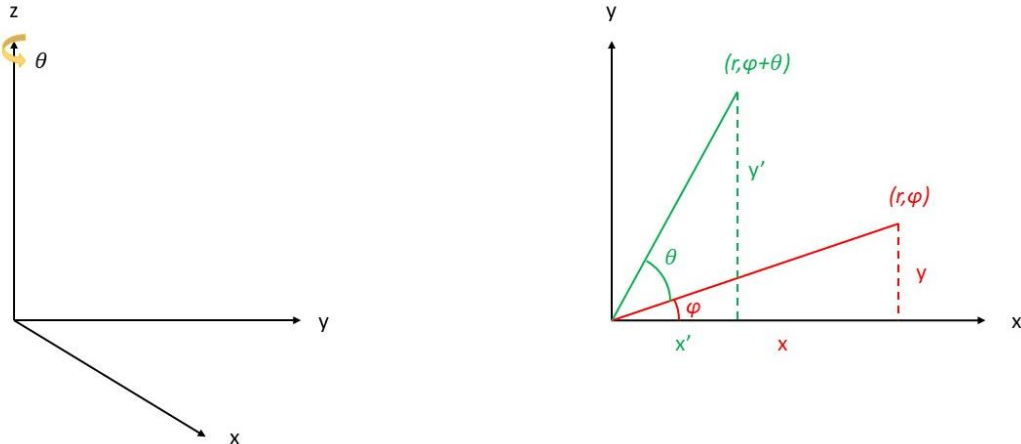
$$z' = z$$

Γράφοντας τώρα, τη θέση του σημείου ως ένα διάνυσμα στήλης, τότε μπορούμε να γράψουμε για την τελική θέση του σημείου ότι

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\theta - y \sin\theta \\ y \cos\theta + x \sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Η παραπάνω εξίσωση υποδεικνύει ότι μία στροφή ενός διανύσματος στο επίπεδο $x - y$ μπορεί να περιγραφεί από τον πίνακα

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 3.1: Περιστροφή ενός σημείου του επιπέδου $x - y$ κατά τυχαία γωνία γύρω από τον άξονα z . Για τον προσδιορισμό της θέσης του σημείου χρησιμοποιούνται πολικές συντεταγμένες.

Παρατηρούμε τώρα ότι, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς τις τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία θ , δηλαδή μπορεί να πάρει όλες τις πιθανές τιμές στο εύρος $[0, 2\pi)$. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι, για γωνίες $0, 2\pi/3$ και $4\pi/3$ τότε παίρνουμε τα στοιχεία της ομάδας C_3 , δηλαδή τους πίνακες που αντιστοιχούν στις στροφές ισόπλευρου τριγώνου γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του (επιβεβαιώστε το).

Στη συνέχεια, θα περιοριστούμε στο επίπεδο $x - y$, δηλαδή θα αγνοήσουμε τη συνισταμένη z και θα θεωρήσουμε ότι το διάνυσμά μας έχει συνιστώσες μόνο κατά τους άξονες x και y . Έτσι λοιπόν, ο παραπάνω πίνακας θα γράφεται

$$R'(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Παρατηρείστε ότι, ο παραπάνω πίνακας είναι ορθογώνιος μιας και $R'(\theta)R'^T(\theta) = I$, όπου $R'^T(\theta)$ ο ανάστροφος πίνακας του $R'(\theta)$ (για μία πολύ συνοπτική επανάληψη για τους πίνακες δείτε και το Παράρτημα στο τέλος των σημειώσεων). Επιπλέον, ο πίνακας της Εξ. (3.1) έχει ορίζουσα ίση με τη μονάδα, δηλαδή $\det[R'(\theta)] = 1$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $R'(\theta)$ είναι ορθογώνιος και συγκεκριμένα 'ειδικά ορθογώνιος' (special orthogonal) μιας και η ορίζουσά του ισούται με τη μονάδα. Το σύνολο αυτό των πινάκων συμβολίζεται ως $SO(2)$, μιας και είναι Special Orthogonal πίνακες διαστάσεως 2×2 .

Πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάλυση των στροφών στο επίπεδο θα θέλαμε να τονίσουμε το εξής: όπως γνωρίζουμε για τις συναρτήσεις του συνημιτόνου και του ημιτόνου

ισχύει ότι $\cos(-\theta) = \cos\theta$ και $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ αντίστοιχα, μιας και η πρώτη είναι άρτια ενώ η δεύτερη περιττή. Έτσι λοιπόν, αλλάζοντας τη γωνία από θ σε $-\theta$, η Εξ. (3.1) γίνεται

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Η αλλαγή αυτή προφανώς δεν επηρεάζει σε τίποτα τις πιθανές στροφές που μπορούμε να κάνουμε στο επίπεδο. Ο μόνος λόγος που την κάνουμε είναι για να είμαστε συνεπείς με τη διεθνή βιβλιογραφία μιας και τα περισσότερα συγγράμματα θεωρούν τον πίνακα της Εξ. (3.2) ως έναν πίνακα που περιγράφει τις πιθανές στροφές στο επίπεδο.

Με την απαραίτητη αυτή διευκρίνιση για τον πίνακα $R(\theta)$ που μόλις κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο και σύμφωνα με τους ορισμούς που δώσαμε σε προηγούμενη ενότητα, ο πίνακας $R(\theta)$ συνιστά μία καλά ορισμένη αναπαράσταση στο διδιάστατο χώρο. Συγκεκριμένα, για την αναπαράσταση που ορίζεται στην Εξ. (3.2) έχουμε ότι $R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_1)R(\theta_2)$ καθώς και $R(2\pi - \theta) = R^{-1}(\theta)$ (δείτε επίσης το Παράδειγμα 4 στην Υποενότητα 1.1). Επιπλέον, το μοναδιαίο στοιχείο της αναπαράστασης το παίρνουμε μόνο για γωνία $\theta = 0$, και μόνο για αυτή. Έτσι λοιπόν, το kernel της αναπαράστασης αποτελείται μόνο από το μοναδιαίο στοιχείο και έτσι η αναπαράσταση αυτή αποτελεί μία 'πιστή αναπαράσταση' (faithful representation). Επίσης, σε κάθε στροφή θ αντιστοιχεί διαφορετικός πίνακας $R(\theta)$ κάθε φορά και έτσι η αναπαράσταση αυτή συνιστά έναν ισομορφισμό.

Θεωρείστε τώρα ότι παίρνουμε μία πολύ μικρή γωνία, $\theta \ll 1$. Για μία τέτοια γωνία θα είναι $\cos\theta \approx 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ καθώς και $\sin\theta \approx \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$, όπου $\mathcal{O}(\theta^2)$ είναι αμελητέοι όροι οι οποίοι εξαρτώνται από δυνάμεις του θ^2 και άνω. Για αυτή τη μικρή γωνία λοιπόν θα έχουμε από την Εξ. (3.2)

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= I_2 + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) = I_2 + \theta X + \mathcal{O}(\theta^2), \end{aligned}$$

όπου $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν και για $\theta = 0$ έχουμε ότι $R(0) = I_2$, στη γειτονιά όπου $\theta \ll 1$, η στοιχειώδης περιστροφή περιγράφεται από τον πίνακα X . Εφόσον η ποσότητα θX έχουμε θεωρήσει ότι είναι απειροστή, καθώς και από την παρατήρηση ότι $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor την ποσότητα $e^{\theta X}$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{\theta X} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta X)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta X)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta X)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n} (-I_2)^n}{2n!} + X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1} (-I_2)^n}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$= \cos\theta I_2 + X \sin\theta = R(\theta).$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας X αποτελεί γεννήτορα της ομάδας (group generator) περιστροφών $SO(2)$. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα μιας και μπορούμε να ελέγξουμε τη συμπεριφορά όλων των στοιχείων των πινάκων $SO(2)$ μέσω του γεννήτορα X . Μπορούμε να γράψουμε το γεννήτορα X ως $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$, όπου $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ είναι ένας από τους πίνακες Pauli. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$R(\theta) = I_2 + i\theta\sigma_y + \mathcal{O}(\theta^2) = e^{i\theta\sigma_y} \quad (3.3)$$

και τώρα φαίνεται αρκετά καθαρά ότι ο γεννήτορας των στροφών στο επίπεδο είναι ο πίνακας Pauli σ_y για τον οποίο ισχύει ότι $\sigma_y^2 = I_2$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι ο πίνακας σ_y , αλλά και γενικά οι πίνακες Pauli, έχουν ίχνος $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ και $\det(\sigma_i) = -1$, $i = x, y, z$ (προσέξτε ότι εδώ ο γεννήτοράς μας είναι στην ουσία ο πίνακας $i\sigma_y$ ο οποίος έχει ορίζουσα +1). Η ομάδα $SO(2)$ ονομάζεται μονοπαραμετρική μιας και έχει μόνο ένα γεννήτορα.

Το σύνολο λοιπόν $R(\theta)$, το οποίο όπως είπαμε αποτελείται από πίνακες που ανήκουν στην ειδική ομάδα πινάκων $SO(2)$, εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων, αποτελεί μία καλά ορισμένη ομάδα. Έτσι λοιπόν, η ομάδα $SO(2)$ η οποία περιγράφει όλες τις πιθανές στροφές στο επίπεδο και επομένως περιέχει έναν άπειρο αριθμό στοιχείων, αποτελεί το πρώτο μας παράδειγμα από τις ομάδες Lie.

Παράδειγμα 9: Γνωρίζουμε ότι μία κυματοσυνάρτηση στην κβαντομηχανική δίνεται γενικά συναρτήσει των συνιστωσών του χώρου και του χρόνου. Στο μονοδιάστατο πρόβλημα, όπου περιοριζόμαστε μόνο στον άξονα x θα είναι $\Psi = \Psi(x, t)$. Θεωρήστε τώρα ότι, θέλουμε να προσδιορίσουμε την κυματοσυνάρτηση μετά από χρόνο $t + dt$. Με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως, αναπτύσσουμε την κυματοσυνάρτηση με τη βοήθεια της σειράς Taylor ως

$$\begin{aligned} \Psi(x, t + dt) &= \Psi(x, t) + dt \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) + \frac{dt^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x, t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(dt \frac{\partial}{\partial t} \right)^n \Psi(x, t) \\ &= e^{dt \frac{\partial}{\partial t}} \Psi(x, t) = e^{\frac{-iHdt}{\hbar}} \Psi(x, t), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η ποσότητα $e^{\frac{-iHdt}{\hbar}}$ μπορεί να 'παράξει' την κυματοσυνάρτηση μετά από ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt . Επομένως, η ποσότητα αυτή μας δίνει στην ουσία τον τελεστή της χρονικής εξέλιξης της κυματοσυνάρτησης, όπως άλλωστε γνωρίζουμε και από την Κβαντομηχανική.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο και για τη συνιστώσα του χώρου και μελετώντας την κυματοσυνάρτηση για μία απειροστή μετατόπιση dx , παίρνουμε αντίστοιχα ότι

$$\begin{aligned}\Psi(x + dx, t) &= \Psi(x, t) + dx \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) + \frac{dx^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(dx \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Psi(x, t) \\ &= e^{dx \frac{\partial}{\partial x}} \Psi(x, t) = e^{\frac{ipdx}{\hbar}} \Psi(x, t),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

Άσκηση 6: Θεωρώντας ότι A και B είναι δύο τελεστές οι οποίοι εν γένει δεν μετατίθενται μεταξύ τους αποδείξτε την ταυτότητα Baker-Campbell-Hausdorff (γνωστή και ως ταυτότητα BCH),

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots\right)$$

Σημείωση: Χρησιμοποιείστε το ανάπτυγμα Taylor μιας εκθετικής συνάρτησης και πάρτε τους όρους έως δεύτερης τάξης, δηλαδή αποδείξτε ότι την παραπάνω ταυτότητα μόνο για τους όρους έως δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα 10: Θεωρείστε την ομάδα $U(1)$, η οποία, όπως αναφέραμε και παραπάνω, περιέχει όλους τους μιγαδικούς αριθμούς οι οποίοι έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα, δηλαδή $z = |z|e^{i\theta}$ με $|z| = 1$ (δείτε επίσης και το Παράδειγμα 3). Επομένως, τα στοιχεία της ομάδας $U(1)$ μπορούν να γραφούν ως $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ και βλέπουμε ότι μας θυμίζει πολύ το ανάπτυγμα του πίνακα $R(\theta)$ που πραγματοποιήσαμε παραπάνω. Φανταζόμαστε λοιπόν, ότι υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των ομάδων $U(1)$ και $SO(2)$, την οποία θα προσπαθήσουμε να βρούμε στη συνέχεια.

Πριν προσπαθήσουμε να βρούμε τη συσχέτιση μεταξύ των ομάδων $U(1)$ και $SO(2)$ σημειώνουμε το εξής. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε η ποσότητα $e^{i\alpha}$ αποτελεί ένα μετασχηματισμό της ομάδας $U(1)$ μιας και στην ουσία αυτό που κάνει είναι να μετατοπίσει όλα τα στοιχεία της ομάδας αυτής κατά μία σταθερή ποσότητα α .

Θεωρείστε στη συνέχεια την απεικόνιση $M: SO(2) \rightarrow U(1)$, η οποία ορίζεται ως $M[R(\theta)] = e^{i\theta}$, όπου $R(\theta) \in SO(2)$. Στην ουσία, η απεικόνιση αυτή είναι ένας ομομορφισμός, μιας και

$$M[R(\theta_1)]M[R(\theta_2)] = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = M[R(\theta_1 + \theta_2)] = M[R(\theta_1)R(\theta_2)].$$

Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση M είναι ένας ομομορφισμός λόγω του ότι $R(\theta_1) = R(\theta_1 + 2\pi)$ και έτσι στο κάθε στοιχείο της ομάδας $U(1)$ αντιστοιχεί παραπάνω από ένα στοιχείο της ομάδας $SO(2)$. Αν όμως περιορίσουμε το θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ τότε το γεγονός αυτό παύει να ισχύει και υπάρχει μία αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ των δύο ομάδων και έτσι η απεικόνιση M περιγράφει έναν ισομορφισμό. Αυτό σημαίνει ότι αν $M[R(\theta_1)] = M[R(\theta_2)]$ τότε θα είναι

$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ και επομένως $\theta_1 = \theta_2$. Το ίδιο ισχύει και για το αντίστροφο, δηλαδή $M^{-1}: U(1) \rightarrow SO(2)$. Επομένως, οι δύο ομάδες είναι ισόμορφες και γράφουμε $SO(2) \cong U(1)$.

Εφόσον μελετήσαμε τις στροφές που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε στο επίπεδο, ας δούμε αν υπάρχει αντίστοιχη ομάδα που να περιγράφει τις στροφές ενός διανύσματος στον τρισδιάστατο χώρο. Προφανώς μία τέτοια ομάδα θα περιέχει πίνακες 3×3 για να συμπεριλαμβάνει και τις τρεις διαστάσεις. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε πιθανή στροφή ενός τρισδιάστατου διανύσματος στο χώρο μπορεί να περιγραφεί ότι γίνεται σε ένα επίπεδο και γύρω από ένα σταθερό άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό (δείτε Σχήμα 3.2). Χωρίς άρση της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτός ο σταθερός άξονας γύρω από τον οποίο στρέφεται το διάνυσμά μας είναι είτε ο x είτε ο y είτε ο z . Στην περίπτωση που ο σταθερός μας άξονας είναι ο z τότε ο πίνακας ο οποίος περιγράφει μία τυχαία στροφή στο επίπεδο $x - y$ δίνεται από τον πίνακα που είδαμε και στην αρχή της ενότητας

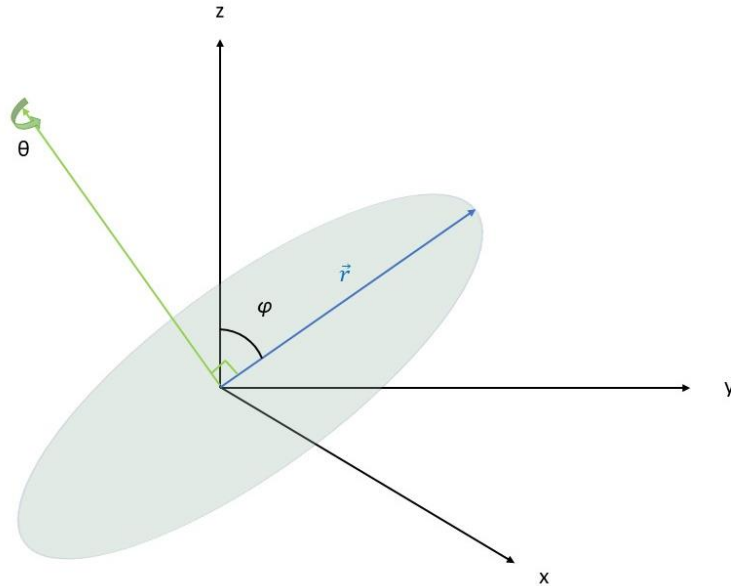
$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

και τον οποίο τώρα ονομάσαμε $R_3(\theta)$ (σε σύγκριση με τον πίνακα που δώσαμε στην αρχή της Ενότητας 3 έχουμε πραγματοποιήσει και πάλι την αλλαγή $\theta \rightarrow -\theta$). Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο όπως κάναμε και προηγουμένως, θεωρούμε και πάλι μία απειροστή γωνία $\theta \ll 1$, τέτοια ώστε $\cos\theta \approx 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ και $\sin\theta \approx \theta + \mathcal{O}(\theta^2)$. Επομένως η Εξ. (3.4) γράφεται

$$\begin{aligned} R_3(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + i\theta \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= I_3 + i\theta X_3 + \mathcal{O}(\theta^2), \end{aligned}$$

όπου $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με όσα είπαμε και για τις στροφές στο επίπεδο ο πίνακας

X_3 αποτελεί γεννήτορα των στοιχειωδών στροφών στο χώρο γύρω από τον άξονα z .



Σχήμα 3.2: Περιστροφή ενός διανύσματος στο χώρο. Μπορούμε κάθε φορά να θεωρούμε ότι το διάνυσμά μας (μπλε γραμμή) περιστρέφεται γύρω από τυχαίο σταθερό άξονα και το επίπεδο περιστροφής ορίζεται από το πράσινο περίγραμμα.

Αν, τώρα, θέλουμε να περιγράψουμε τη στροφή του διανύσματος μας γύρω από τον άξονα x τότε αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας μας θα πρέπει να διατηρεί αναλλοίωτη τη συνιστώσα x . Έτσι λοιπόν, σε αναλογία με την Εξ. (3.4) ο πίνακας μας θα γράφεται

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία, όπως κάναμε και για τον πίνακα $R_3(\theta)$, τότε από την ανάλυσή μας θα βρούμε ότι ο αντίστοιχος γεννήτορας είναι ο $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$. Αντίστοιχα, ο πίνακας που θα περιγράψει τις στροφές του διανύσματος γύρω από τον άξονα y θα είναι ο

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

και τώρα ο αντίστοιχος γεννήτορας θα είναι ο $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Εφόσον βρήκαμε ένα γεννήτορα ο οποίος περιγράφει κάθε πιθανή στροφή γύρω από τους άξονες x, y και z κάθε φορά, αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των πινάκων X_1, X_2 και X_3 περιγράφουν κάθε πιθανή στροφή στο χώρο. Παρατηρείστε τώρα ότι και οι τρεις γεννήτορες έχουν ίχνος μηδέν, $\text{Tr}(X_i) = 0$, με $i = 1, 2, 3$, καθώς επίσης οι γεννήτορες αυτοί είναι Ερμιτιανοί. Σημειώστε επιπλέον ότι οι πίνακες $R_i(\theta)$ είναι ορθογώνιοι και έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες αυτοί ανήκουν στην ομάδα $SO(3)$, δηλαδή τους special orthogonal πίνακες με διαστάσεις 3×3 και ορίζουσα ίση με τη μονάδα. Το γεγονός ότι οι πίνακες αυτοί έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα εξυπηρετεί το γεγονός ότι δε μεταβάλλουν το μέτρο του διανύσματος που θέλουμε να στρέψουμε.

Στη συνέχεια, θα θέλαμε να γράψουμε τους γεννήτορες αυτούς σε μία πιο συμπαγή μορφή. Για το λόγο αυτό εισάγουμε τον αντισυμμετρικό τανυστή ε_{ijk} , ο οποίος είναι γνωστός και ως σύμβολο Levi-Civita. Ο τανυστής αυτός δίνει αποτέλεσμα $+1$ για άρτιο αριθμό μεταθέσεων των δεικτών του, -1 για περιττό αριθμό μεταθέσεων και 0 αν κάποιος από τους δείκτες του επαναλαμβάνεται. Με άλλα λόγια, το σύμβολο Levi-Civita παίρνει τις τιμές

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{αν } (i, j, k), (j, k, i), (k, i, j) \\ -1, & \text{αν } (k, j, i), (j, i, k), (i, k, j). \\ 0, & \text{αν } i = j \text{ ή } j = k \text{ ή } i = k \end{cases}$$

Αν προσπαθήσουμε να γράψουμε το γεννήτορα X_3 με τη βοήθεια του συμβόλου Levi-Civita τότε θα πάρουμε

$$(X_3)_{ij} = i\varepsilon_{ij3}. \quad (3.7)$$

Όπως μπορείτε να επιβεβαιώσετε, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του συμβόλου Levi-Civita μπορούμε πάρουμε τα στοιχεία του γεννήτορα X_3 . Προσέξτε ότι στην Εξ. (3.7) ο τρίτος δείκτης θα είναι πάντοτε σταθερός οπότε όταν κάποιος από τους άλλους δείκτες γίνει ίσος με 3 τότε το σύμβολο θα δώσει τιμή 0. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να γράψουμε τους άλλους δύο γεννήτορες ως

$$(X_1)_{ij} = i\varepsilon_{ij1}, \quad (3.8)$$

$$(X_2)_{ij} = i\varepsilon_{ij2}. \quad (3.9)$$

Παρατηρείστε τώρα ότι τους τρεις γεννήτορες των Εξ. (3.7)-(3.9) μπορούμε να τους γράψουμε ως μία εξίσωση

$$(X_k)_{ij} = i\varepsilon_{ijk}, \quad (3.10)$$

όπου κάθε φορά ο ένας δείκτης θα είναι σταθερός και οι άλλοι δύο θα μεταβάλλονται. Η Εξ. (3.10) λοιπόν είναι πολύ σημαντική μιας και περιέχει τους τρεις γεννήτορες X_1, X_2 και X_3 , δηλαδή με άλλα λόγια περιγράφει όλες τις πιθανές στροφές που μπορούν να πραγματοποιηθούν στο χώρο!

Στη συνέχεια, δείτε και πάλι το Σχήμα 3.2. Το διάνυσμα \vec{r} εκτελεί μία περιστροφή στο χώρο και όπως βλέπουμε ορίζει ένα επίπεδο, το οποίο σημειώνεται με ανοιχτό πράσινο στο σχήμα. Η προβολή του διανύσματος αυτού πάνω σε έναν από τους ορθογώνιους άξονες, έστω τον z , θα είναι $r \sin \varphi$ (προφανώς με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δουλέψουμε και για τους άλλους άξονες). Τώρα, όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό από το Σχήμα 3.2, μία στοιχειώδης μετατόπιση του διανύσματος \vec{r} , την οποία θα συμβολίσουμε με $\delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$, θα είναι κάθετη στο επίπεδο

που ορίζεται από το ίδιο το διάνυσμα και από το \hat{z} , που είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα z . Μιας και τη διαδικασία αυτή μπορούμε να την πραγματοποιήσουμε για οποιονδήποτε από τους τρεις άξονες x, y, z , αντί του διανύσματος \hat{z} θα χρησιμοποιήσουμε στις παρακάτω εξισώσεις το \hat{n} το οποίο μπορεί να είναι το \hat{x} , το \hat{y} ή το \hat{z} . Έτσι λοιπόν, για μία στοιχειώδη του διανύσματος μας κατά γωνία θ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\delta\vec{r} = (\hat{n} \times \vec{r})\theta \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \theta(\hat{n} \times \vec{r}), \quad (3.11)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε το εξωτερικό γινόμενο για να περιγράψουμε τη μετατόπιση η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο των \hat{n} και \vec{r} . Δεδομένου ότι, χρησιμοποιώντας το σύμβολο Levi-Civita μπορούμε να γράψουμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως $\hat{n} \times \vec{r} = n_k r_j \varepsilon_{ikj}$ (ελέγξτε το), τότε ξαναγράφοντας την Εξ. (3.11) με τη βοήθεια των συντεταγμένων των διανυσμάτων θα έχουμε ότι

$$r'_i = r_i + \theta n_k r_j \varepsilon_{ikj} = r_i - \theta n_k r_j \varepsilon_{ijk} = (\delta_{ij} - \theta n_k \varepsilon_{ijk})r_j. \quad (3.12)$$

Παρ' όλα αυτά, είδαμε παραπάνω ότι για μια τυχαία στροφή γύρω από άξονα $n = x, y, z$, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια του αντίστοιχου πίνακα $R_n(\theta)$ ως

$$[R_n(\theta)]_{ij} = \delta_{ij} + i\theta(X_n)_{ij}. \quad (3.13)$$

Από τη σύγκριση των Εξ. (3.12) και (3.13) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$(X_n)_{ij} = i n_k \varepsilon_{ijk} = n_k (X_k)_{ij}, \quad (3.14)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε επίσης και την Εξ. (3.10). Παρατηρούμε λοιπόν ότι, για μία στροφή γύρω από τον άξονα n , η συνιστώσα του διανύσματος κατά μήκος αυτού του άξονα μπορεί να περιγραφεί από την παραπάνω εξίσωση. Συνολικά, για όλους τους άξονες, μπορούμε να γράψουμε

$$X_n = \hat{n} \cdot \vec{X}. \quad (3.15)$$

Εκμεταλλευόμενοι όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να γράψουμε ότι μία στροφή γύρω από τον άξονα n θα δίνεται από τη σχέση

$$R_n(\theta) = e^{i\hat{n} \cdot \vec{X}\theta}. \quad (3.16)$$

Σημειώστε στο σημείο αυτό ότι ο γενικός γεννήτορας της Εξ. (3.15) είναι Ερμιτιανός, καθώς επίσης έχει μηδενικό ίχνος. Το γεγονός αυτό εγγυάται ότι ο πίνακας $R_n(\theta)$ είναι ορθογώνιος και έχει οριζούσα ίση με τη μονάδα, δηλαδή εγγυάται ότι ο $R_n(\theta)$ είναι μέλος της ομάδας $SO(3)$.

Συγκεντρωτικά λοιπόν, οι γεννήτορες $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $X_3 =$

$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ παράγουν κάθε πιθανή στροφή στο χώρο. Παρατηρούμε ότι έχουν μόνο φανταστικά στοιχεία, καθώς επίσης είναι αντισυμμετρικοί και έχουν ίχνος ίσο με το μηδέν. Έτσι

λοιπόν, το σύνολο των πινάκων $R_n(\theta)$, $n = 1,2,3$, ανήκει στην ειδική ομάδα πινάκων $SO(3)$ η οποία είναι εφοδιασμένη με την πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων.

Πριν προχωρήσουμε την ανάλυσή μας στην ομάδα $SO(3)$, σημειώστε ότι η ομάδα αυτή, καθώς και η $SO(2)$ είναι Αβελιανές ομάδες. Επιπλέον, και για τις δύο αυτές ομάδες και συγκεκριμένα για απειροστές στροφές $\theta_n \ll$ γύρω από έναν άξονα n , έχουμε την εξίσωση

$$(e^{i\theta_n X_n})_{ij} = \delta_{ij} + i\theta_n (X_n)_{ij}, \quad (3.17)$$

όπου X_n ο αντίστοιχος γεννήτορας. Η εξίσωση αυτή είναι πολύ σημαντική μιας και μπορεί να γενικευτεί και για ομάδες $SO(d)$ με $d > 3$.

Μετά την απαραίτητη αυτή παρένθεση, συνεχίζουμε την ανάλυση της ομάδας $SO(3)$. Θυμηθείτε κατ' αρχήν τη σχέση συζυγίας μεταξύ δύο στοιχείων της ίδιας ομάδας όπως την ορίσαμε στην Ενότητα 1. Στη συνέχεια, θεωρούμε και πάλι ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων όπως αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Εφόσον η ομάδα $SO(3)$ είναι Αβελιανή αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της θα συνδέεται με ένα δεύτερο στοιχείο της ομάδας αυτής με μία σχέση συζυγίας. Θεωρώντας λοιπόν ότι, μπορούμε να στραφούμε κατά απειροστή γωνία θ γύρω από τον άξονα z και κατά απειροστή γωνία φ γύρω από τον άξονα x όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε μπορούμε να γράψουμε τη σχέση συζυγίας $R_{x'}(\varphi) = S^{-1}(\theta)R_x(\varphi)S(\theta)$. Με λόγια, η σχέση αυτή της ισοδυναμίας μας λέει ότι, μία στροφή κατά φ είτε γύρω από τον x άξονα είτε γύρω από τον x' παριστάνει ένα ισοδύναμο αποτέλεσμα στο χώρο. Επιπλέον οι άξονες x και x' συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $x' = S(\theta)x$. Προφανώς μία τέτοια ανάλυση με τις επακόλουθες σχέσεις συζυγίας μπορούμε να κάνουμε για οποιοδήποτε ζεύγος αξόνων του τρισσορθογώνιου συστήματος.

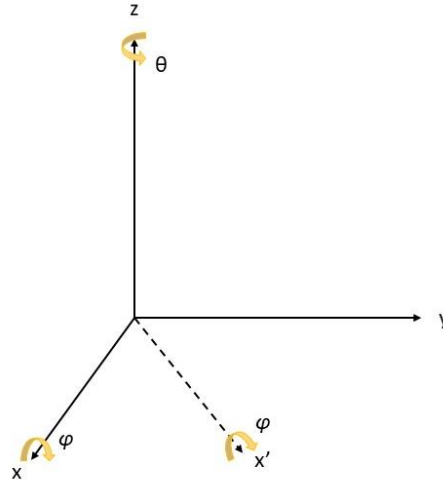
Από την ανάλυση που πραγματοποιήσαμε για την ομάδα $SO(3)$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το στοιχείο $S(\theta)$ γράφεται ως $S(\theta) = e^{i\theta X_3}$. Παρατηρήστε επιπλέον από το Σχήμα 3.3 ότι ο άξονας $x' = S(\theta)x$ έχει συνιστώσες $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ και γράφοντάς τες συναρτήσει των γεννητόρων της ομάδας $SO(3)$ παίρνουμε $\hat{x}' \cdot \vec{X} = X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta$ [δείτε και την Εξ. (3.16)]. Έτσι λοιπόν, η σχέση ισοδυναμίας γίνεται

$$R_{x'}(\varphi) = S^{-1}(\theta)R_x(\varphi)S(\theta) \Rightarrow e^{i(X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta)\varphi} = e^{-i\theta X_3} e^{i\varphi X_1} e^{i\theta X_3},$$

και αναπτύσσοντας τα εκθετικά έως τον πρώτο όρο για τη γωνία φ παίρνουμε ότι

$$1 + i(X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta)\varphi = e^{-i\theta X_3} (1 + iX_1\varphi) e^{i\theta X_3}$$

$$X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta = e^{-i\theta X_3} X_1 e^{i\theta X_3}.$$



Σχήμα 3.3: Τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων όπου μπορούμε να στραφούμε κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα z και κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα x . Οι δύο αυτές στροφές περιγράφονται από τα στοιχεία $S(\theta)$ και $R_x(\varphi)$ τα οποία είναι και τα δύο στοιχεία της ομάδας $SO(3)$. Αν θέλουμε να περιγράψουμε μία στροφή γύρω από τον άξονα x' τότε, εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις συζυγίας που υπάρχουν για όλα τα στοιχεία μιας Αβελιανής ομάδας, γράφουμε $R_{x'}(\varphi) = S^{-1}(\theta)R_x(\varphi)S(\theta)$.

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας ως προς θ την παραπάνω εξίσωση και ύστερα θέτοντας $\theta = 0$ παίρνουμε ότι

$$[X_3, X_1] = iX_2, \quad (3.18)$$

δηλαδή προκύπτει μία μεταθετική σχέση η οποία συνδέει τους τρεις γεννήτορες μεταξύ τους! Το αποτέλεσμα αυτό όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι πολύ σημαντικό. Σημειώστε ότι με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δουλέψουμε και για τα υπόλοιπα ζεύγη αξόνων του τρισσορθογώνιου συστήματος και να βρούμε τις αντίστοιχες μεταθετικές σχέσεις οι οποίες θα είναι $[X_1, X_2] = iX_3$ και $[X_2, X_3] = iX_1$. Χρησιμοποιώντας και πάλι το σύμβολο Levi-Civita που είδαμε παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τις τρεις μεταθετικές σχέσεις ως μία,

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk}X_k, \quad (3.19)$$

Το πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από την Εξ. (3.19) είναι το εξής: Αν το στοιχείο X_k είναι γεννήτορας της ομάδας $SO(3)$ τότε, γεννήτορας της ομάδας αυτής θα είναι και ο μεταθέτης $[X_i, X_j]$ των άλλων δύο γεννητόρων. Μία άλλη οπτική γωνία από την οποία μπορούμε να δούμε την Εξ. (3.19) είναι το πώς δύο περιστροφές συνδυάζονται μεταξύ τους (μέσω της μεταθετικής σχέσης) έτσι ώστε να μας δώσουν μία τρίτη περιστροφή.

Άσκηση 7: Χρησιμοποιείστε την ίδια μεθοδολογία με αυτή που δουλέψαμε έτσι ώστε καταλήξουμε στην Εξ. (3.18), για να καταλήξετε στις αντίστοιχες μεταθετικές σχέσεις $[X_1, X_2] = iX_3$ και $[X_2, X_3] = iX_1$.

Άσκηση 8: Επιβεβαιώστε την Εξ. (3.19) χρησιμοποιώντας τους πίνακες οι οποίοι αντιστοιχούν στους εκάστοτε γεννήτορες. Θυμίζουμε ότι για την ομάδα $SO(3)$ οι γεννήτορες είναι $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 9: Είδαμε ότι αν X_i και X_j είναι γεννήτορες της ομάδας $SO(3)$ τότε ο μεταθέτης τους $[X_i, X_j]$ είναι επίσης γεννήτορας. Λόγω του ότι ο κανόνας αυτός σύνθεσης νέων γεννητόρων είναι μη-προσεταιριστικός, αποδείξτε ότι για τους γεννήτορες της ομάδας $SO(3)$ ισχύει η ταυτότητα Jacobi. Γενικά, η ταυτότητα Jacobi γράφεται ομάδας $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]$.

Ένα άλλο σημαντικό συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από τις σχέσεις συζυγίας είναι ότι, όλες οι σχέσεις συζυγίας περιγράφουν μία περιστροφή κατά γωνία φ αλλά γύρω από διαφορετικούς άξονες. Από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι οι χαρακτήρες των στοιχείων $R_i(\varphi)$, με $i = 1, 2, 3$, θα είναι κάποια συνάρτηση της γωνίας φ . Πράγματι, από τις Εξ. (3.4)-(3.6) προκύπτει ότι ο χαρακτήρας και των τριών στοιχείων $R_1(\varphi)$, $R_2(\varphi)$ και $R_3(\varphi)$ που περιγράφουν μία στροφή κατά φ γύρω από τους άξονες x, y, z αντίστοιχα, είναι ίδιος και ίσος με

$$\chi(\varphi) = 2\cos\varphi + 1. \quad (3.20)$$

Κλείνοντας την ανάλυσή μας για την ομάδα των special orthogonal πινάκων και πριν περάσουμε στη μελέτη της ομάδας η οποία περιέχει unitary πίνακες με ορίζουσα ίση με τη μονάδα, θα θέλαμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε για τις $SO(2)$ και $SO(3)$ στην ομάδα $SO(n)$. Προφανώς η ομάδα αυτή θα αποτελείται από ορθογώνιους πίνακες $n \times n$ οι οποίοι θα έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα. Έτσι λοιπόν, για τους πίνακες της ομάδας αυτής θα ισχύει ότι $\det O = 1$, καθώς και $OO^T = O^T O = I_n$, η οποία είναι γνωστή ως σχέση ορθογωνιότητας, και από τη σχέση αυτή προκύπτει η πολύ σημαντική ιδιότητα των ορθογώνιων πινάκων $O^T = O^{-1}$. Μία απειροστή γωνία $\theta_n \ll$ γύρω από τον άξονα n , είδαμε ότι μπορούμε να την περιγράψουμε από την Εξ. (3.17) ως $(e^{i\theta_n X_n})_{ab} = \delta_{ab} + i\theta_n (X_n)_{ab}$, όπου έχουμε αμελήσει τους όρους οι οποίοι περιέχουν δυνάμεις του θ_n μεγαλύτερες του 2. Επομένως, για απειροστές αλλαγές του θ_n η σχέση ορθογωνιότητας που αναφέραμε παραπάνω θα γίνεται

$$(O_{ab})(O_{bc}^T) = (\delta_{ab} + i\theta_n (X_n)_{ab})(\delta_{cb} + i\theta_m (X_m)_{cb}) = \delta_{ac} + i\theta_m (X_m)_{ca} + i\theta_n (X_n)_{ac},$$

όπου παραλείψαμε όλους τους όρους δεύτερης τάξης και άνω. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η σχέση ορθογωνιότητας εξ' ορισμού δίνει $(O_{ab})(O_{bc}^T) = \delta_{ac}$. Προσέξτε ότι στην παραπάνω εξίσωση αν και πήραμε ότι οι δύο γωνίες θ_n και θ_m είναι διαφορετικές, στην ουσία είναι απειροστές οπότε μπορούμε να τις θεωρήσουμε ίδιες χωρίς άρση της γενικότητας. Αλλάζοντας λοιπόν το δείκτη από m σε n στο δεύτερο όρο του δεξιού μέρους της ανωτέρω εξίσωσης, καταλήγουμε στο ότι η σχέση ορθογωνιότητας δίνει

$$\delta_{ac} + i\theta_n(X_n)_{ca} + i\theta_n(X_n)_{ac} = \delta_{ac}. \quad (3.21)$$

Από την Εξ. (3.21) καταλήγουμε στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι

$$(X_n)_{ca} = -(X_n)_{ac}, \quad (3.22)$$

δηλαδή οι γεννήτορες της ομάδας $SO(n)$ είναι αντισυμμετρικοί (δείτε και το Παράρτημα). Μιας και τα ανεξάρτητα στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι $n(n-1)/2$, θα λέμε ότι η διάσταση της ομάδας $SO(n)$ θα είναι $n(n-1)/2$, δηλαδή με άλλα λόγια, η ομάδα $SO(n)$ έχει $n(n-1)/2$ γεννήτορες.

Τέλος, σημειώστε ότι η αντισυμμετρικότητα των γεννητόρων για την ομάδα $SO(3)$ φαίνεται ότι μπορεί να προκύψει από την Εξ. (3.19) καθώς και από την Εξ. (3.22), οι οποίες όμως προκύπτουν από διαφορετική αρχή. Με άλλα λόγια, ξεκινώντας με διαφορετική υπόθεση κάθε φορά, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Κρατήστε το αυτό κατά νου καθώς θα φανεί χρήσιμο στη συνέχεια.

3.2 Η ομάδα $SU(n)$

Σε συνέχεια της ανάλυσής μας για τις ομάδες Lie, θα μελετήσουμε την ομάδα $SU(n)$. Ακολουθώντας την ίδια λογική, όπως και για την ομάδα $SO(n)$, θα μελετήσουμε πρώτα τις περιπτώσεις για $n = 2$ και $n = 3$ και ύστερα θα γενικεύσουμε και για $n > 3$. Σημειώνουμε ότι τα βασικά χαρακτηριστικά των unitary πινάκων δίνονται στο Παράρτημα, στο τέλος των σημειώσεων.

Ξεκινώντας λοιπόν την ανάλυσή μας για την ομάδα $SU(2)$, θεωρίστε έναν πίνακα U διαστάσεων 2×2 , οποίος γράφεται,

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$$

όπου τα στοιχεία του πίνακα αυτού είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί. Για να ανήκει ο πίνακας αυτός στο σύνολο των πινάκων $SU(2)$ θα πρέπει να πληρεί τις προϋποθέσεις: $\det U = 1$ και $UU^\dagger = UU^{-1} = I_2 \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$. Ο αντίστροφος πίνακας του U αποδεικνύεται ότι είναι ο $U^{-1} \begin{pmatrix} \nu & -\beta \\ -\mu & \alpha \end{pmatrix}$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $U^\dagger = U^{-1}$ καταλήγουμε στο ότι ο πίνακας U γράφεται

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}.$$

Το γεγονός ότι τα στοιχεία του α και β είναι μιγαδικά σημαίνει ότι χρειαζόμαστε 4 παραμέτρους για να τα περιγράψουμε. Λόγω όμως του επιπλέον περιορισμού που ισχύει για την ορίζουσα του πίνακα αυτού έχουμε ότι $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ καταλήγουμε στο ότι χρειαζόμαστε 3 ανεξάρτητες μεταβλητές για τα στοιχεία του πίνακα U . Με άλλα λόγια, τα στοιχεία ενός τυχαίου πίνακα $U \in SU(2)$ μπορούν να γραφούν από το συνδυασμό τριών ανεξάρτητων μεταβλητών μεταξύ τους,

δηλαδή από όλες τις δυνατές μεταθέσεις που μπορούν να πραγματοποιήσουν τα τρία αυτά στοιχεία, κάτι το οποίο μας θυμίζει έντονα την ομάδα S_3 (περισσότερες πληροφορίες πάνω σε αυτό μπορείτε να βρείτε στην αναφορά [6]).

Εφόσον τα α και β είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί, μπορούμε να τους γράψουμε ως $\alpha = y_0 + iy_3$ και $\beta = y_2 + iy_1$ (η αρίθμηση των δεικτών με το συγκεκριμένο θα γίνει προφανής στη συνέχεια), όπου $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,3$. Από τη σχέση που ισχύει για τα α και β , καταλήγουμε ότι για τα y_i θα ισχύει αντίστοιχα ότι $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Αντικαθιστώντας λοιπόν τα α και β στον πίνακα U παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} y_0 + iy_3 & y_2 + iy_1 \\ -y_2 + iy_1 & y_0 - iy_3 \end{pmatrix} \\ &= y_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + iy_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + iy_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= y_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + iy_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + iy_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + iy_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

όπου ουσιαστικά ο πίνακας U εκφράζεται με τη βοήθεια των πινάκων Pauli. Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, και εφόσον οι αριθμοί y_i είναι τυχαίοι αριθμοί, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο εκάστοτε αριθμός y_i με $i = 1,2,3$ εκφράζει μία στροφή γύρω από άξονα n^i . Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να παραμετροποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιώντας ένα σύστημα τεσσάρων πραγματικών μεταβλητών (φ, n^1, n^2, n^3) όπου $(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$, και να γράψουμε ότι $\alpha = \cos\varphi + in^3\sin\varphi$ καθώς και $\beta = (n^2 + in^1)\sin\varphi$. Θεωρώντας τώρα μία απειροστή μεταβολή στη γωνία φ , δηλαδή $\varphi \ll 1$, και ακολουθώντας την ίδια λογική με την ανάλυση που κάναμε για την ομάδα $SO(3)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1 + in^3\varphi & (n^2 + in^1)\varphi \\ -(n^2 - in^1)\varphi & 1 - in^3\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\varphi \begin{pmatrix} n^3 & 0 \\ 0 & -n^3 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix} + i\varphi \begin{pmatrix} 0 & n^1 \\ n^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\varphi \left[n^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + n^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + n^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= I_2 + i\varphi[n^1\sigma_1 + n^2\sigma_2 + n^3\sigma_3]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Παρατηρείστε λοιπόν από την παραπάνω εξίσωση ότι οι αντίστοιχοι γεννήτορες που θα έχουμε για την ομάδα $SU(2)$ θα είναι οι πίνακες Pauli. Παρ' όλα αυτά, στη διεθνή βιβλιογραφία έχει επικρατήσει, αντί των πινάκων Pauli, να χρησιμοποιούμε ως γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ τους πίνακες

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad \text{με } i = 1,2,3 \tag{3.24}$$

Γνωρίζοντας τις ιδιότητες των πινάκων Pauli, καταλήγουμε στο ότι οι γεννήτορες J_i της ομάδας $SU(2)$ υπακούουν στη σχέση

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (3.25)$$

η οποία είναι η ίδια ακριβώς με την Εξ. (3.19), δηλαδή με τη σχέση στην οποία υπακούουν οι γεννήτορες της ομάδας $SO(3)$. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα και σημαίνει ότι οι δύο ομάδες έχουν παρόμοια δομή, δηλαδή έχουν ίδια άλγεβρα, όπως λέμε στη γλώσσα των μαθηματικών. Σε πλήρη αναλογία και πάλι με τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε για την ομάδα $SO(3)$, εάν θέλουμε να περιγράψουμε μία απειροστή μεταβολή $\vec{\alpha} = (n^1\theta, n^2\theta, n^3\theta)$ στην ομάδα $SU(2)$, τότε αυτή θα περιγράφεται από το γενικό πίνακα

$$U = e^{\frac{1}{2}i\vec{\alpha}\vec{\sigma}}, \quad (3.26)$$

όπου $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ είναι το διάνυσμα Pauli. Αναπτύσσοντας το εκθετικό της Εξ. (3.26) με τη βοήθεια της σειράς Taylor και στη συνέχεια, χωρίζοντας τους άρτιους και τους περιττούς όρους (δείτε πάλι τη μεθοδολογία στη σελ. 41) και παρατηρώντας ότι $(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = I_2$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα

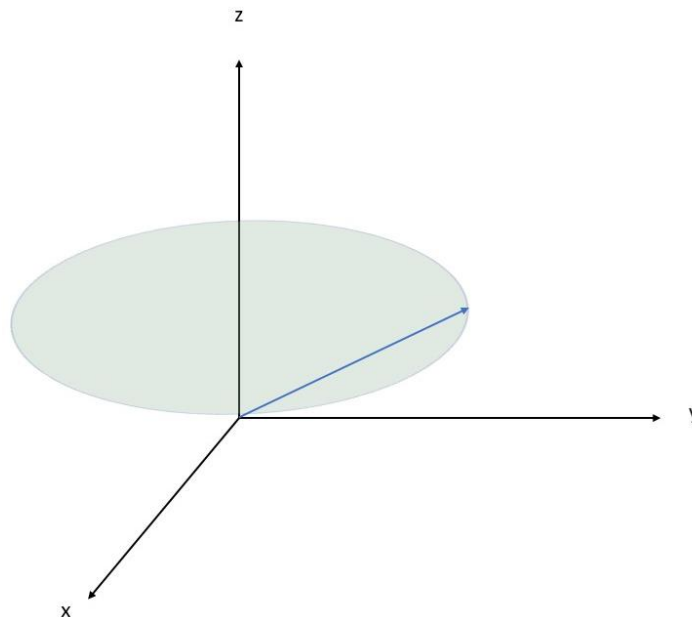
$$U = \cos\frac{1}{2}\theta - i\vec{n}\vec{\sigma}\sin\frac{1}{2}\theta. \quad (3.27)$$

Στη συνέχεια, συγκρίνοντας τις Εξ. (3.16) και (3.26) παρατηρούμε ότι οι στοιχειώδεις μετατοπίσεις στις ομάδες $SO(3)$ και $SU(2)$ μπορούν να περιγραφούν με εντελώς παρόμοιο τρόπο: η μόνη διαφορά είναι ο παράγοντας $1/2$ ο οποίος εμφανίζεται για την ομάδα $SU(2)$. Έτσι λοιπόν, εκμεταλλευόμενοι αυτή την παρατήρηση για τις δύο αυτές ομάδες μπορούμε να βρούμε έναν ομομορφισμό $M: SU(2) \rightarrow SO(3)$ μεταξύ των δύο αυτών ομάδων. Η απεικόνιση M θα είναι ομομορφισμός και όχι ισομορφισμός (δηλαδή δεν θα είναι 1:1 συνάρτηση) μιας και δύο στοιχεία της ομάδας $SU(2)$ θα απεικονίζονται σε ένα στοιχείο της ομάδας $SO(3)$ λόγω του παράγοντα $1/2$ ο οποίος εμφανίζεται στην Εξ. (3.26). Περισσότερα για τον παράγοντα αυτόν θα δούμε στην αμέσως επόμενη παραγράφο. Επομένως, από την παραπάνω ανάλυση και από το γεγονός ότι η ομάδα $SO(3)$ έχει περιοδικότητα 2π , προκύπτει ότι η ομάδα $SU(2)$ θα έχει περιοδικότητα 4π . Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι ο ομομορφισμός M θα είναι 2:1 και έτσι, για παράδειγμα, οι πίνακες I_2 και $-I_2$ της ομάδας $SU(2)$ θα αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο της $SO(3)$, το οποίο θα είναι το I_3 . Πιο συγκεκριμένα, για $\theta = 0$ και για $\theta = 2\pi$ για τα οποία έχουμε $U(0) = I_2$ και $U(2\pi) = -I_2$, έχουν απεικόνιση $R(0) = R(2\pi) = I_3$. Έτσι λοιπόν, το kernel του ομομορφισμού, σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει σε προηγούμενη ενότητα, θα είναι $K = \{U(0), U(2\pi)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Όπως είπαμε παραπάνω, οι ομάδες $SO(3)$ και $SU(2)$ συνδέονται μεταξύ τους με έναν ομομορφισμό M , ο οποίος όπως είδαμε είναι μία συνάρτηση 2:1 λόγω του παράγοντα $1/2$ που εμφανίζεται στην Εξ. (3.26). Αυτός ο παράγοντας εισέρχεται στο εκθετικό της Εξ. (3.26) από τη σύμβαση που κάναμε για τους γεννήτορες, μιας και όπως είπαμε, χρησιμοποιούμε ως

γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ τους J_i αντί για τους πίνακες Pauli σ_i . Θυμίζουμε ότι οι πίνακες Pauli έχουν τις εξής ιδιότητες: i) έχουν ίχνος ίσο με το μηδέν, $\text{Tr}[\sigma_i] = 0$, ii) $\sigma_i^2 = I_2$, iii) έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα, $\det[\sigma_i] = 1$ και iv) αποδεικνύεται ότι οι τελεστές Pauli υπακούουν στην εξίσωση $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$. Από την ιδιότητα iv) που μόλις αναφέραμε, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$, δηλαδή οι πίνακες Pauli υπακούουν στην ίδια σχέση με τους γεννήτορες της ομάδας $SO(3)$ με τη διαφορά ότι τώρα εμφανίζεται ένας επιπλέον παράγοντας 2. Για το λόγο αυτό, θέσαμε παραπάνω ως γεννήτορες της $SU(2)$ τους J_i , τους οποίους ορίσαμε στην Εξ. (3.24).

Παράδειγμα 11: Σκεφτείτε ότι έχουμε ένα διάνυσμα στο χώρο το οποίο περιγράφει μία φυσική ποσότητα (πχ το σπιν ενός σωματιδίου) και θέλουμε να το στρέψουμε κατά μία γωνία θ γύρω από κάποιον άξονα. Χωρίς άρση της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτός ο άξονας είναι ο z , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.4. Προφανώς, αν ολοκληρώσουμε μία στροφή γύρω από αυτό τον άξονα τότε θα πάρουμε το αρχικό μας διάνυσμα, όπως μπορούμε διαισθητικά να καταλάβουμε, αλλά όπως επίσης παίρνουμε από την Εξ. (3.16) μιας και αυτή μας υποδεικνύει $e^{in2\pi} = 1$, όπου n ακέραιος αριθμός. Εφόσον θεωρήσαμε ότι το διάνυσμα αυτό περιγράφει το σπιν ενός σωματιδίου, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ομάδα $SO(3)$ μπορεί να περιγράψει σωματίδια με ακέραιο σπιν. Όμως, για την ομάδα $SU(2)$ ισχύει ότι έχει περιοδικότητα 4π με αποτέλεσμα να μην απαγορεύει στο n να είναι ημιακέραιος. Έτσι, η ομάδα $SU(2)$ μπορεί να περιγράψει σωματίδια με ακέραιο, καθώς και με ημιακέραιο σπιν.



Σχήμα 3.4: Περιστροφή ενός διανύσματος το οποίο περιγράφει μία φυσική ποσότητα (πχ σπιν ενός σωματιδίου) γύρω από τον άξονα z .

Παράδειγμα 12: Θυμίζουμε ότι στην κλασική φυσική η στροφορμή ενός σώματος του οποίου η θέση περιγράφεται από το διάνυσμα \vec{r} και η ορμή του δίνεται από το διάνυσμα \vec{p} , δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = rpsin\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των \vec{r} και \vec{p} . Γράφοντας όμως το εξωτερικό γινόμενο για τη στροφορμή σε μορφή ορίζουσας βρίσκουμε ότι $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$ και $L_z = xp_y - yp_x$.

Τώρα, στην κβαντομηχανική έχουμε δει ότι ισχύουν τα ίδια πράγματα που ισχύουν και στην κλασική φυσική με τη διαφορά ότι στις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε τελεστές αντί για αριθμούς. Θυμίζοντας τη θεμελιώδη σχέση αβεβαιότητα $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, καταλήγουμε στο ότι οι τελεστές της στροφορμής υπακούουν στη μεταθετική σχέση $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$, η οποία είναι ίδια με την Εξ. (3.19) με μόνη διαφορά έναν παράγοντα \hbar . Επιπλέον, για τους τελεστές της στροφορμής αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, ενώ ο τελεστής \vec{L}^2 μετατίθεται με μία μόνο από τις προβολές του, δηλαδή $[\vec{L}^2, L_i] = 0$ με $i = 1,2,3$.

Το πρόβλημα λοιπόν στην κβαντομηχανική είναι να βρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις και τα ιδιοδιανύσματα της στροφορμής. Μιας και στο μικρόκοσμο δε θέλουμε να περιγράψουμε μόνο την τροχιακή στροφορμή \vec{L} , αλλά όπως γνωρίζουμε, έχουμε και το σπιν των σωματιδίων αλλά και τη σύνθεση των δύο αυτών διανυσμάτων, το πρόβλημά μας ανάγεται στην εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων για τελεστές της στροφορμής \vec{J} , οι οποίοι υπακούουν στις μεταθετικές σχέσεις $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ και ισχύει επίσης ότι $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$. Σημειώστε ότι από τη στιγμή που τα J_i δε μετατίθενται μεταξύ τους αυτό σημαίνει ότι δεν περιγράφονται από τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις και δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει ουσιαστικά να χειριστούμε τον τελεστή \vec{J} ως ένα διάνυσμα, και όπως ισχύει και για την τροχιακή στροφορμή, αποδεικνύεται ότι ισχύει $[\vec{J}^2, J_i] = 0$ με $i = 1,2,3$.

Στα περισσότερα βιβλία της κβαντομηχανικής, θεωρούμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε τη συνιστώσα της στροφορμής κατά τον άξονα z . Συμβολίζοντας ως $|m\rangle$ το ιδιοδιάνυσμα του τελεστή J_z και ως m την ιδιοτιμή του παίρνουμε ότι $J_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$. Μιας και ισχύει ότι $[\vec{J}^2, J_z] = 0$, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε ταυτόχρονα με τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του J_z να βρούμε τα αντίστοιχα για τον τελεστή \vec{J}^2 . Συμβολίζοντας, λοιπόν, με β^2 τις ιδιοτιμές του \vec{J}^2 και ως $|\beta, m\rangle$ το συνολικό διάνυσμα βάσης, καταλήγουμε στις σχέσεις ιδιοτιμών

$$\vec{J}^2|\beta, m\rangle = \beta^2\hbar^2|\beta, m\rangle$$

$$J_z|\beta, m\rangle = m\hbar|\beta, m\rangle$$

Στη συνέχεια, για τον προσδιορισμό των τιμών β και m είναι χρήσιμο να ορίσουμε τους τελεστές $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$. Χρησιμοποιώντας τις ήδη γνωστές μεταθετικές σχέσεις, αποδεικνύεται ότι οι νέοι αυτοί τελεστές μετατίθενται με το \vec{J}^2 και πιο συγκεκριμένα υπακούουν στις σχέσεις

$$[\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0,$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}.$$

Ουσιαστικά, οι τελεστές J_{\pm} μεταβάλλουν την τιμή της στροφορμής κατά μήκος του άξονα z . Αυτό φαίνεται παρακάτω, όπου εκμεταλλευόμενοι τις μεταθετικές σχέσεις που μόλις σημειώσαμε, παίρνουμε

$$J_z(J_{\pm}|\beta, m\rangle) = (J_{\pm}J_z + [J_z, J_{\pm}]|\beta, m\rangle) = (J_{\pm}m\hbar \pm \hbar J_{\pm})|\beta, m\rangle = (m \pm 1)\hbar(J_{\pm}|\beta, m\rangle)$$

Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής J_+ παίζει το ρόλο του τελεστή αναβίβασης μιας και μεταβάλλει την τιμή της στροφορμής κατά $+1$ κατά μήκος του άξονα z , ενώ από την άλλη πλευρά, ο τελεστής J_- παίζει το ρόλο του τελεστή καταβίβασης μιας και μεταβάλλει τη συνιστώσα z της στροφορμής κατά -1 . Προφανώς, σε ένα φυσικό σύστημα η διαδικασία αναβίβασης και καταβίβασης της στροφορμής δεν μπορεί να συνεχίζεται επ' αόριστον. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από το γεγονός ότι για μία δεδομένη ιδιοτιμή β έχουμε ότι,

$$\beta^2 \hbar^2 = \langle \beta, m | \vec{J}^2 | \beta, m \rangle = \langle \beta, m | (J_x^2 + J_y^2 + m^2 \hbar^2) | \beta, m \rangle \geq m^2 \hbar^2$$

μιας και $\langle J_x^2 + J_y^2 \rangle \geq 0$. Στην ουσία, η παραπάνω εξίσωση δηλώνει ότι για δεδομένη τιμή του β έχουμε έναν πεπερασμένο αριθμό επιτρεπόμενων τιμών για το m , και έτσι προκύπτει ότι η διαδικασία αναβίβασης και καταβίβασης έχει μία αρχή και ένα τέλος. Όσο αναφορά λοιπόν τον τελεστή αναβίβασης J_+ , αυτός θα δώσει μηδενικό αποτέλεσμα όταν το m πάρει τη μεγαλύτερη επιτρεπτή τιμή του, έστω j , δηλαδή $J_+|\beta, j\rangle = 0$. Προφανώς, αυτή η τιμή j σχετίζεται με τη μεταβλητή β και αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε καλύτερα αν ξαναγράψουμε το \vec{J}^2 συναρτήσει των J_+, J_- και J_z ,

$$\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) - i[J_x, J_y] + J_z^2 = J_-J_+ + J_z(J_z + \hbar), \quad (3.28)$$

μιας και ισχύει ότι $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$. Επομένως, με τη μορφή με την οποία είναι γραμμένος ο τελεστής \vec{J}^2 μπορούμε να δούμε ότι η δράση του πάνω στην κατάσταση $|\beta, j\rangle$ θα δώσει

$$\vec{J}^2|\beta, j\rangle = [J_-J_+ + J_z(J_z + \hbar)]|\beta, j\rangle \Rightarrow \beta^2 = j(j + 1). \quad (3.29)$$

Δουλεύοντας με την ίδια λογική για τον τελεστή καταβίβασης J_- , γνωρίζουμε ότι θα υπάρχει τέτοια τιμή του m έτσι ώστε $J_-|\beta, m\rangle = 0$. Την Εξ. (3.28) μπορούμε να την ξαναγράψουμε ως

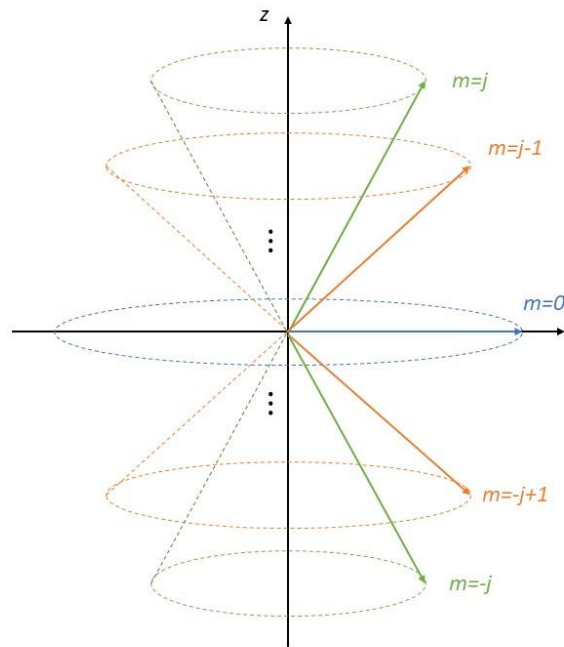
$$\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) - i[J_y, J_x] + J_z^2 = J_+J_- + J_z(J_z - \hbar), \quad (3.30)$$

μιας και $[J_y, J_x] = -i\hbar J_z$. Έτσι, σε αντιστοιχία με την Εξ. (3.29) θα έχουμε

$$\vec{J}^2|\beta, m\rangle = [J_+J_- + J_z(J_z - \hbar)]|\beta, m\rangle \Rightarrow \beta^2 = m(m - 1). \quad (3.31)$$

Για να βρούμε μία σχέση ανάμεσα στο j και στο m εξισώνουμε τις Εξ. (3.29) και (3.31) μεταξύ τους και παίρνουμε ότι $j(j + 1) = m(m - 1)$. Η εξίσωση αυτή δίνει τις λύσεις $m = -j$ και $m = j + 1$. Όμως, από τη στιγμή που έχουμε θεωρήσει ότι το j είναι η μέγιστη τιμή, συμπεραίνουμε ότι η μόνη επιτρεπτή λύση της εξίσωσης είναι για $m = -j$.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα αποτελέσματα για τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης βρήκαμε ότι: οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης μεταβάλλουν την τιμή της προβολής της στροφορμής σε έναν άξονα της επιλογής μας (εδώ επιλέξαμε τον άξονα z) κατά $+1$ ή -1 αντίστοιχα. Η μέγιστη τιμή της προβολής της στροφορμής κατά τον άξονα z θεωρήσαμε ότι είναι η j ενώ η ελάχιστη τιμή είναι η $-j$. Εφόσον οι τελεστές J_+ και J_- μεταβάλλουν κάθε φορά κατά ± 1 την τιμή της προβολής της στροφορμής στον άξονα z συμπεραίνουμε ότι το φάσμα των τιμών της θα είναι $2j + 1$ (δείτε επίσης το Σχ. 3.5). Προφανώς, ο αριθμός των διακριτών τιμών $2j + 1$ θα πρέπει να είναι ακέραιος, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι το j θα είναι και αυτό ακέραιος, αλλά μπορεί να είναι και ημιακέραιος.



Σχήμα 3.5: Οι προβολές του διανύσματος \vec{J} της στροφορμής πάνω στον άξονα z . Οι πιθανές τιμές της προβολής της στροφορμής αποτελούν ένα διακριτό φάσμα με συνολικά $2j + 1$ διαφορετικές τιμές. Ο οριζόντιος άξονας στο σχήμα μας μπορεί να είναι είτε ο x είτε ο y (δεν έχει σημασία στην προκειμένη περίπτωση).

Στη συνέχεια, λόγω της σχέσης που αποδείξαμε ότι ισχύει μεταξύ του β και του j , $\beta^2 = j(j + 1)$ από την Εξ. (3.29), από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε τις καταστάσεις της στροφορμής ως $|j, m\rangle$, όπου j θα είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνιστώσα της στροφορμής, ενώ το m θα παίρνει τιμές στο εύρος $-j \leq m \leq j$. Έτσι λοιπόν, οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης πάνω στην κατάσταση $|j, m\rangle$ θα δίνουν αποτέλεσμα $J_{\pm}|j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle$. Για να ολοκληρώσουμε όμως την ανάλυσή μας θα πρέπει να προσδιορίσουμε και τις σταθερές οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή τελεστών J_+ και J_- πάνω στην κατάσταση $|j, m\rangle$.

Παρατηρείστε κατ' αρχήν ότι $J_+ = (J_-)^\dagger$ και φυσικά ισχύει και το αντίθετο. Έτσι λοιπόν, παίρνοντας το norm για τον τελεστή αναβίβασης, θα είναι

$$\begin{aligned} \|J_+|j, m\rangle\|^2 &= \langle j, m|J_-J_+|j, m\rangle = \langle j, m|[J^2 - J_z(J_z + \hbar)]|j, m\rangle \\ &= \hbar^2 \langle j, m|[j(j+1) - m(m+1)]|j, m\rangle, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την Εξ. (3.28) για να αντικαταστήσουμε το γινόμενο J_-J_+ . Από τα παραπάνω λοιπόν προκύπτει ότι $J_+|j, m\rangle = N|j, m+1\rangle$, με $|N|^2 = \hbar^2[j(j+1) - m(m+1)] = \hbar^2(j-m)(j+m+1)$. Με απροσδιοριστία μίας φάσης για το N (την οποία συμβατικά τη θέτουμε ίση με τη μονάδα) βρίσκουμε τελικά ότι

$$J_+|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle. \quad (3.32)$$

Σε πλήρη αντιστοιχία και με την ανάλογη ανάλυση, βρίσκουμε για τον τελεστή καταβίβασης J_- ,

$$J_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle. \quad (3.33)$$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μία παύση όσο αναφορά την ανάλυση της στροφορμής και θα γυρίσουμε λίγο πίσω, στην ομάδα $SO(3)$. Θυμηθείτε ότι εκεί είχαμε τους γεννήτορες X_1, X_2 και X_3 οι οποίοι υπάκουαν στη μεταθετική σχέση της Εξ. (3.19). Το ίδιο ισχύει και για τους γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ μιας και υπακούουν στη μεταθετική σχέση της Εξ. (3.25). Παρατηρήσαμε λοιπόν προηγουμένως ότι, λόγω του ότι οι γεννήτορες της $SO(3)$ υπακούουν στην ίδια σχέση με αυτούς της $SU(2)$, αυτό συνεπάγεται ότι οι δύο αυτές ομάδες έχουν την ίδια άλγεβρα (την ίδια δομή με άλλα λόγια), δηλαδή μπορούν να περιγράψουν παρόμοια φυσικά συστήματα. Η διαφορά τους ήταν ότι η ομάδα $SO(3)$ είχε περίοδο 2π ενώ η $SU(2)$ είχε 4π . Από τη στιγμή που και οι γεννήτορες της στροφορμής υπακούουν στην ίδια μεταθετική σχέση με εκείνη των $SO(3)$ και $SU(2)$ συμπεραίνουμε ότι οποιοδήποτε πρόβλημα στροφορμής μπορούμε να λυθεί με τη χρήση των ομάδων αυτών. Όμως, από το Παράδειγμα 11 που είδαμε πιο πριν, σημειώσαμε ότι λόγω του ότι η ομάδα $SU(2)$ έχει περίοδο 4π μπορεί να περιγράψει και περιπτώσεις όπου το j είναι ημιακέραιο. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η στροφορμή (τροχιακή ή σπιν) ενός σωματιδίου μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από την ομάδα $SU(2)$.

Πριν συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας για τη στροφορμή αξίζει να πούμε το εξής: Θυμηθείτε από την Ενότητα 2 ότι ένας irrep μιας ομάδας, ο οποίος στην ουσία είναι ένας πίνακας, δεν μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερο. Έτσι λοιπόν στη θεωρία της στροφορμής ο πίνακας ο οποίος αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή του j είναι ένας irrep της ομάδας μας και τα διανύσματα που ορίζει ο irrep αυτός μπορούν χρησιμοποιηθούν ως διανύσματα βάσης όλης της ομάδας, όπως αναλύσαμε και στην Ενότητα 2.

Συνοψίζοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω, είπαμε ότι τα διανύσματα του irrep αποτελούν διανύσματα βάσης της ομάδας, ενώ ο irrep της ομάδας μας ορίζεται για τη μεγαλύτερη τιμή της στροφορμής στον άξονα z , η οποία συμβολίζεται με j . Έτσι φαίνεται φυσικό να ορίσουμε ως

διανύσματα βάσης τα $|j, m\rangle$, όπου $-j \leq m \leq j$. Έτσι λοιπόν, τα στοιχεία των γεννητόρων οι οποίοι θα παράγουν την ομάδα μας, μπορούν να εκφραστούν από τα διανύσματα βάσης $|j, m\rangle$ καθώς και από τη δράση των τελεστών J_z, J_{\pm} πάνω σε αυτά:

$$\begin{aligned}\langle j, m' | J_z | j, m \rangle &= \hbar m \delta_{m'm}, \\ \langle j, m' | J_+ | j, m \rangle &= \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \delta_{m', m+1}, \\ \langle j, m' | J_- | j, m \rangle &= \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m', m-1}.\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να βρούμε λοιπόν τα στοιχεία των πινάκων οι οποίοι ορίζουν μία spin- j αναπαράσταση της άλγεβρας $SU(2)$, τα οποία θα δίνονται από τη σχέση $[J_a^j]_{kl} = \langle j, m' | J_a | j, m \rangle$, όπου $a = \pm, z$ και $-j \leq m, m' \leq j$.

Για παράδειγμα, για $j = 1/2$ θα έχουμε τη spin- $1/2$ αναπαράσταση στην $SU(2)$, η οποία ορίζεται από τους πίνακες $J_1^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1$, $J_2^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2$ και $J_3^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3$, όπου $\sigma_i, i = 1, 2, 3$, οι πίνακες Pauli. Αυτή είναι και η πιο απλή αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$ και για το λόγο αυτό ονομάζεται και defining representation. Ουσιαστικά την αναπαράσταση αυτή την αναλύσαμε και νωρίτερα, οπότε όλα τα αποτελέσματα της αναπαράστασης αυτής, η οποία όπως είδαμε περιγράφει σωματίδια με spin $1/2$, βρίσκονται στις προηγούμενες σελίδες.

Αν τώρα θέλουμε να περιγράψουμε σωματίδια με spin 1 , τότε θα πρέπει να αναζητήσουμε και πάλι μία αναπαράσταση της $SU(2)$ αλλά με διαφορετικές διαστάσεις (θυμηθείτε ότι είχαμε πει σε προηγούμενη ενότητα πως μία ομάδα μπορεί να έχει διαφορετικές αναπαραστάσεις οι οποίες εν γένει είναι διαφορετικών διαστάσεων). Έτσι λοιπόν, μία κατάλληλη αναπαράσταση

για σωματίδια με spin 1 δίνεται από τους πίνακες $J_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$

και $J_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Παρατηρείστε ότι, όπως στην προηγούμενη, έτσι και σε αυτή την

αναπαράσταση τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_3 δίνουν τις τιμές της προβολής του spin πάνω στον άξονα z . Αν αναπαραστήσουμε τα διανύσματα βάσης της εκάστοτε αναπαράστασης με ένα διάνυσμα στήλης τότε θα μπορούμε να μεταβούμε από το ένα διάνυσμα στο άλλο με εφαρμογή των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης.

Στη συνέχεια αν θέλουμε να περιγράψουμε σωματίο με spin $3/2$, όπως είναι για παράδειγμα το gravitino, τότε θα χρειαστούμε μία αναπαράσταση η οποία έχει πίνακες διαστάσεων 4×4 . Το gravitino είναι σωματίο το οποίο προβλέπεται από τη θεωρία της υπερβαρύτητας και θεωρείται το υπερσυμμετρικό ζευγάρι του graviton, το οποίο με τη σειρά του προβλέπεται από την κβαντική βαρύτητα και θεωρείται ο φορέας αλληλεπίδρασης της βαρύτητας. Οι πίνακες της

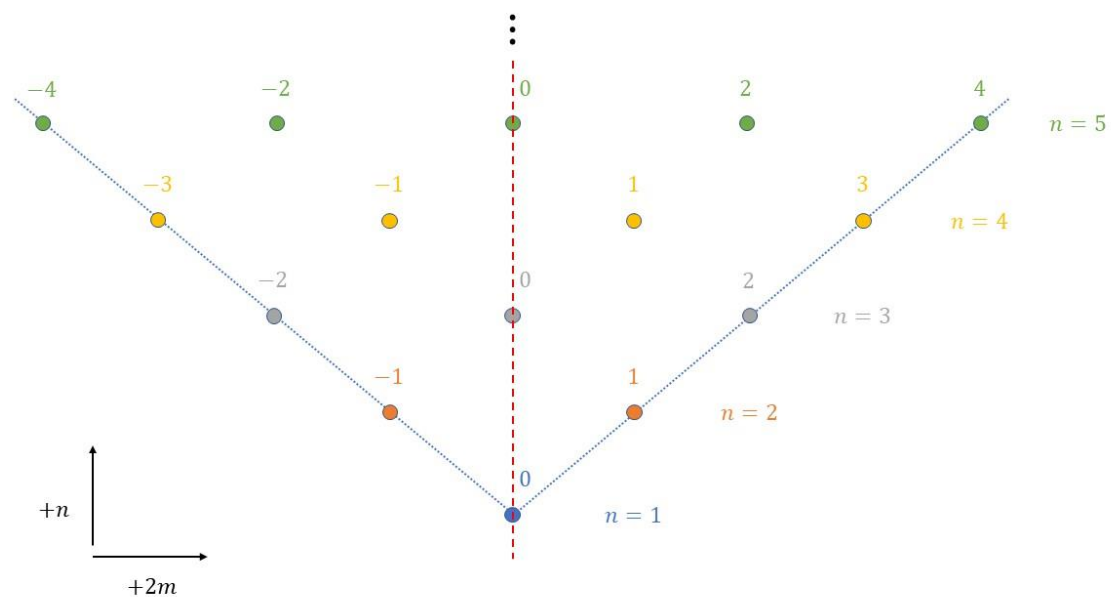
αναπαράστασης για ένα τέτοιο σωματίο θα είναι $J_1^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix}$, $J_2^{3/2} =$

$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 \end{pmatrix}$ και $J_3^{3/2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, όπου βλέπουμε και πάλι ότι τα

διαγώνια στοιχεία δίνουν τις προβολές του σπιν πάνω στον άξονα z .

Παρατηρείστε ότι για σωματίια με σπιν $1/2$ χρειαστήκαμε πίνακες διαστάσεων 2×2 , για σωματίια με σπιν $3/2$ χρειαστήκαμε πίνακες διαστάσεων 3×3 , ενώ για σωματίια με σπιν $3/2$ χρησιμοποιήσαμε πίνακες 4×4 . Επομένως, αν θέλαμε να περιγράψουμε σωματίο με σπιν j τότε θα παίρναμε πίνακες διαστάσεων $(2j + 1) \times (2j + 1)$. Σε πολλά βιβλία τα οποία σχετίζονται με τη θεωρία των ομάδων Lie, η μέγιστη τιμή της προβολής του σπιν πάνω στον άξονα z , j , ονομάζεται highest weight. Η τιμή j παίρνει αυτή την ονομασία μιας και όλες οι υπόλοιπες τιμές, οι οποίες ονομάζονται απλά ως weights, ουσιαστικά παράγονται από αυτή. Παρατηρείστε επίσης ότι η διάσταση των πινάκων των αναπαραστάσεων κάθε φορά καθορίζονταν από τις δυνατές τιμές της προβολής του σπιν, ή αλλιώς από το σύνολο των weights που είχαμε. Αν λοιπόν το σπιν του σωματιδίου μας είναι ακέραιο τότε θα έχουμε περιττό αριθμό από weights, ενώ αν είναι ημιακέραιο τότε θα έχουμε άρτιο αριθμό weights. Τις παρατηρήσεις αυτές μπορούμε να τις συγκεντρώσουμε όλες μαζί και να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα το οποίο λέγεται weight lattice. Συμβολίζοντας με $n = 2j + 1$ τον αριθμό των weights παίρνουμε το weight lattice που φαίνεται στο Σχ. 3.6. Παρατηρείστε στο σχήμα αυτό ότι τα highest weights σε κάθε περίπτωση βρίσκονται στο δεξί μέρος του πλέγματος. Επιπλέον, το πλέγμα αυτό είναι συμμετρικό ως προς την αρχή του: στη συγκεκριμένη περίπτωση η συμμετρία αυτή ονομάζεται Weyl symmetry. Από την ύπαρξη της συγκεκριμένης συμμετρίας προκύπτει ότι κάθε σημείο το οποίο δεν ανήκει στον άξονα συμμετρίας του πλέγματος, έχει και το αντίστοιχο συμμετρικό του, δηλαδή με άλλα λόγια, για κάθε weight m υπάρχει το weight $-m$. Μία ακόμα χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι κινούμαστε αριστερά και δεξιά στο πλέγμα κατά μία ποσότητα $2m$. Πάρτε για παράδειγμα την περίπτωση όπου έχουμε $j = 3/2$: για την περίπτωση αυτή έχουμε weights $3/2, 1/2, -1/2$ και $-3/2$, και επομένως, για να πάμε από το ένα weight στο άλλο βλέπουμε ότι πρέπει να κινηθούμε πάνω στο πλέγμα κατά μία ποσότητα $\pm 2m$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα τρισδιάστατο πρόβλημα το έχουμε αναγάγει σε ένα πρόβλημα δύο διαστάσεων με διακριτά σημεία και συγκεκριμένους κανόνες. Από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι ένας irrep μπορεί να οριστεί για δεδομένο highest weight, τότε βλέπουμε ότι ουσιαστικά με το weight diagram μπορούμε να αναπαραστήσουμε μεγάλο μέρος της πληροφορίας που έχουμε για το spin ενός σωματιδίου. Σημειώστε ότι το weight lattice στη μορφή που δίνεται στο Σχ. 3.6, όπου τα weights ισαπέχουν μεταξύ τους και κάθε weight εμφανίζεται μόνο μία φορά, έχει προκύψει ουσιαστικά για δεδομένο highest weight ενός irrep. Εάν, όμως, είχε προκύψει από μία αναγωγή αναπαράσταση (reducible representation) τότε στο weight lattice θα μπορούσαν να υπάρχουν «τρύπες» (σημεία που δεν αντιπροσωπεύονται από κάποιο weight), τα weights να μην ισαπέχουν μεταξύ τους, καθώς επίσης ένα weight να εμφανίζεται παραπάνω από μία φορά.



Σχήμα 3.6: Το weight lattice για την ομάδα $SU(2)$. Λόγω του ότι το m παίρνει τιμές $-j \leq m \leq j$, παρατηρούμε ότι για κάθε j έχουμε $n = 2j + 1$ τιμές. Παρατηρείστε ότι το highest weight για κάθε περίπτωση βρίσκεται πάνω στη δεξιά μπλε γραμμή. Ο κόκκινος διακεκομμένος άξονας είναι ο άξονας συμμετρίας του πλέγματος και μέσω του οποίου παίρνουμε τη Weyl symmetry. Ουσιαστικά μέσω αυτού του άξονα εμφανίζει κατοπτρική συμμετρία το πλέγμα μας. Στο weight lattice δεν υπάρχουν «τρύπες» (κάθε ακέραιος είναι ουσιαστικά και weight), καθώς επίσης κάθε weight εμφανίζεται μόνο μία φορά.

Παράδειγμα 13: Εφόσον στο Παράδειγμα 12 μελετήσαμε τη στροφορμή J για ένα σύστημα, ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε δύο συστήματα με στροφορμή \vec{J}_1 και \vec{J}_2 αντίστοιχα. Στο Παράδειγμα 12 μελετήσαμε τη στροφορμή του συστήματός μας παίρνοντας την προβολή της πάνω στον άξονα z και χαρακτηρίσαμε την τιμή της προβολής με τη βοήθεια ενός αριθμού m .

Ο αριθμός αυτός είναι γνωστός ως μαγνητικός κβαντικός αριθμός, μιας και όπως είδαμε η προβολή της στροφορμής πάνω σε έναν άξονα (στον z στην προκειμένη περίπτωση) παίρνει διακριτές τιμές. Στην περίπτωση τώρα όπου δύο συστήματα με στροφορμή \vec{J}_1 και \vec{J}_2 το καθένα συνδυάζονται μεταξύ τους, προκύπτει ότι ο συνδυασμός των μαγνητικών τους αριθμών m_1 και m_2 διατηρείται. Ας το δούμε αυτό μέσα από ένα παράδειγμα.

Θεωρείστε για παράδειγμα ότι $\vec{J}_1 \equiv \vec{L}$ είναι η τροχιακή στροφορμή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου, ενώ $\vec{J}_2 \equiv \vec{S}$ είναι το σπιν του. Σε μία πρώτη προσέγγιση η Χαμιλτονιανή του συστήματός μας είναι ανεξάρτητη του σπιν και παραμένει αναλλοίωτη για περιστροφές στο χώρο, δηλαδή $[H, \vec{J}_1] = [H, \vec{J}_2] = 0$. Σε μία ακριβέστερη όμως περιγραφή του ατόμου του υδρογόνου, πρέπει να πάρουμε υπόψιν την αλληλεπίδραση $\vec{L} \cdot \vec{S}$ (spin-orbit coupling), με αποτέλεσμα η Χαμιλτονιανή του συστήματός μας να παραμένει αναλλοίωτη μόνο για ταυτόχρονη περιστροφή των καταστάσεων της τροχιακής στροφορμής και του σπιν, μιας και $[H, \vec{J}] = 0$, όπου $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \equiv \vec{L} + \vec{S}$ είναι ο τελεστής της συνολικής στροφορμής. Από την παραπάνω ανάλυση, τα αποτελέσματα της οποίας μας είναι ήδη γνωστά (πχ από το μάθημα της Κβαντομηχανικής ή της Ατομικής και Μοριακής Φυσικής), προκύπτει η ανάγκη επαναπροσδιορισμού των καταστάσεων της συνολικής στροφορμής. Θα συμβολίσουμε τις καταστάσεις της συνολικής στροφορμής ως $|(j_1 j_2) j, m\rangle$, όπου στην παρένθεση έχουμε βάλει τα j_1 και j_2 για να θυμόμαστε ότι το συνολικό j έχει προέλθει από τη σύνθεσή τους. Όμως, μιας και η συνολική στροφορμή αποτελεί σύνθεση των διανυσμάτων \vec{J}_1 και \vec{J}_2 συμπεραίνουμε ότι οι καταστάσεις της συνολικής στροφορμής $|(j_1 j_2) j, m\rangle$ θα μπορούν να γραφούν ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $|j_1, m_1\rangle$ και $|j_2, m_2\rangle$. Με άλλα λόγια, οι νέες καταστάσεις της στροφορμής, οι οποίες θα δίνονται ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$, θα πρέπει να είναι ιδιοκαταστάσεις της συνολικής στροφορμής \vec{J}^2 , καθώς και της προβολής αυτής στον άξονα z , J_z . Τις καταστάσεις λοιπόν αυτές θα τις συμβολίσουμε ως $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$. Μιας και ο τελεστής \vec{J}_1 θα δρα μόνο πάνω στην κατάσταση $|j_1, m_1\rangle$, ενώ ο \vec{J}_2 στην $|j_2, m_2\rangle$, τότε η δράση του συνολικού τελεστή της στροφορμής γίνεται πιο κατανοητός αν τον γράψουμε $\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \vec{J}_2$, όπου I κάθε φορά ο μοναδιαίος τελεστής του εκάστοτε χώρου Hilbert.

Ακολουθώντας τα βήματα του Παραδείγματος 12, θα διαλέξουμε και πάλι τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το μαγνητικό αριθμό m του συστήματός μας, ο οποίος στην περίπτωση αυτή θα είναι $m = j_1 + j_2$. Επομένως, η εξίσωση ιδιοτιμών για τη συγκεκριμένη τιμή του μαγνητικού αριθμού θα είναι

$$J_z |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle = \hbar(j_1 + j_2) |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle.$$

Στη συνέχεια, συμβολίζοντας το συνολικό τελεστή αναβίβασης ως J_+ και γνωρίζοντας ότι $J_{1+} |j_1, j_1\rangle = 0$ καθώς και $J_{2+} |j_2, j_2\rangle = 0$, παίρνουμε ότι

$$J_+ |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle = 0,$$

όπου $J_+ = J_{1+} \otimes I_2 + I_1 \otimes J_{2+}$. Αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση της συνολικής στροφορμής με $m = j_1 + j_2$ είναι το highest weight για την περίπτωση αυτή. Επομένως, αυτό με τη σειρά του, σημαίνει ότι ο μαγνητικός αριθμός της συνολικής στροφορμής, m , θα παίρνει τιμές που θα κυμαίνονται από $j_1 + j_2$ έως $-(j_1 + j_2)$ και το m θα μεταβάλλεται κατά μονάδα κάθε φορά. Σε πλήρη αναλογία με ότι είπαμε για τον τελεστή αναβίβασης, προκύπτει ότι ο τελεστής καταβίβασης της συνολικής στροφορμής θα είναι ο $J_- = J_{1-} \otimes I_2 + I_1 \otimes J_{2-}$.

Προσέξτε όμως τώρα το εξής: στην τιμή του μαγνητικού αριθμού $m = j_1 + j_2 - 1$ αντιστοιχεί και η κατάσταση $|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle$, αλλά και η $|j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$. Αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$ της συνολικής στροφορμής θα πρέπει να δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των $|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle$ και $|j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$, και έστω ότι ο γραμμικός αυτός συνδυασμός είναι ο $\alpha|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + \beta|j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$. Στη συνέχεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε στο γραμμικό αυτό συνδυασμό τον τελεστή αναβίβασης της συνολικής στροφορμής J_+ , έτσι ώστε να πάρουμε

$$J_+(\alpha|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + \beta|j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle) = \hbar(\alpha\sqrt{2j_1} + \beta\sqrt{2j_2})|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle.$$

Εάν εμείς επιλέξουμε τους συντελεστές α και β έτσι ώστε το δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης να μηδενίζεται, δηλαδή $\alpha = -\beta\sqrt{j_2/j_1}$, αυτό σημαίνει ότι έχουμε ένα σύστημα του οποίου η συνολική στροφορμή έχει μέγιστη τιμή για το $m = j_1 + j_2 - 1$, μιας και η εφαρμογή του τελεστή αναβίβασης J_+ έδωσε μηδενικό αποτέλεσμα στην παραπάνω εξίσωση, ότι ακριβώς γίνεται δηλαδή όταν ο τελεστής αυτός εφαρμόζεται στην κατάσταση με τη μέγιστη δυνατή τιμή του m . Έτσι λοιπόν, στην περίπτωση αυτή η κατάσταση της συνολικής στροφορμής με το highest weight θα είναι η $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$, δηλαδή θα είναι $j = j_1 + j_2 - 1$.

Με την ίδια ακριβώς λογική μπορούμε να δουλέψουμε για την περίπτωση όπου $m = j_1 + j_2 - 2$, δηλαδή να κατασκευάσουμε την κατάσταση της συνολικής στροφορμής με τη συγκεκριμένη τιμή του m έτσι ώστε να μηδενίζεται με την εφαρμογή του τελεστή αναβίβασης J_+ . Τη διαδικασία αυτή μπορούμε να την επαναλάβουμε προφανώς και για όλα τα υπόλοιπα m μέχρι να ξεμείνουμε από διαθέσιμες καταστάσεις, κάτι το οποίο συμβαίνει για $j = |j_1 - j_2|$. Σημειώστε ότι σε κάθε τιμή του j αντιστοιχούν $2j + 1$ καταστάσεις, κάτι το οποίο είδαμε και στο Παράδειγμα 12, και έτσι οι συνολικές καταστάσεις της στροφορμής θα είναι

$$\sum_{|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1) = \dots = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1). \quad (3.34)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό μιας και μας λέει ότι το γινόμενο του συνόλου των δυνατών καταστάσεων των στροφορμών \vec{J}_1 και \vec{J}_2 ισούται με το σύνολο των καταστάσεων που έχουμε για στροφορμή $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Συμβολίζοντας τώρα ως $D^{(j_1)}$ την αναπαράσταση της ομάδας η οποία περιγράφει τη στροφορμή \vec{J}_1 και ως $D^{(j_2)}$ την αναπαράσταση της ομάδας η οποία περιγράφει τη στροφορμή \vec{J}_2 , τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξ. (3.34) ως

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \oplus D^{(j)}, \quad (3.35)$$

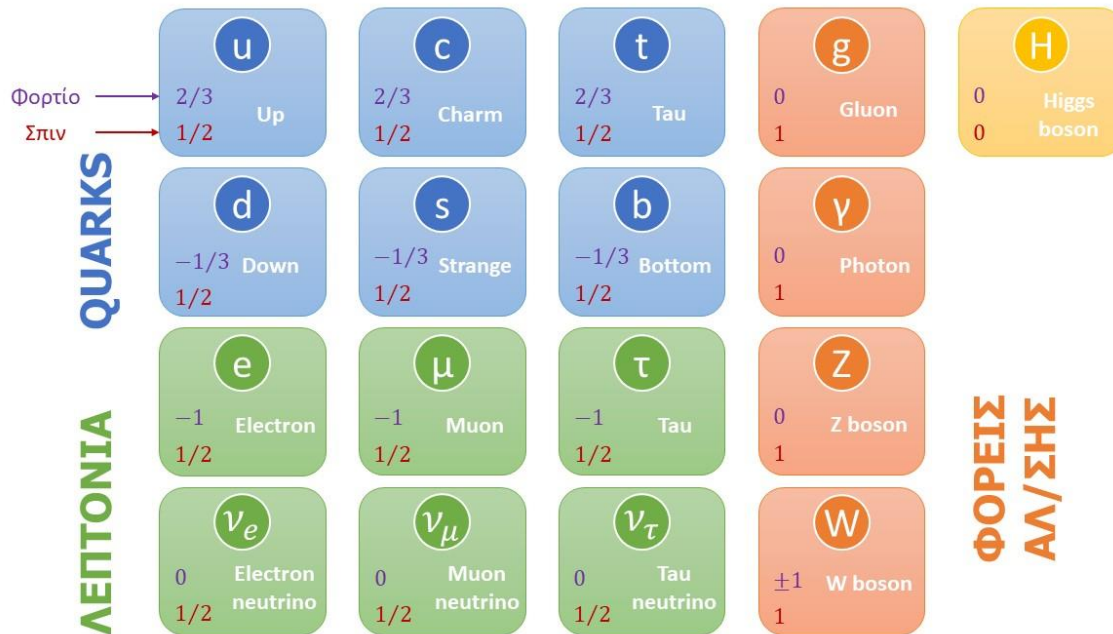
όπου $D^{(j)}$ η αναπαράσταση της ομάδας που περιγράφει τη συνολική στροφορμή του συστήματος. Η Εξ. (3.35) είναι πολύ σημαντική και ονομάζεται σειρά Clebsch-Gordan. Στην ουσία η σειρά Clebsch-Gordan αναλύει το τανυστικό γινόμενο $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ στο ευθύ άθροισμα των irreps που το αποτελούν, $\sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \oplus D^{(j)}$. Οι συντελεστές α, β, \dots που βρήκαμε κατά την ανάλυσή μας ονομάζονται συντελεστές Clebsch-Gordan. Πιο συγκεκριμένα, είδαμε από την παραπάνω ανάλυση ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως διανύσματα βάσης της συνολικής στροφορμής τις καταστάσεις $|(j_1 j_2) j, m\rangle$. Τα διανύσματα αυτά μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ (τα οποία όπως είπαμε αποτελούν ιδιοδιανύσματα των εκάστοτε τελεστών $\vec{J}_1, J_{1z}, \vec{J}_2$ και J_{2z}) στη μορφή

$$|(j_1 j_2) j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle, \quad (3.36)$$

όπου $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$ οι συντελεστές Clebsch-Gordan. Προφανώς, για τους δείκτες ισχύει ότι $-j_1 \leq m_1 \leq j_1, -j_2 \leq m_2 \leq j_2$ καθώς και $m = m_1 + m_2$. Για δεδομένο λοιπόν j και για να κατασκευάσουμε τις καταστάσεις οι οποίες περιγράφουν τη συνολική στροφορμή, ξεκινάμε από την κατάσταση με το μέγιστο δυνατό $m, |(j_1 j_2) j, j\rangle$ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε το συνολικό τελεστή καταβίβασης $J_- = J_{1-} + J_{2-}$, σε αναλογία δηλαδή με ότι κάναμε στο Παράδειγμα 12. Επομένως η σύνθεση δύο οποιονδήποτε στροφορμών μπορεί να περιγραφεί από τις Εξ. (3.35)-(3.36).

Παράδειγμα 14: Σαν ένα τελευταίο παράδειγμα στην ομάδα $SU(2)$ θα δούμε πώς αυτή εφαρμόζεται στο ισοσπίν των σωματιδίων. Από τα έως τώρα δεδομένα γνωρίζουμε ότι όλα τα σωματίδια που εμφανίζονται στη φύση περιγράφονται από το Καθιερωμένο Μοντέλο (Standard Model). Τα στοιχειώδη λοιπόν σωματίδια της φύσης φαίνονται στο Σχήμα 3.7. Από το συνδυασμό των συγκεκριμένων σωματιδίων, και πιο συγκεκριμένα των quarks και των λεπτονίων, παράγονται και όλα τα υπόλοιπα, τα οποία είναι γνωστά ως αδρόνια (hadrons).

Στη Φυσική επίσης, είναι γνωστό ότι υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, σε ένα σύστημα υπάρχουν κάποιοι νόμοι διατήρησης. Γνωρίζουμε, για παράδειγμα, ότι η ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται καθώς επίσης και η στροφορμή του. Αν περάσουμε στην περίπτωση των συγκρούσεων μεταξύ δύο ή περισσότερων σωματιδίων, έχουμε διαπιστώσει ότι υπάρχουν νόμοι διατήρησης για το σπιν, το βαρυονικό αριθμό, το λεπτονικό αριθμό κτλ. Έναν τέτοιο νόμο διατήρησης έχουμε και για το ισοσπίν των σωματιδίων.



Σχήμα 3.7: Το Καθιερωμένο Μοντέλο (Standard Model) αποτελείται από τα στοιχειώδη σωματίδια της φύσης. Ανάλογα με τις ιδιότητες που έχει καθένα από τα στοιχειώδη αυτά σωματίδια, μπορούμε να τα κατηγοριοποιήσουμε ανάλογα με το φορτίο, τη μάζα, το σπιν, το ισοσπίν, το βαρυονικό ή το λεπτονικό αριθμό τους κτλ, σε ομάδες, έτσι ώστε να μελετάμε κάθε φορά την ιδιότητα η οποία μας ενδιαφέρει.

Από την Πυρηνική Φυσική γνωρίζουμε ότι το ισοσπίν των σωματιδίων είναι ένας κβαντικός αριθμός (δηλαδή ποσότητα η οποία διατηρείται), η οποία σχετίζεται με την ισχυρή αλληλεπίδραση, μία από τις τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης. Περισσότερες λεπτομέρειες για την ανάγκη ορισμού του ισοσπίν μπορεί κανείς να βρει σε κάποιο βιβλίο Πυρηνικής Φυσικής, αλλά είναι πέρα από τους σκοπούς μας. Αυτό που μας ενδιαφέρει στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι ο κβαντικός αριθμός για το ισοσπίν συμβολίζεται με I και, όπως στην περίπτωση της στροφορμής, θεωρούμε ότι η προβολή του περιγράφεται από τον τελεστή I_3 . Έτσι λοιπόν, θεωρούμε ότι το I έχει την τιμή $1/2$ για τα κουάρκ up και down, ενώ είναι μηδέν για όλα τα υπόλοιπα κουάρκ. Συγκεκριμένα, η προβολή του ισοσπίν για το κουάρκ up είναι $I_3 = +1/2$, ενώ για το κουάρκ down είναι $I_3 = -1/2$. Τα αντίστοιχα αντικουάρκ, τα οποία συμβολίζονται ως \bar{u} και \bar{d} θα έχουν ισοσπίν $-1/2$ και $+1/2$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η προβολή του ισοσπίν η οποία περιγράφεται από τον τελεστή I_3 θα έχει τιμή $I_3 = [N(u) - N(\bar{u}) - (N(d) - N(\bar{d}))]$, όπου $N(\dots)$ είναι κάθε φορά το πλήθος του εκάστοτε κουάρκ, καθώς επίσης έχουμε συμβολίσει με u το κουάρκ up και με d το κουάρκ down. Με βάση λοιπόν το ισοσπίν, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε ορισμένα από τα αδρόνια έτσι ώστε να μετασχηματίζεται το ένα στο άλλο με τη βοήθεια της ομάδας $SU(2)$. Έχουμε λοιπόν για παράδειγμα:

- i. Τα νουκλεόνια τα οποία απαρτίζουν τους πυρήνες όλων των στοιχείων. Συμβολίζοντας με p το πρωτόνιο και με n το νετρόνιο μπορούμε να γράψουμε $p = uud$ και $n = udd$, μιας και το εκάστοτε νουκλεόνιο αποτελείται από τρία κουάρκ. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι τα p και n είναι μέρος μίας διπλέτας η οποία έχει ισοσπίν $I = 1/2$ και το p έχει $I_3 = +1/2$, ενώ το n έχει $I_3 = -1/2$. Ακολουθώντας το συμβολισμό των προηγούμενων παραδειγμάτων μπορούμε να γράψουμε $p = |1/2, 1/2\rangle$ και $n = |1/2, -1/2\rangle$. Παρατηρείστε ότι σε πλήρη αναλογία με τα σωματίδια με σπιν $1/2$, μπορούμε να θεωρήσουμε την τιμή $1/2$ του I_3 ως το highest weight και να μελετήσουμε με τελείως ανάλογο τρόπο τα νουκλεόνια.
- ii. Τα πιόνια π^-, π^0, π^+ . Τα πιόνια αποτελούνται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ, και πιο συγκεκριμένα είναι $\pi^+ = -u\bar{d}$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ και $\pi^- = d\bar{u}$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε τα πιόνια ότι έχουν $I = 1$ και να τα συμβολίσουμε ως $\pi^+ = |1, 1\rangle$, $\pi^0 = |1, 0\rangle$ και $\pi^- = |1, -1\rangle$. Προσέξτε ότι στην περίπτωση των πιονίων μπορούμε να κάνουμε και μία εφαρμογή της Εξ. (3.35). Είπαμε ότι τα πιόνια αποτελούνται από το συνδυασμό δύο κουάρκ, όπου όμως το κάθε ένα έχει ισοσπίν $I = 1/2$, δηλαδή το πρώτο μέρος της Εξ. (3.35) γίνεται $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)}$, ή σε πιο «χαλαρό» συμβολισμό $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$. Εφόσον τα κουάρκ αυτά έχουν μέγιστη τιμή $I_3 = 1/2$ αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα του συνδυασμού τους θα είναι μία αναπαράσταση με I μεταξύ των τιμών $I_3 + I_3 = 1$ και $|I_3 - I_3| = 0$, δηλαδή το δεύτερο μέρος της Εξ. (3.35) θα γράφεται $D^{(1)} \oplus D^{(0)}$, ή ξανά σε πιο «χαλαρό» συμβολισμό $1 \oplus 0$. Προφανώς, η αναπαράσταση με ισοσπίν $I = 1$ περιλαμβάνει τα πιόνια που αναφέραμε παραπάνω, ενώ η αναπαράσταση με ισοσπίν $I = 0$ μπορεί να περιλαμβάνει ένα συμμετρικό συνδυασμό των κουάρκ, όπως είναι ο $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$.
- iii. Τα ίδια τα κουάρκ u και d . Για τα κουάρκ αυτά όπως είπαμε έχουμε ισοσπίν $I = 1/2$ και έτσι μπορούμε να τα συμβολίσουμε ως $u = |1/2, 1/2\rangle$ και $d = |1/2, -1/2\rangle$, σε πλήρη αντιστοιχία με τα νουκλεόνια. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε όλα τα άλλα κουάρκ ως singlets με $I = 0$ (ανάλογα με την περίπτωση των σωματιδίων χωρίς σπιν).

Πριν προχωρήσουμε σε ένα τελευταίο παράδειγμα για την ομάδα $SU(N)$, το οποίο θα είναι η ομάδα $SU(3)$, θα συγκεντρώσουμε ό,τι είπαμε για τις ομάδες $SU(2)$ και $SO(3)$, και θα γενικεύσουμε για τις ομάδες Lie.

Είδαμε λοιπόν προηγουμένως ότι οι ομάδες $SU(2)$ και $SO(3)$ είναι ισόμορφες μεταξύ τους και μοιράζονται την ίδια άλγεβρα, δηλαδή οι γεννήτορές τους υπακούουν στις ίδιες σχέσεις. Θυμηθείτε τώρα ότι οι γεννήτορες της $SO(3)$ υπακούουν στην Εξ. (3.10), ενώ αν θέλουμε να περιγράψουμε τη στροφή ενός διανύσματος \vec{X} κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα n τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (3.16). Θεωρείστε τώρα ότι θέλουμε να περιγράψουμε δύο συνεχόμενες περιστροφές οι οποίες περιγράφονται από τους πίνακες $R(\vec{\alpha})$ και $R(\vec{\beta})$. Λόγω του ότι οι πίνακες αυτοί αποτελούν στοιχεία ομάδας, το αποτέλεσμά τους θα είναι μία τελική

περιστροφή $\vec{\gamma}$, δηλαδή $R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta}) = R(\vec{\gamma})$. Αναπτύσσοντας λοιπόν το γινόμενο αυτό παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta}) &= (I + ia_k X_k + \mathcal{O}(a^2))(I + i\beta_l X_l + \mathcal{O}(\beta^2)) \\ &= I + ia_k X_k + i\beta_l X_l - a_k \beta_l X_k X_l + \mathcal{O}(a^2) + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= I + (\alpha + \beta)_k X_k - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)_k (\alpha + \beta)_l X_k X_l - \frac{1}{2}a_k \beta_l [X_k, X_l] + \mathcal{O}(a^2) + \mathcal{O}(\beta^2), \end{aligned}$$

όπου για να πάμε από τη δεύτερη στην τρίτη σειρά μετονομάσαμε το δείκτη του τρίτου όρου ($i\beta_l X_l \rightarrow i\beta_k X_k$), καθώς επίσης παρατηρήσαμε ότι

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_k (\alpha + \beta)_l X_k X_l + \frac{1}{2}a_k \beta_l [X_k, X_l] \\ &= \frac{1}{2}[(a_k \beta_l + \beta_k a_l)X_k X_l + a_k \beta_l X_k X_l - a_k \beta_l X_l X_k] \\ &= \frac{1}{2}(a_k \beta_l X_k X_l + \beta_k a_l X_k X_l + a_k \beta_l X_k X_l - a_k \beta_l X_l X_k) \\ &= a_k \beta_l X_k X_l, \end{aligned}$$

όπου και πάλι στην τρίτη σειρά μετονομάσαμε τους δείκτες $k \leftrightarrow l$ με αποτέλεσμα ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος να αλληλοαναιρούνται. Έτσι λοιπόν, με τη μορφή που γράψαμε το γινόμενο $R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta})$ φαίνεται σαν οι τρεις πρώτοι όροι να έχουν προέλθει από το ανάπτυγμα $e^{i(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\vec{X}}$, κάτι το οποίο είναι το επιθυμητό, όπως αναφέραμε και μόλις παραπάνω $R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta}) = R(\vec{\gamma}) \Rightarrow e^{i(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\vec{X}} = e^{i\vec{\gamma}\vec{X}}$, με $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Για να μπορούμε όμως να αναπτύξουμε το εκθετικό $e^{i\vec{\gamma}\vec{X}}$ σαν μια δυναμοσειρά, θα πρέπει να ισχύει ότι $[X_i, X_j] = ic_{ij}^k X_k$, όπου c_{ij}^k είναι κάποιο σταθεροί συντελεστές για τα διάφορα i, j, k και είναι γνωστές ως structure constants (συμβολίσαμε τις σταθερές c_{ij}^k έτσι ώστε οι δύο δείκτες των γεννητόρων που εμφανίζονται στο μεταθέτη να εμφανίζονται στο κάτω μέρος, ενώ ο εναπομείναντας δείκτης να είναι πάνω). Στην ουσία οι σταθερές αυτές είναι που καθορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων και κατ' επέκταση της άλγεβρας μας. Συγκεκριμένα, για την ομάδα $SO(3)$ είδαμε ότι το ρόλο των structure constants τον έπαιζε το σύμβολο Levi-Civita. Σύμφωνα με όσα είπαμε, μπορούμε να δούμε τελικά ότι το $\vec{\gamma}$ θα γράφεται

$$\gamma_k = \alpha_k + \beta_k + \frac{i}{2}c_{mn}^k \alpha_m \beta_n - \frac{1}{12}(\alpha_m \alpha_n \beta_p + \beta_m \beta_n \alpha_p)c_{mq}^k c_{np}^q + \dots,$$

δηλαδή τα structure constants είναι τέτοια ώστε τα στοιχεία της ομάδας να υπακούουν στην ταυτότητα Baker-Campbell-Hausdorff, ή αλλιώς BCH, την οποία είδαμε και στην Άσκηση 6. Αυτή είναι μία γενική ιδιότητα την οποία θα πρέπει να έχουν όλες οι ομάδες Lie και όχι μόνο η $SO(3)$. Επαναδιατυπώνοντας λοιπόν το παραπάνω συμπέρασμα, αν X, Y, Z είναι στοιχεία μία ομάδας

Lie και τα οποία (εν γένει) δε μετατίθενται μεταξύ τους, από το γεγονός ότι πρέπει να ισχύει η σχέση $e^X e^Y = e^Z$, προκύπτει ότι

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots \quad (3.37)$$

Επιπλέον, είπαμε ότι οι γεννήτορες της ομάδας Lie θα πρέπει να υπακούουν στην εξίσωση $[X_i, X_j] = i c_{ij}^k X_k$. Επομένως, οι γεννήτορες X_i μαζί με τη μεταθετική σχέση $[X_i, X_j] = i c_{ij}^k X_k$ ορίζουν μία άλγεβρα, την οποία ονομάζουμε άλγεβρα Lie. Αν τώρα υπάρχουν πίνακες A_i που να υπακούουν στη μεταθετική αυτή σχέση, τότε θα αποτελούν απεικόνιση της άλγεβρας αυτής. Το γεγονός ότι για την ομάδα $SO(3)$ οι γεννήτορες συσχετιζόνταν μεταξύ τους με το σύμβολο Levi-Civita ε_{ijk} , το οποίο συνέπιπτε να είναι και το structure constant c_{ij}^k της ομάδας, είναι σύμπτωση και δεν ισχύει για κάθε ομάδα Lie, δηλαδή εν γένει $c_{ij}^k \neq \varepsilon_{ijk}$. Ουσιαστικά λοιπόν, τα structure constants c_{ij}^k ορίζουν τον κανόνα πολλαπλασιασμού (δηλαδή την πράξη) με τον οποίο είναι εφοδιασμένη η εκάστοτε ομάδα.

Επιπλέον, τα structure constants θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες. Είδαμε, για παράδειγμα, στην Άσκηση 9 ότι οι γεννήτορες της $SO(3)$ θα πρέπει να ικανοποιούν την ταυτότητα Jacobi. Αν τώρα εφαρμόσουμε την ταυτότητα Jacobi για γεννήτορες μίας τυχαίας ομάδας Lie, οι οποίοι προφανώς θα υπακούουν την εξίσωση $[X_i, X_j] = i c_{ij}^k X_k$, τότε θέτοντας $A = X_i, B = X_j$ και $C = X_k$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] &= 0 \Rightarrow [[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0 \\ &\Rightarrow i[c_{ij}^m X_m, X_k] + i[c_{jk}^m X_m, X_i] + i[c_{ki}^m X_m, X_j] = 0 \\ &\Rightarrow c_{ij}^m [X_m, X_k] + c_{jk}^m [X_m, X_i] + c_{ki}^m [X_m, X_j] = 0 \\ &\Rightarrow i c_{ij}^m c_{mk}^n X_n + i c_{jk}^m c_{mi}^n X_n + i c_{ki}^m c_{mj}^n X_n = 0 \\ &\Rightarrow c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

όπου στην ουσία είναι μία άλλη μορφή της ταυτότητας Jacobi. Για την ομάδα $SO(3)$ η Εξ. (3.38) γίνεται $\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{mkn} + \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{min} + \varepsilon_{kim} \varepsilon_{mjn} = 0$. Τονίζουμε σε αυτό το σημείο ότι για τις περιπτώσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε εδώ, τα structure constants είναι αντισυμμετρικά (υπάρχουν και περιπτώσεις που αυτό δεν ισχύει αλλά είναι πέρα από τους σκοπούς του μαθήματος). Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιώντας την αντισυμμετρικότητα των structure constants, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξ. (3.38) ως

$$\begin{aligned} c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n &= 0 \\ \Rightarrow -c_{ij}^m c_{km}^n + c_{kj}^m c_{im}^n - c_{ik}^m c_{mj}^n &= 0 \\ \Rightarrow c_{ij}^m c_{km}^n - c_{kj}^m c_{im}^n + c_{ik}^m c_{mj}^n &= 0. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, αν ορίσουμε $n \times n$ πίνακες T_i οποίοι είναι ανήκουν σε μία ομάδα Lie, έτσι ώστε $(T^k)_{ij} = -ic_{ij}^k$, τότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση αποδεικνύεται ότι θα πάρουμε και πάλι την εξίσωση $[T_i, T_j] = ic_{ij}^k T_k$. Ο ορισμός, όπου θέσαμε $(T^k)_{ij} = -ic_{ij}^k$, ονομάζεται fundamental representation της ομάδας Lie, ενώ η σχέση $[T_i, T_j] = ic_{ij}^k T_k$, η οποία όπως είπαμε δίνει την άλγεβρα της ομάδας, ονομάζεται adjoint representation. Παρατηρείστε ότι για την ομάδα $SO(3)$ ο fundamental και ο adjoint representation συμπίπτουν (αυτό εν γένει δεν συμβαίνει στις ομάδες Lie). Επιπλέον, σημειώστε ότι ο adjoint representation της $SO(3)$ συμπίπτει με εκείνον της $SU(2)$, κάτι το οποίο σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε είναι αναμενόμενο μιας και οι δύο ομάδες είναι ισόμορφες και μοιράζονται την ίδια αλγεβρική δομή.

Εφόσον λοιπόν δώσαμε κάποιους γενικούς, αλλά πολύ σημαντικούς ορισμούς των ομάδων Lie, και επιπλέον έχουμε δει κάποια παραδείγματα για την ομάδα $SU(2)$, είμαστε έτοιμοι να δούμε την ομάδα $SU(3)$.

Μέχρι τώρα, στα παραδείγματα που έχουμε δει στις ομάδες Lie ξεκινήσαμε την ανάλυσή μας από το επίπεδο $[SO(2)]$ ή από τον τρισδιάστατο χώρο $[SO(3)$ και $SU(2)]$. Αν και για την ομάδα $SU(2)$ είδαμε και κάποιες άλλες εφαρμογές, η αρχική μας ανάλυση είχε να κάνει με τις στροφές ενός διανύσματος στον τρισδιάστατο χώρο. Όμως, για την ομάδα $SU(3)$ δεν υπάρχει κάποιο αντίστοιχο παράδειγμα από τον τρισδιάστατο χώρο (ούτε ακόμα και από τον τετραδιάστατο). Η ανάγκη να μελετήσουμε την ομάδα $SU(3)$ έρχεται από το Καθιερωμένο Μοντέλο. Όπως είδαμε και πριν, μελετώντας το ισοσπίν των στοιχειωδών σωματιδίων, μπορούμε να βρούμε ομάδες αδρονίων (στοιχείων δηλαδή που συντίθενται από τα στοιχειώδη σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου) των οποίων τα στοιχεία να μπορούν να περιγραφούν από την $SU(2)$. Κατ'αντιστοιχία, η ομάδα $SU(3)$ εφαρμόστηκε για πρώτη φορά το 1961 στην προσπάθεια του Gell-Mann να κατηγοριοποιήσει τα κουάρκ με βάση τη γεύση. Με τον όρο γεύση εννοούμε τα διαφορετικά είδη των κουάρκ που υπάρχουν, και το 1961 ήταν γνωστά τρία από τα συνολικά έξι κουάρκ. Έτσι λοιπόν, με την ανακάλυψη των τριών επιπλέον κουάρκ δεν ήταν δυνατό να εφαρμοστεί σε αυτά η ομάδα $SU(3)$. Όμως, με βάση την κβαντική χρωμοδυναμική που αναπτύχθηκε στο μεσοδιάστημα, προέκυψε η ανάγκη μιας επιπλέον ιδιότητας των κουάρκ, το χρώμα. Έτσι λοιπόν, με την υπάρχουσα θεωρία, έχουμε τρία διαφορετικά χρώματα για τα κουάρκ, το κόκκινο, το μπλε και το πράσινο (για παράδειγμα τα νουκλεόνια συντίθενται από κουάρκ τριών διαφορετικών χρωμάτων). Επομένως, η ομάδα $SU(3)$ βρίσκει εφαρμογή στη χρωμοδυναμική και κατηγοριοποιεί τα εκάστοτε σωματίδια με βάση το χρώμα τους.

Όπως αναμένουμε από το όνομα της ομάδας, οι γεννήτορες της $SU(3)$ θα είναι πίνακες 3×3 , οι οποίοι θα είναι επιπλέον Ερμιτιανοί και θα έχουν ίσος με το μηδέν. Μιας και οι πίνακες $SU(N)$ έχουν $n^2 - 1$ ανεξάρτητα στοιχεία (δείτε και το Παράρτημα), είναι αναμενόμενο ότι θα υπάρχουν και αντίστοιχοι γεννήτορες για την ομάδα αυτή. Με βάση αυτά λοιπόν η ομάδα $SU(3)$ θα έχει οχτώ γεννήτορες. Το πιο γνωστό σύνολο γεννητόρων για την ομάδα αυτή ονομάζονται

πίνακες Gell-Mann και δίνονται από τις σχέσεις $T_\alpha = -\frac{i}{2}\lambda_\alpha$, όπου $\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \text{ και } \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Προσέξτε ότι οι πίνακες } \lambda_\alpha \text{ είναι}$$

Ερμιτιανοί ($\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^\dagger$), έχουν ίχνος μηδέν ($\text{Tr}[\lambda_\alpha] = 0$) και ικανοποιούν τη συνθήκη $\text{Tr}[\lambda_\alpha \lambda_\beta] = 2\delta_{\alpha\beta}$. Μιας και οι πίνακες T_α αποτελούν γεννήτορες μίας ομάδας Lie, θα πρέπει επιπλέον να ικανοποιούν τη μεταθετική σχέση $[T_\alpha, T_\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma$ (στην $SU(3)$ συνιθίζεται τα structure constants να συμβολίζονται με το γράμμα f), όπου τα εκάστοτε structure constants είναι $f_{123} = 1, f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$ και $f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$. Όλα τα υπόλοιπα structure constants προκύπτουν από αυτά που μόλις αναφέραμε μιας είναι αντισυμμετρικά, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, δηλαδή $f_{\alpha\beta\gamma} = f_{\beta\gamma\alpha} = -f_{\beta\alpha\gamma}$. Προφανώς, από το γεγονός ότι $T_\alpha = -\frac{i}{2}\lambda_\alpha$ καθώς και από τη μεταθετική σχέση που ισχύει για τους πίνακες T_α ως γεννήτορες της ομάδας $SU(3)$ προκύπτει ότι $[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] = -2f_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma$, από όπου ουσιαστικά προκύπτουν και οι τιμές των structure constants.

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα, οι μεταθετικές σχέσεις είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό των ομάδων Lie. Παρ' όλα αυτά, για την ομάδα $SU(N)$ και μόνο για αυτή εκτός από τη μεταθετική σχέση στην οποία υπακούουν οι γεννήτορες της, υπάρχει και μία αντίστοιχη αντιμεταθετική σχέση. Για την ομάδα $SU(3)$ η σχέση αυτή είναι

$$\left\{ -\frac{i}{2}\lambda_\alpha, -\frac{i}{2}\lambda_\beta \right\} = -\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} + id_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{i}{2}\lambda_\gamma \right),$$

όπου $d_{\alpha\beta\gamma}$ είναι συμμετρικό ως προς την αλλαγή των δεικτών του, δηλαδή $d_{\alpha\beta\gamma} = d_{\beta\gamma\alpha} = d_{\beta\alpha\gamma}$, ενώ οι αντίστοιχες τιμές του είναι $d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}, d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = 1/2, d_{247} = d_{366} = d_{377} = -1/2$ και $d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -1/2\sqrt{3}$ (για όλες τις άλλες τιμές των δεικτών τα αντίστοιχα $d_{\alpha\beta\gamma}$ είναι μηδέν).

Στη συνέχεια, σημειώστε το εξής: Παρατηρήστε ότι οι λ_1, λ_2 και λ_3 είναι στην ουσία ένα «αντίγραφο» των πινάκων Pauli, μιας και μπορούμε να τους γράψουμε στη μορφή $\lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & \\ \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, όπου $i = 1, 2, 3$ και σ_i οι πίνακες Pauli. Έτσι λοιπόν, αναμένουμε ότι και οι λ_1, λ_2 και λ_3 θα έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τους πίνακες Pauli και θα υπακούουν στους ίδιους. Για το λόγο αυτό, θα λέμε ότι οι πίνακες λ_1, λ_2 και λ_3 σχηματίζουν μία $SU(2)$ «υποάλγεβρα» (subalgebra) της $SU(3)$. Παρ' όλα αυτά οι πίνακες αυτοί δεν είναι οι μόνοι οι οποίοι έχουν αυτό το χαρακτηριστικό. Συνολικά σχηματίζονται τρεις υποάλγεβρες της $SU(3)$ από τους πίνακες

- i. λ_1, λ_2 και λ_3 ,
- ii. λ_4, λ_5 και $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_8 + \lambda_3)$,
- iii. λ_6, λ_7 και $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3)$.

Τώρα, αν θέλουμε να προχωρήσουμε περαιτέρω στην ανάλυση της $SU(3)$ θα πρέπει να σημειώσουμε κάποιες επιπλέον παρατηρήσεις μέσα από κάποια παραδείγματα σε συνδυασμό με τα όσα έχουμε ήδη πει. Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα και με αφορμή αυτό θα εισάγουμε κάποιες νέες έννοιες.

Παράδειγμα 15: Στο Παράδειγμα 14 και συγκεκριμένα στο Σχήμα 3.7, είδαμε τα στοιχειώδη σωματία από τα οποία αποτελείται το Καθιερωμένο Μοντέλο. Επιπλέον, ορίσαμε την έννοια του ισοσπίν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις και είδαμε ότι τα μόνα στοιχειώδη σωματία με μη-μηδενικό ισοσπίν είναι τα κουάρκ up και down. Με τον τρόπο λοιπόν που το ισοσπίν χαρακτηρίζει τα κουάρκ αυτά, μπορούμε σε πλήρη αναλογία, να βρούμε αντίστοιχες ποσότητες οι οποίες να ανατίθενται και στις υπόλοιπες γεύσεις των κουάρκ (ο όρος γεύση αναφέρεται στα διαφορετικά είδη των κουάρκ, δηλαδή με άλλα λόγια έχουμε 6 γεύσεις για τα κουάρκ). Έτσι λοιπόν, εκτός από το ισοσπίν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις έχουμε επιπλέον τους κβαντικούς αριθμούς: strangeness (S), charm (C), bottomness (B') topness (T) και baryon number ή βαρυονικός αριθμός (B). Όλοι αυτοί οι κβαντικοί αριθμοί ορίζουν το hypercharge, το οποίο γράφεται

$$Y = S + C + B' + T + B.$$

Αν και δε θα χρειαστεί για τη συνέχεια της ανάλυσής μας, σημειώστε στο σημείο αυτό ότι το hypercharge διατηρείται στην ισχυρή αλληλεπίδραση αλλά όχι στην ασθενή. Στην Πυρηνική Φυσική, υπάρχει μία σχέση η οποία συσχετίζει το hypercharge Y και το ισοσπίν I_3 με το φορτίο Q : η σχέση αυτή είναι γνωστή ως εξίσωση Gell-Mann–Nishijima και γράφεται

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Ύστερα από αυτή την απαραίτητη παρέκκλιση προς την Πυρηνική Φυσική ας επανέλθουμε στους γεννήτορες της $SU(3)$. Παρατηρείστε ότι από τους οχτώ γεννήτορες μόνο οι λ_3 και λ_8 είναι διαγώνιοι. Επίσης, θυμηθείτε ότι οι λ_1, λ_2 και λ_3 αποτελούν μία subalgebra $SU(2)$ για την $SU(3)$. Τέλος, αν ανατρέξετε στο Παράδειγμα 14 θα δείτε ότι αναλύσαμε το ισοσπίν με τη βοήθεια του πίνακα I_3 , ο οποίος ήταν επίσης διαγώνιος, σε αντιστοιχία με ότι κάναμε για τη στροφορμή στο Παράδειγμα 13. Συνθέτοντας όλες αυτές τις παρατηρήσεις μαζί, είναι λογικό και

εδώ να ορίσουμε το ισοσπίν με τη βοήθεια του πίνακα $I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, έτσι ώστε

στην περίπτωση μας οι αντίστοιχες τιμές για το ισοσπίν να είναι $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ και 0. Εκτός όμως από τον πίνακα λ_3 υπάρχει και ο πίνακας λ_8 που είναι διαγώνιος και μάλιστα μετατίθεται με τον λ_3 (αποδείξτε το). Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν δύο μεγέθη τα οποία θα μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα, όπως γνωρίζουμε από την Κβαντομηχανική. Γνωρίζοντας όμως ήδη ότι το ένα μέγεθος είναι το ισοσπίν (λόγω του πίνακα λ_3), προκύπτει ότι το άλλο μέγεθος θα είναι το hypercharge. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να αναθέσουμε τον πίνακα λ_8 στο hypercharge,

συγκεκριμένα είναι $Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$, και έτσι προκύπτει ότι οι δυνατές τιμές του Y είναι οι $+\frac{1}{3}$, $+\frac{1}{3}$ και $-\frac{2}{3}$. Οι αντιστοιχίες με την ομάδα $SU(2)$ όμως δεν τελειώνουν εδώ. Μιας και είχαμε τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης στην $SU(2)$, προκύπτει ότι θα έχουμε και εδώ τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης οι οποίοι θα προκύπτουν από τις τρεις διαφορετικές $SU(2)$ subalgebras που έχουμε. Έτσι λοιπόν θα είναι $I_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$, $V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$ και $U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$.

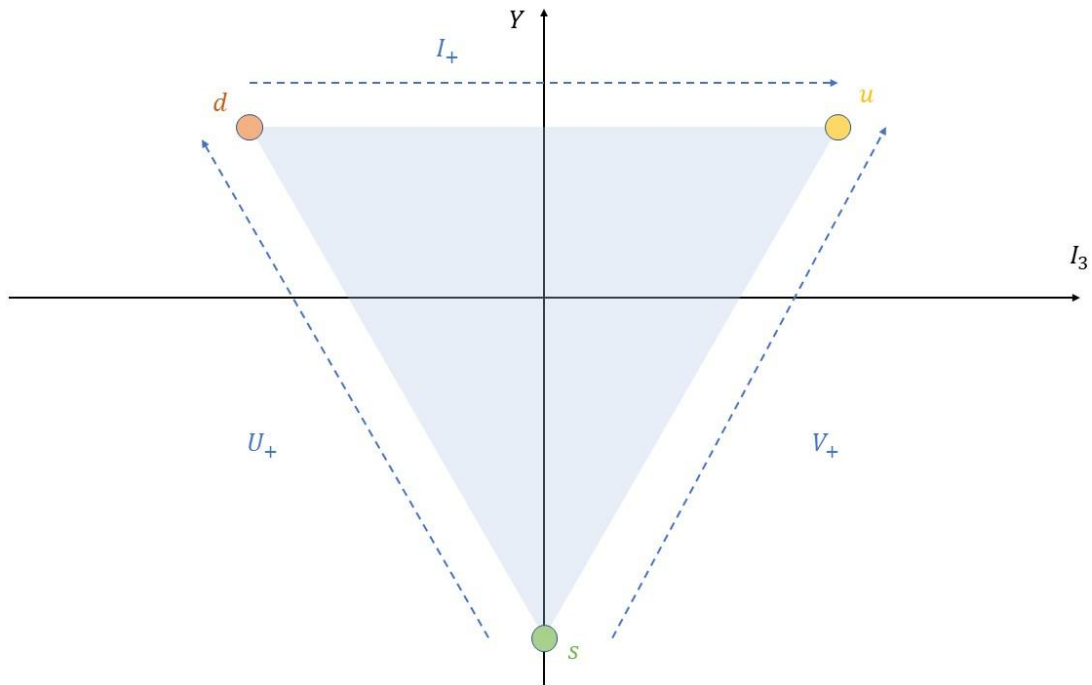
Στη συνέχεια, συγκεντρώνουμε όλα τα στοιχεία μαζί και επικεντρωνόμαστε στην ανάλυση των τριών ελαφρών κουάρκ, όπως είναι γνωστά, το up, το down και το strange, μιας και είναι αυτά με τη μικρότερη μάζα. Σε κάθε ένα από τα κουάρκ αυτά αναθέτουμε ένα διάνυσμα βάσης, και συγκεκριμένα έχουμε $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Όπως κάναμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, έτσι και εδώ, θα αναθέσουμε τη μέγιστη τιμή για το ισοσπίν και το hypercharge, τα highest weights δηλαδή, στο διάνυσμα βάσης u και στη συνέχεια με εφαρμογή των τελεστών καταβίβασης θα πάρουμε τα υπόλοιπα στοιχεία¹. Έτσι λοιπόν, οι τιμές του ισοσπίν και του hypercharge για τα κουάρκ αυτά δίνονται στον Πίνακα 3.1

	I_3	Y
u	$+1/2$	$+1/3$
d	$-1/2$	$+1/3$
s	0	$-2/3$

Πίνακας 3.1: Οι τιμές της προβολής του ισοσπίν και του hypercharge για την τριάδα των ελαφρών κουάρκ u , d και s . Οι τελεστές I_{\pm} για το ισοσπίν δρουν μεταξύ των u και d , ενώ οι U_{\pm} για το hypercharge δρουν μεταξύ των s και d . Για να απεικονίσουμε τα κουάρκ αυτά σε ένα weight diagram, θα τα γράψουμε σαν ένα ζεύγος τιμών (I_3, Y) , όπου το πρώτο στοιχείο αντιπροσωπεύει τη συνιστώσα του ισοσπίν στον άξονα z , ενώ το δεύτερο έχει να κάνει με την τιμή του hypercharge.

¹ Παρατηρείστε ότι στο Παράδειγμα 14 αναθέσαμε στα κουάρκ u και d τις τιμές $+1/2$ και $-1/2$ αντίστοιχα χωρίς να θεωρήσουμε κάποιο άλλο κουάρκ στην αναπαράσταση αυτή. Επίσης το s κουάρκ έχει ισοσπίν 0, οπότε είναι μία singlet κατάσταση για το ισοσπίν. Αυτό σημαίνει ότι οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης για το ισοσπίν θα ισχύουν μόνο για τα u και d . Τα ίδια ισχύουν και για το hypercharge μόνο που τώρα οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης λειτουργούν σωστά για το s και το d κουάρκ. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει και τρίτος τελεστής αναβίβασης και καταβίβασης, ο οποίος όπως θα δούμε δικαιολογεί το γεγονός ότι μελετάμε τη συγκεκριμένη τριάδα των κουάρκ μαζί.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές του Πίνακα 3.1, καθώς και το γεγονός ότι εκτός από τους τελεστές I_{\pm} και U_{\pm} υπάρχουν και οι V_{\pm} , καταλήγουμε στο αντίστοιχο weight lattice όπως αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.8.

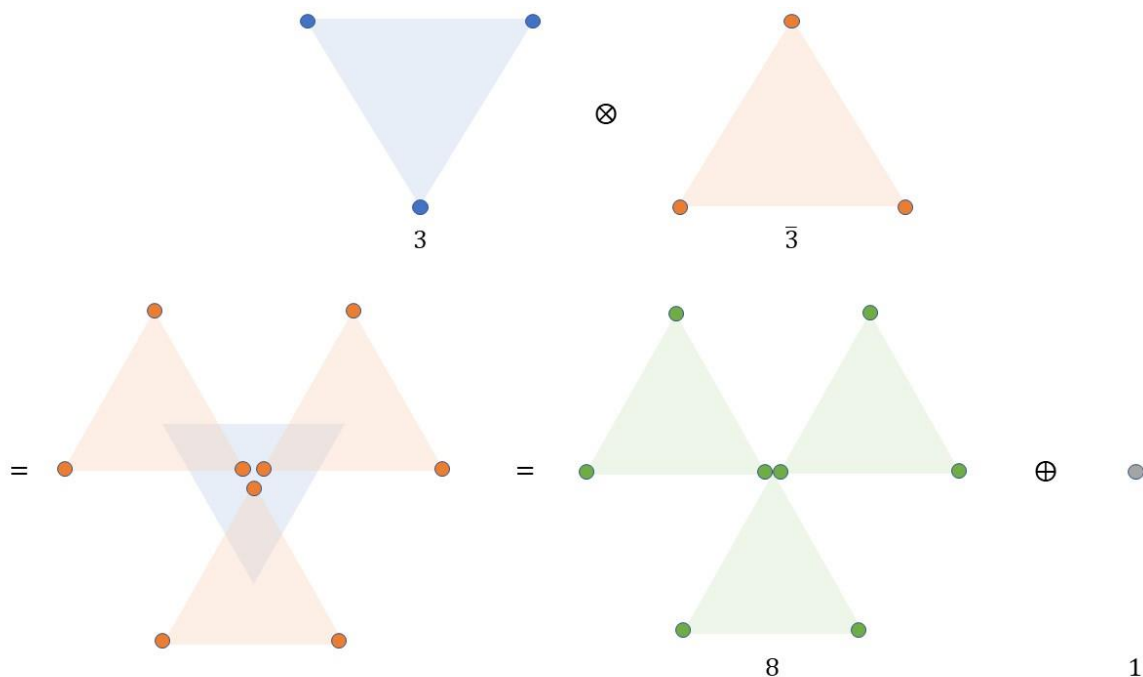


Σχήμα 3.8: Το weight lattice για την τριάδα των ελαφρών κουάρκ. Το κουάρκ u έχει τη μέγιστη τιμή για το ισοσπίν και το hypercharge και συγκεκριμένα $+1/2$ και $+1/3$ αντίστοιχα, και ακολουθούν τα άλλα δύο στις αντίστοιχες θέσεις σύμφωνα με τις τιμές που τους έχουν ανατεθεί από τον Πίνακα 3.1. Επίσης, για να μετακινηθούμε στο διάγραμμα αυτό χρησιμοποιούμε τα τρία είδη των τελεστών αναβίβασης που ορίσαμε στο κυρίως κείμενο. Προφανώς, με τους τελεστές καταβίβασης κινούμαστε στην ίδια διεύθυνση, αλλά με διαφορετική κατεύθυνση.

Ουσιαστικά, το Σχήμα 3.8 αντιπροσωπεύει τη θεμελιώδη αναπαράσταση (fundamental representation) για τα τρία αυτά κουάρκ και συμβολίζεται ως $(\mathbf{3})$. Σε ακόμα πιο «ελεύθερη» μορφή η αναπαράσταση αυτή παριστάνεται απλά από το μπλε σκιασμένο τρίγωνο στο Σχήμα 3.8, δηλαδή μπορούμε να γράφουμε τη θεμελιώδη αυτή αναπαράσταση απλά ως (∇) . Θυμηθείτε τώρα ότι τα αντικουάρκ έχουν αντίθετους όλους τους κβαντικούς αριθμούς που χαρακτηρίζουν τα κουάρκ και συμβολίζονται με μία παύλα πάνω από το γράμμα του κουάρκ, δηλαδή τα αντικουάρκ των u, d και s συμβολίζονται ως \bar{u}, \bar{d} και \bar{s} αντίστοιχα. Αν βάλουμε τα αντικουάρκ σε ένα αντίστοιχο weight lattice θα σχηματίσουν ένα όμοιο τρίγωνο με αυτό που σχηματίζουν τα κουάρκ στο Σχήμα 3.8, με τη διαφορά ότι τώρα το τρίγωνο αυτό θα έχει την κορυφή του προς τα πάνω, δηλαδή θα είναι αντεστραμμένο κατά 180° . Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται «αντι-θεμελιώδης» (antifundamental representation) και συμβολίζεται ως $(\bar{\mathbf{3}})$ ή απλά ως (Δ) .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όσο προχωράμε την ανάλυσή μας στη θεωρία ομάδων, οι συμβολισμοί γίνονται όλο και πιο αφηρημένοι. Το γεγονός αυτό μας δίνει την ευχέρεια να αντιμετωπίσουμε κάποια δύσκολα προβλήματα με απλά σχήματα, αλλά από την άλλη χρειάζεται πολλή προσοχή ώστε να κάθε φορά να είμαστε συνεπείς με τους εκάστοτε κανόνες.

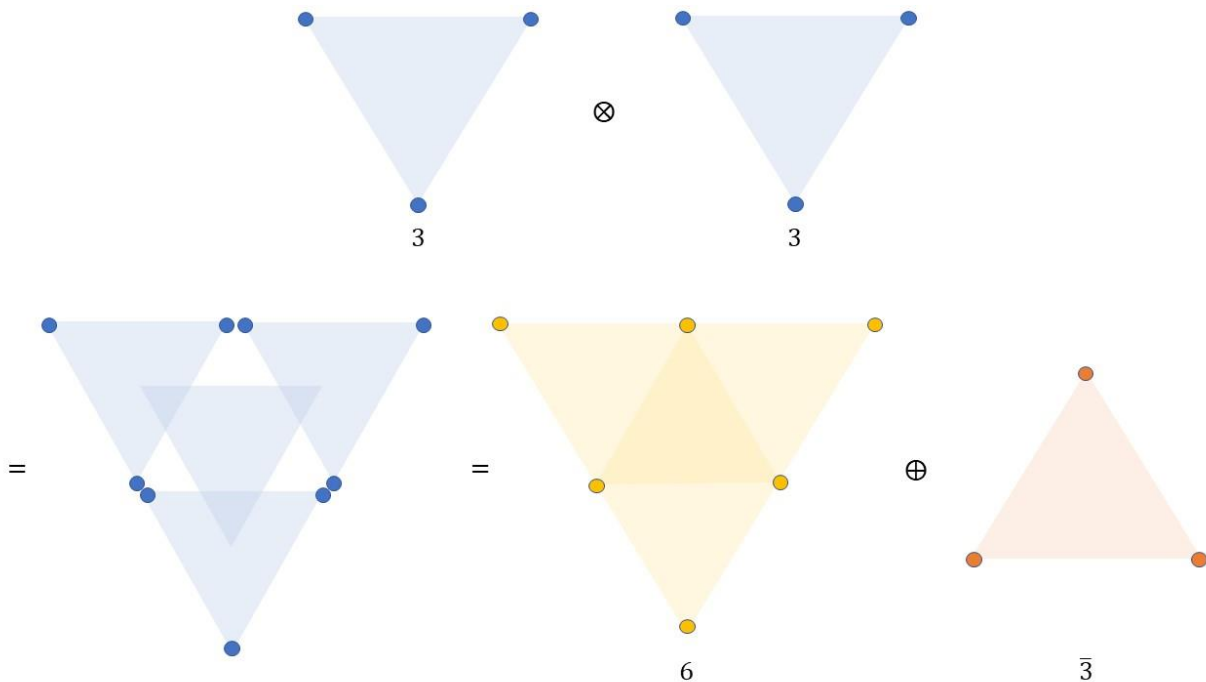
Κλείνοντας λοιπόν το παράδειγμα αυτό, και για να δώσουμε μια εικόνα του πόσο χρήσιμος είναι ο συμβολισμός στη θεωρία των ομάδων Lie, σκεφτείτε ότι θέλουμε να πάρουμε το συνδυασμό όλων των ελαφρών κουάρκ με τα αντίστοιχα αντικουάρκ. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να πάρουμε το τανυστικό γινόμενο του fundamental και του antifundamental representation. Αντί να κάνουμε πράξεις με πίνακες και διανύσματα βάσης, μπορούμε απλά να αναπαραστήσουμε το τανυστικό αυτό γινόμενο με δύο τρίγωνα όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9: Το τανυστικό γινόμενο του fundamental representation (μπλε τρίγωνο) με τον antifundamental representation (πορτοκαλί τρίγωνο). Οι καταστάσεις που αντιπροσωπεύουν σημειώνονται με έναν μικρό κύκλο στην κορυφή κάθε τριγώνου. Λόγω της πράξης του τανυστικού γινομένου, ουσιαστικά σε κάθε κορυφή του μπλε τριγώνου τοποθετούμε ένα πορτοκαλί, με αποτέλεσμα να προκύπτει το ευθύ άθροισμα από ένα συνδυασμό οχτώ καταστάσεων και μιας singlet κατάσταση.

Μιας και μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον fundamental representation με ∇ και τον antifundamental με Δ , παίρνοντας το τανυστικό τους γινόμενο είναι σαν να τοποθετούμε ένα τρίγωνο της μορφής Δ σε κάθε κορυφή του ∇ . Από αυτό το συνδυασμό προκύπτει στην ουσία ένας συνδυασμός οχτώ καταστάσεων οι οποίες μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα κοινό διάγραμμα, καθώς επίσης και μία επιπλέον κατάσταση η οποία ονομάζεται singlet και την

αναπαριστούμε απλά ως μία κουκίδα. Με αυτό τον τρόπο λοιπόν μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα σωματίδια με τη βοήθεια της $SU(3)$.



Σχήμα 3.10: Το τανυστικό γινόμενο του fundamental representation με τον εαυτό του. Αν και προκύπτουν πάλι εννέα καταστάσεις, όπως και στο Σχ. 3.9, τώρα βλέπουμε ότι συνδυάζονται με διαφορετικό τρόπο. Έτσι, το αποτέλεσμά μας εδώ δίνεται ως ένας συνδυασμός έξι και τριών καταστάσεων, όπου όπως βλέπουμε οι τρεις καταστάσεις αποτελούν τον antifundamental representation.

Επίσης, μπορούμε να πάρουμε το τανυστικό γινόμενο του fundamental representation με τον εαυτό του και να πάρουμε ένα τελείως διαφορετικό αποτέλεσμα. Όπως βλέπουμε τώρα στο Σχήμα 3.10, το αποτέλεσμα αυτού του τανυστικού γινομένου μπορεί να αναπαρασταθεί από το συνδυασμό έξι καταστάσεων καθώς και από τον antifundamental representation ο οποίος περιέχει τρεις καταστάσεις. Παρατηρήστε ότι και στα δύο παραδείγματα που αναπαριστώνται στα Σχ. 3.9 και 3.10, το τελικό μας αποτέλεσμα περιέχει εννέα καταστάσεις συνολικά. Αυτό είναι κάτι το οποίο το αναμέναμε μιας και παίρνουμε το τανυστικό γινόμενο δύο αναπαραστάσεων όπου η καθεμιά έχει τρεις καταστάσεις. Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι το αποτέλεσμα θα μπορεί να γραφεί ως το ευθύ άθροισμα εννέα καταστάσεων, αλλά αυτό που κάθε φορά αλλάζει είναι το πώς συνδυάζονται οι καταστάσεις αυτές, μιας και τη μία φορά έχουμε $\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ ενώ την άλλη $\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$.

Προφανώς μπορούμε να φτιάξουμε και άλλες αναπαραστάσεις και να δούμε πώς αυτές συνδυάζονται μεταξύ τους. Παρ' όλα αυτά, κάτι τέτοιο θα είναι αρκετά πιο περίπλοκο και πέρα από το σκοπό του μαθήματος αυτού. Σκοπός μας εδώ, ήταν να δείξουμε ένα πρώτο παράδειγμα στο πώς μπορεί να εφαρμοστεί η ομάδα $SU(3)$ στα στοιχειώδη σωματίδια.

Στο Παράδειγμα 15 που μόλις παραθέσαμε, είδαμε πώς συνδυάζονται τα ελαφρά κουάρκ με τους εαυτούς τους, ή με τα αντίστοιχα αντικουάρκ, με αποτέλεσμα να πάρουμε κάποιους νέους συνδυασμούς οι οποίοι προφανώς αντιστοιχούν σε κάποια νέα σωματία. Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις που εξετάσαμε στα Σχ. 3.9 και 3.10 καταλήγουμε με εννέα νέες καταστάσεις (ή αν προτιμάτε νέα σωματία), κάτι το οποίο αναμέναμε σύμφωνα με την ανάλυση για τη σειρά Clebsch-Gordan που αναφέραμε παραπάνω. Το γεγονός ότι τη μία φορά το αποτέλεσμά μας περιγράφεται από το ευθύ άθροισμα $\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ (Σχ. 3.9) ενώ την άλλη από το $\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ (Σχ. 3.10) έχει να κάνει με τους κανόνες που υπακούουν οι πίνακες λ_α και κατ' επέκταση και οι γεννήτορες της ομάδας αυτής, δηλαδή οι $T_\alpha = -\frac{i}{2}\lambda_\alpha$.

Παρατηρήσαμε ήδη από το Παράδειγμα 15 ότι οι μόνοι διαγώνιοι πίνακες είναι οι λ_3 και λ_8 και αυτό είχε ως αποτέλεσμα να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες αυτούς για να περιγράψουμε το ισοσπίν και το hypercharge αντίστοιχα. Σημειώστε ότι οι πίνακες αυτοί μετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή $[\lambda_3, \lambda_8] = 0$, κάτι το οποίο αναμέναμε από την ανάλυση που κάναμε στο παραπάνω παράδειγμα, μιας και μπορούμε να έχουμε τιμή για το ισοσπίν και για το hypercharge ταυτόχρονα. Επιπλέον, είπαμε ότι οι τιμές των πινάκων αυτών, δηλαδή οι τιμές του ισοσπίν και του hypercharge, παίζουν το ρόλο των weights, όπως αντίστοιχα γινόταν και για την προβολή της στροφορμής στην ομάδα $SU(2)$. Σημειώστε τώρα ότι χρησιμοποιήσαμε όλους τους εναπομείναντες πίνακες για να φτιάξουμε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής οι οποίοι μας επιτρέπουν να μεταβαίνουμε από το ένα weight στο άλλο, ή με άλλα λόγια, από τη μία δυάδα τιμών για το ισοσπίν και το hypercharge στην άλλη (σε πλήρη αναλογία και πάλι με την ομάδα $SU(2)$ με τη διαφορά ότι τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε τρία ζεύγη τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης).

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για όλες τις ομάδες Lie, αλλά εδώ θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση της ομάδας $SU(3)$ που μελετάμε. Από τα παραπάνω λοιπόν, προκύπτει ότι οι γεννήτορες μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα: το πρώτο από αυτά τα σύνολα συμβολίζεται ως $\{H\}$ και περιέχει τους γεννήτορες εκείνους οι οποίοι μετατίθενται μεταξύ τους [οι T_3 και T_8 στην περίπτωση της $SU(3)$], ενώ το δεύτερο ως $\{E\}$ και περιέχει όλους τους υπόλοιπους γεννήτορες [στην περίπτωση της $SU(3)$ περιέχει τους T_1, T_2, T_4, T_5, T_6 και T_7]. Ουσιαστικά το σύνολο $\{E\}$ περιέχει όλους τους γενικευμένους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης, μιας και οι τελεστές αυτοί προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί των γεννητόρων οι οποίοι δεν ανήκουν στο σύνολο $\{H\}$. Οι διάφορες ομάδες Lie λοιπόν, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με βάση αυτό το διαχωρισμό των γεννητόρων τους, καθώς και από τις μεταθετικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του συνόλου $\{H\}$ και των στοιχείων του συνόλου $\{E\}$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια όπου θα αναπτύξουμε αναλυτικότερα το διαχωρισμό αυτό των γεννητόρων, η κατηγοριοποίηση αυτή οδηγεί στην εμφάνιση «απλών ριζών» (simple roots από εδώ και στο εξής, όπως στη διεθνή βιβλιογραφία), των οποίων τα μήκη και το εσωτερικό γινόμενο δίνουν σχεδόν όλες τις πληροφορίες για την εκάστοτε ομάδα Lie. Επίσης, προκύπτει ότι οι ιδιότητές τους μπορούν να συνοψιστούν με τη βοήθεια ενός πίνακα, ο οποίος ονομάζεται

πίνακας Cartan, ή ισοδύναμα από ένα διάγραμμα, το οποίο ονομάζεται διάγραμμα Dynkin (δε θα πούμε κάτι περισσότερο για το διάγραμμα Dynkin μιας και υπερβαίνει τους σκοπούς του μαθήματος).

Θυμίζουμε στο σημείο αυτό και πριν προχωρήσουμε την ανάλυσή μας για την Cartan subalgebra, ότι η άλγεβρα Lie, μιας ομάδας Lie, έχει d γεννήτορες T_α οι οποίοι υπακούουν στη μεταθετική σχέση $[T_\alpha, T_\beta] = ic_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$, όπου $c_{\alpha\beta}^\gamma$ είναι τα structure constants. Επιπλέον, προκύπτει ότι όλοι οι d γεννήτορες ικανοποιούν την ταυτότητα Jacobi $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$. Θυμίζουμε, επίσης, ότι όλα τα structure constants είναι πάντα αντισυμμετρικά ως προς τις εναλλαγές των δεικτών για τις περιπτώσεις που εξετάζουμε εδώ.

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα λοιπόν σε όλα τα παραπάνω θεωρήστε ξανά την ομάδα $SU(2)$. Για την ομάδα αυτή θυμίζουμε ότι οι γεννήτορές της ικανοποιούν τη μεταθετική σχέση $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$. Χρησιμοποιώντας όμως τον το γεννήτορα J_3 καθώς και τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, παίρνουμε τις μεταθετικές σχέσεις $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$ και $[J_+, J_-] = 2J_3$. Προφανώς και με τους δύο τρόπους μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την άλγεβρα της ομάδας $SU(2)$. Αν και οι δύο αυτοί τρόποι γραφής είναι ισοδύναμοι, η μεθοδολογία για τον πίνακα Cartan αποτελεί γενίκευση του δεύτερου τρόπου. Με όσα αναφέραμε λοιπόν παραπάνω, μπορούμε να διαχωρίσουμε τους τελεστές της $SU(2)$ με τον εξής τρόπο: στο σύνολο $\{H\}$ θα ανήκει μόνο ο J_3 μιας και είναι ο μόνος διαγώνιος πίνακας και συνεπώς οι τιμές του παριστάνουν ένα φυσικό μέγεθος, ενώ στο σύνολο $\{E\}$ θα ανήκουν οι τελεστές J_\pm οι οποίοι έχουν προέλθει από το συνδυασμό των άλλων δύο γεννητόρων και μας μεταφέρουν από τη μία τιμή του J_3 στην άλλη (ή με άλλα λόγια από το ένα weight στο άλλο).

Με αυτή ακριβώς τη λογική μπορούμε να δουλεύουμε για κάθε άλγεβρα Lie, και κατ' επέκταση για κάθε ομάδα Lie. Από την ανάλυση που μόλις κάναμε για την $SU(2)$, αλλά και από τη γενικότερη ανάλυση που κάναμε λίγο πιο πάνω για το διαχωρισμό των γεννητόρων σε δύο σύνολα, προκύπτει ότι το σύνολο $\{H\}$ περιέχει όλους εκείνους τους γεννήτορες H_i , με $i = 1, \dots, r$, για τους οποίους ισχύει $[H_i, H_j] = 0$. Ο αριθμός r , ο οποίος αντιπροσωπεύει τον αριθμό των γεννητόρων οι οποίοι ανήκουν στο σύνολο $\{H\}$ και επομένως μπορούν να προσδιοριστούν ταυτόχρονα, ονομάζεται τάξη (rank) της άλγεβρας (μην συγχέετε την τάξη της άλγεβρας Lie που δώσαμε εδώ με την τάξη της πεπερασμένης ομάδας που δώσαμε στην Ενότητα 1 μιας και είναι δύο τελείως διαφορετικές έννοιες στις οποίες όμως έχει δοθεί το ίδιο όνομα). Από την κβαντομηχανική προκύπτει ότι οι γεννήτορες αυτοί θα περιγράφουν κάποιο φυσικό μέγεθος, ενώ τα διαγώνια στοιχεία τους αποτελούν τα weights της ομάδας και μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, από την ανάλυση για την ομάδα $SU(2)$, όπου αυθαίρετα επιλέξαμε να μετρήσουμε τη στροφορμή κατά τον άξονα z , προκύπτει ότι στο σύνολο $\{H\}$ θα ανήκει μόνο ο γεννήτορας J_3 του οποίου τα διαγώνια στοιχεία, δηλαδή οι ιδιοτιμές του, αποτελούν τα weights.

Από την άλλη πλευρά, αν η ομάδα μας έχει συνολικά d γεννήτορες και οι r από αυτούς ανήκουν στο σύνολο $\{H\}$, τότε οι $d - r$ γεννήτορες που απομένουν θα ανήκουν στο σύνολο $\{E\}$.

Συγκεκριμένα, στο σύνολο αυτό θα ανήκουν οι τελεστές E_α , οι οποίοι έχουν προέλθει από ένα κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των $d - r$ γεννητόρων έτσι ώστε να ισχύει $[H_i, E_\alpha] \propto E_\alpha$. Με άλλα λόγια, κατασκευάζουμε τους τελεστές E_α , οι οποίοι προφανώς δεν θα αντιπροσωπεύουν κάποιο φυσικό μέγεθος, έτσι ώστε να μπορούμε να «μεταφερόμαστε» από τη μία ιδιοτιμή του H_i στην άλλη (ή αλλιώς, από το ένα weight στο άλλο). Χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα και πάλι την $SU(2)$, είδαμε ότι στην παραπάνω ανάλυση ορίσαμε τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης, J_+ και J_- αντίστοιχα, έτσι ώστε να πηγαίνουμε από τη μία ιδιοτιμή του J_3 στην άλλη. Επομένως, οι τελεστές E_α θα αποτελούν κάποιους γενικευμένους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης οι οποίοι θα μας επιτρέπουν να πηγαίνουμε από το εκάστοτε weight του H_i γεννήτορα στο άλλο. Συγκεκριμένα, για τους τελεστές αυτούς θα ισχύει, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του Cartan (δεν θα αναφέρουμε για το θεώρημα αυτό τίποτα περισσότερο εδώ), $[H_i, E_\alpha] = (\alpha)_i E_\alpha$, όπου $(\alpha)_i$ είναι μία σταθερά μοναδική για κάθε τελεστή E_α (δηλαδή δεν έχουμε εκφυλισμό). Επιπλέον, εφόσον έχουμε r γεννήτορες H_i , προκύπτει ότι θα υπάρχει ένα μοναδικό r -διάστατο διάνυσμα $\vec{\alpha} = ((\alpha)_1, \dots, (\alpha)_r)$ το οποίο θα χαρακτηρίζει μόνο τον τελεστή E_α και προφανώς θα έχουμε τόσα διανύσματα όσους και τελεστές E_α . Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται simple roots της άλγεβράς μας, όπως είπαμε και παραπάνω. Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι αν ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ αποτελεί root της άλγεβράς μας τότε προκύπτει ότι και το διάνυσμα $-\vec{\alpha}$ θα είναι root (η απόδειξη περιλαμβάνει τη χρήση της ταυτότητας Jacobi αλλά είναι πέρα από το σκοπό μας).

Συνθέτοντας όλες τις παραπάνω παρατηρήσεις μαζί, παίρνουμε την Cartan subalgebra η οποία χαρακτηρίζει κάθε ομάδα Lie. Η Cartan subalgebra είναι πολύ σημαντική μιας και μας επιτρέπει δύο εξίσου σημαντικά πράγματα: το πρώτο είναι ότι μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις ομάδες Lie ανάλογα με την άλγεβρά τους, ενώ το δεύτερο είναι ότι μπορούμε να απεικονίσουμε όλα τα weights σε ένα διάγραμμα απλοποιώντας με αυτό τον τρόπο ένα σύνθετο πρόβλημα. Το διάγραμμα αυτό είναι προφανώς το weight lattice που αναφέραμε παραπάνω (δείτε ξανά και το Σχ. 3.6). Συνοψίζοντας όλα τα στοιχεία που αναφέραμε παραπάνω για την Cartan subalgebra, μπορούμε να γράψουμε τις εξής μεταθετικές σχέσεις για τους γεννήτορες H_i και τους τελεστές E_α : i) $[H_i, H_j] = 0$, ii) $[H_i, E_\alpha] = (\alpha)_i E_\alpha$, iii) $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = (\alpha)_i H_i$ και iv) $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$, όπου $\beta \neq -\alpha$ και $N_{\alpha\beta}$ μία σταθερά. Οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν τη βάση Cartan-Weyl την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να φτιάξουμε το weight lattice.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να πούμε ότι στο πλαίσιο του μαθήματος αυτού ενδιαφερόμαστε μόνο να ξέρουμε ότι υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε ένα πλέγμα το οποίο θα περιέχει τις πληροφορίες μίας ομάδας Lie. Για το λόγο αυτό, στην παραπάνω ανάλυση έχουμε παραλείψει όλες τις αποδείξεις καθώς και κάποια ενδιάμεσα στάδια, και ουσιαστικά έχουμε παραθέσει μόνο τα κυριότερα σημεία για να πάρουμε μία πρώτη γεύση από την Cartan subalgebra. Για μία πιο αναλυτική περιγραφή της Cartan subalgebra ο αναγνώστης θα μπορούσε να απευθυνθεί στο Κεφάλαιο 9 της αναφοράς [1] καθώς και στο Κεφάλαιο 6 της αναφοράς [4] (προφανώς υπάρχουν και άλλες πηγές αλλά παραθέτουμε εδώ κάποιες ενδεικτικές). Κλείνοντας λοιπόν την ενότητα αυτή, θα κάνουμε μία εφαρμογή της Cartan subalgebra στην ομάδα $SU(3)$.

Μιας και η ομάδα αυτή όπως είπαμε περιγράφει τα ελαφρά κουάρκ καθώς και το συνδυασμό αυτών, θα δούμε στο παρακάτω παράδειγμα πώς με τη βοήθεια της Cartan subalgebra μπορούμε να επαναλάβουμε αλλά και να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα που πήραμε στα Σχ. 3.9 και 3.10.

Παράδειγμα 16: Είδαμε προηγουμένως ότι οι πιο γνωστοί γεννήτορες για την $SU(3)$ γράφονται με τη βοήθεια των οχτώ πινάκων Gell-Mann λ_α . Από αυτούς τους πίνακες μόνο δύο, οι λ_3 και λ_8 , ήταν διαγώνιοι, καθώς επίσης βρήκαμε ότι ο γραμμικός συνδυασμός των πινάκων Gell-Mann δημιουργεί τρεις «υποάλγεβρες» $SU(2)$ [$SU(2)$ subalgebras]. Έτσι λοιπόν, με αφετηρία το γεγονός αυτό, μπορούμε να ορίσουμε τους εξής πίνακες που δίνονται παρακάτω και οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως γεννήτορες αντί των πινάκων Gell-Mann: $h_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, e_+^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_-^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_+^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_-^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, e_+^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } e_-^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρείστε ότι και σε αυτή την αναπαράσταση έχουμε δύο πίνακες οι οποίοι είναι διαγώνιοι και μετατίθενται μεταξύ τους και συγκεκριμένα είναι οι h_1 και h_2 . Παρατηρείστε ότι συμβολίσαμε με τέτοιο τρόπο τους νέους πίνακές μας έτσι ώστε να είναι φανερό ότι οι πίνακες h_1 και h_2 που μετατίθενται μεταξύ τους ανήκουν στο σύνολο $\{H\}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι στο σύνολο $\{E\}$.

Πριν προχωρήσουμε σημειώστε μία γενική παρατήρηση: οι πίνακες που παραθέτουμε εδώ, αλλά και οι πίνακες Gell-Mann, αποτελούν μία αναπαράσταση της ομάδας $SU(3)$. Έχοντας κατά νου ότι είπαμε και στην Ενότητα 2, μπορούμε να πούμε ότι τα στοιχεία μίας αναπαράστασης, κατά μία έννοια, «περιγράφουν» τα στοιχεία της ομάδας που θέλουμε. Αυτή η «περιγραφή» όπως είδαμε γίνεται με τη βοήθεια πινάκων οι οποίοι αποτελούν την αναπαράσταση. Αν όμως η ομάδα μας αποτελείται από πίνακες, οι πίνακες της αναπαράστασης δεν είναι αναγκαίο να έχουν την ίδια διάσταση με εκείνη των πινάκων της ομάδας (δείτε πάλι την Ενότητα 2). Αντιθέτως, η διάσταση των πινάκων της αναπαράστασης θα ισούται με τη διάσταση του χώρου στον οποίο δρα η αναπαράσταση. Ένα διαφωτιστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση που εξετάσαμε στο Παράδειγμα 12 για τη στροφορμή: είδαμε ότι για το χώρο των δύο καταστάσεων, δηλαδή για $j = 1/2$, οι πίνακες της αναπαράστασής μας ήταν 2×2 , ενώ στο χώρο των τριών καταστάσεων, δηλαδή για $j = 1$, οι πίνακες της αναπαράστασης ήταν 3×3 (το γεγονός αυτό μπορείτε να το επιβεβαιώσετε και για μεγαλύτερα j).

Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας και από την παρατήρηση που μόλις κάναμε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αν ο χώρος στον οποίο δρα η αναπαράστασή μας έχει d καταστάσεις, τότε οι

πίνακες της αναπαράστασης θα είναι $d \times d$. Ονομάζοντας λοιπόν D την αναπαράσταση που δρα στο χώρο των d καταστάσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε αντίστοιχους πίνακες $d \times d$ οι οποίοι ορίζονται ως: $H_1 = D(h_1), H_2 = D(h_2)$ και $E_{\pm}^m = D(e_{\pm}^m)$, με $m = 1, 2, 3$. Έχοντας λοιπόν τους γενικούς πίνακες H_1, H_2 και E_{\pm}^m παρατηρούμε ότι ικανοποιούν τις συνθήκες της Cartan subalgebra, μιας και ικανοποιούν τις μεταθετικές σχέσεις:

$[H_i, H_j]$ και $[H_i, E_{\pm}^m]$	$[E_+^m, E_-^m]$	$[E_{\pm}^m, E_{\pm}^n]$
$[H_1, H_2] = 0$	$[E_+^1, E_-^1] = H_1$	$[E_+^1, E_+^2] = \frac{1}{\sqrt{2}} E_+^3$
$[H_1, E_{\pm}^1] = \pm E_{\pm}^1$	$[E_+^2, E_-^2] = \frac{\sqrt{3}}{2} H_2 - \frac{1}{2} H_1$	$[E_-^1, E_-^2] = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_-^3$
$[H_2, E_{\pm}^1] = 0$	$[E_+^3, E_-^3] = \frac{\sqrt{3}}{2} H_2 + \frac{1}{2} H_1$	$[E_+^1, E_-^3] = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_-^2$
$[H_1, E_{\pm}^2] = \mp \frac{1}{2} E_{\pm}^2$		$[E_-^1, E_+^3] = \frac{1}{\sqrt{2}} E_+^2$
$[H_2, E_{\pm}^2] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} E_{\pm}^2$		$[E_+^2, E_-^3] = \frac{1}{\sqrt{2}} E_-^1$
$[H_1, E_{\pm}^3] = \pm \frac{1}{2} E_{\pm}^3$		$[E_-^2, E_+^3] = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_+^1$
$[H_2, E_{\pm}^3] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} E_{\pm}^3$		

Οι μεταθετικές σχέσεις οι οποίες δεν αναφέρονται στον παραπάνω πίνακα δίνουν αποτέλεσμα μηδέν.

Επιπλέον, παρατηρείστε ότι από τις παραπάνω μεταθετικές σχέσεις των πινάκων της νέας μας αναπαράστασης φαίνεται ότι παίρνουμε και πάλι τρεις «υποάλγεβρες» $SU(2)$ [$SU(2)$ subalgebras], μιας και έχουμε ότι

- $[H_1, E_{\pm}^1] = \pm E_{\pm}^1$ και $[E_+^1, E_-^1] = H_1$,
- $[\frac{\sqrt{3}}{2} H_2 - \frac{1}{2} H_1, E_{\pm}^2] = \pm E_{\pm}^2$ και $[E_+^2, E_-^2] = \frac{\sqrt{3}}{2} H_2 - \frac{1}{2} H_1$,
- $[\frac{\sqrt{3}}{2} H_2 + \frac{1}{2} H_1, E_{\pm}^3] = \pm E_{\pm}^3$ και $[E_+^3, E_-^3] = \frac{\sqrt{3}}{2} H_2 + \frac{1}{2} H_1$.

Για να γίνει ακόμη πιο σαφές ότι έχουμε τρεις και $SU(2)$ subalgebras, θυμηθείτε ότι για τον J_3 και τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης J_{\pm} , για το σπιν, είχαμε τις μεταθετικές σχέσεις $[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$ και $[J_+, J_-] = 2J_3$ (θεωρώντας ότι $\hbar = 1$).

Στη συνέχεια, θυμηθείτε ότι στην $SU(2)$ συμβολίσαμε τις καταστάσεις του σπιν ως $|j, m\rangle$, όπου j ήταν το highest weight και m όλες οι πιθανές τιμές του σπιν τις οποίες τις παίρναμε με τη βοήθεια των τελεστών J_{\pm} . Λόγω του ότι στην περίπτωση της $SU(2)$ είχαμε μόνο τον J_3 που ήταν διαγώνιος, παριστάναμε τα weights, δηλαδή τις ιδιοτιμές του J_3 , απλά με έναν αριθμό. Όμως, για την περίπτωση της $SU(3)$ έχουμε δύο διαγώνιους πίνακες, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να

παριστάνουμε τα διάφορα weights, δηλαδή τις ιδιοτιμές των H_1 και H_2 , ως σημεία στο επίπεδο. Αν συμβολίσουμε λοιπόν με p τα weights του H_1 και με q τα αντίστοιχα του H_2 , τότε τα διάφορα weights της $SU(3)$ θα παριστάνονται από τα σημεία (p, q) στο επίπεδο. Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με μ_1 το highest weight του H_1 και με μ_2 το highest weight του H_2 , συμπεραίνουμε ότι το highest weight για την $SU(3)$ γράφεται ως (μ_1, μ_2) . Σε αντιστοιχία λοιπόν με την $SU(2)$ όπου είχαμε συμβολίσει τις καταστάσεις μας ως $|j, m\rangle$ (δηλαδή με τη βοήθεια του highest weight j καθώς και όλων των υπόλοιπων weights m), θα συμβολίσουμε τις καταστάσεις στην $SU(3)$ ως $|\mu_1, \mu_2, p, q\rangle$. Έτσι λοιπόν, η δράση των H_1 και H_2 πάνω σε μία γενική κατάσταση $|\mu_1, \mu_2, p, q\rangle$ θα γράφεται

$$H_1|\mu_1, \mu_2, p, q\rangle = p|\mu_1, \mu_2, p, q\rangle,$$

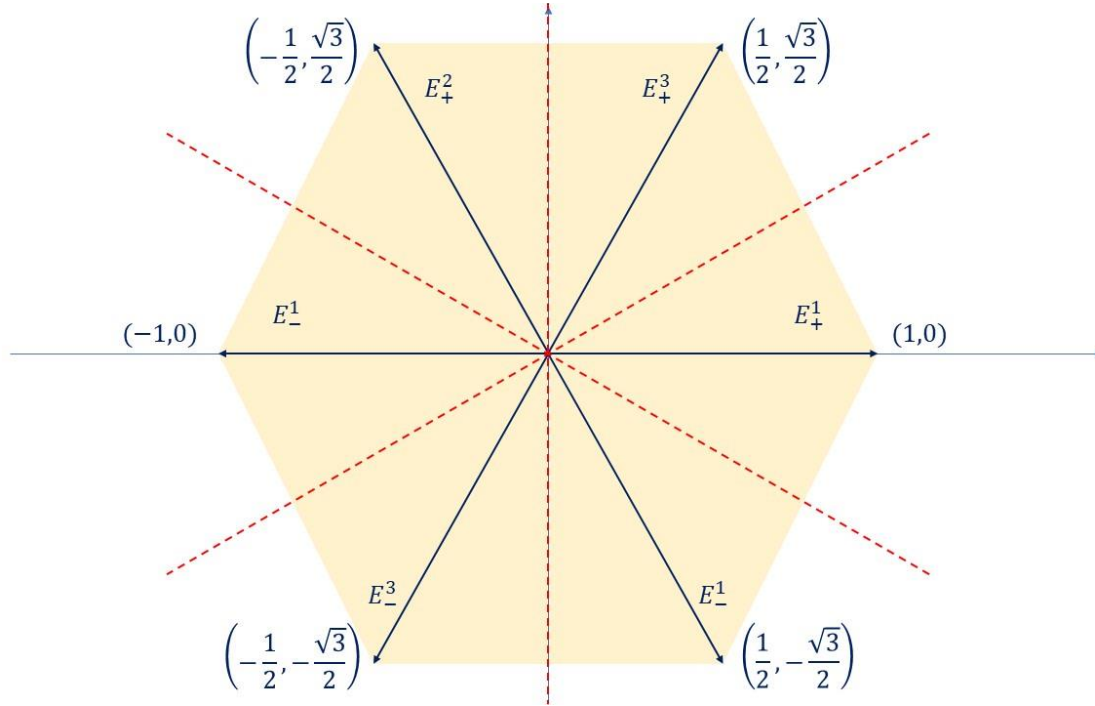
$$H_2|\mu_1, \mu_2, p, q\rangle = q|\mu_1, \mu_2, p, q\rangle.$$

Αυτό που μένει για τη συνέχεια είναι να δούμε πώς δρουν πάνω σε αυτές τις καταστάσεις οι έξι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης που έχουμε στην ομάδα $SU(3)$, δηλαδή οι E_{\pm}^m με $m = 1, 2, 3$. Για να βγάλουμε ένα συμπέρασμα για το πώς δρουν οι τελεστές αυτοί πάνω στις καταστάσεις $|\mu_1, \mu_2, p, q\rangle$ θα πρέπει να γυρίσουμε και πάλι στην ομάδα $SU(2)$. Θυμηθείτε ότι στην $SU(2)$ οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης μετέβαλαν τις ιδιοτιμές του J_3 κατά μονάδα. Έχοντας αυτό κατά νου, παρατηρήστε ότι η μετάθεσή τους με τον J_3 έδινε το αποτέλεσμα $\pm J_{\pm}$. Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα της μεταθετικής σχέσης $[J_3, J_{\pm}]$ υποδήλωνε το πώς ο εκάστοτε τελεστής J_+ και J_- μετέβαλε την ιδιοτιμή του J_3 . Με αυτό το σκεπτικό, και ξαναβλέποντας όλες τις μεταθετικές σχέσεις $[H_i, E_{\pm}^m]$ (με $i = 1, 2$ και $m = 1, 2, 3$) που αναφέραμε παραπάνω καταλήγουμε στο ότι:

- Ο τελεστής E_{\pm}^1 μεταβάλλει το weight (p, q) στο $(p \pm 1, q)$,
- Ο τελεστής E_{\pm}^2 μεταβάλλει το weight (p, q) στο $(p \mp 1/2, q \pm \sqrt{3}/2)$,
- Ο τελεστής E_{\pm}^3 μεταβάλλει το weight (p, q) στο $(p \pm 1/2, q \pm \sqrt{3}/2)$.

Όπως κάναμε και για την $SU(2)$, έτσι και τώρα, μπορούμε να απεικονίσουμε όλες αυτές τις πληροφορίες με τη βοήθεια του weight lattice. Για άλλη μια φορά, μπορούμε να θυμηθούμε από την $SU(2)$ ότι το weight lattice που είχαμε δημιουργήσει περιείχε όλα τα weights της ομάδας, είχε συμμετρία ως προς το κέντρο του (Weyl symmetry), καθώς επίσης, πάνω στο πλέγμα μπορούσαμε να κινηθούμε κατά ακέραια πολλαπλάσια του 2 και συγκεκριμένα με τη βοήθεια του τελεστή J_+ κατά τη θετική κατεύθυνση ενώ με τη βοήθεια του τελεστή J_- κατά την αρνητική. Παρατηρώντας τώρα ότι στην $SU(3)$ έχουμε τρεις $SU(2)$ subalgebras, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το weight lattice για την ομάδα $SU(3)$ θα έχει τρεις άξονες συμμετρίας (τρεις Weyl symmetries), ενώ οι τελεστές E_{\pm}^1 θα μας επιτρέπουν να κινούμαστε κατά μία ποσότητα $m_1 = 2p$, οι E_{\pm}^2 κατά μία ποσότητα $m_2 = \sqrt{3}q - p$ και οι E_{\pm}^3 κατά μία ποσότητα $m_3 = \sqrt{3}q + p$, όπου φυσικά $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$. Εφόσον τα m_1, m_2 και m_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, προκύπτει ότι ακέραιος θα είναι και ο $2p$ καθώς και ο $2\sqrt{3}q$. Από το γεγονός αυτό, δηλαδή επειδή $2p, 2\sqrt{3}q \in \mathbb{Z}$, προκύπτει ότι τα weights θα αποτελούν και εδώ σημεία κάποιου πλέγματος τα οποία θα είναι

προσβάσιμα με τη χρήση αυτών των σταθερών. Έχοντας αυτά κατά νου, και εφαρμόζοντας τους τελεστές E_{\pm}^m πάνω στο weight $(0,0)$ (θα μπορούσαμε να τους εφαρμόσουμε σε οποιοδήποτε άλλο weight, αλλά προφανώς αυτό είναι το πιο βολικό) μπορούμε να σχεδιάσουμε το weight lattice για την $SU(3)$, το οποίο δίνεται στο Σχ. 3.11.



Σχήμα 3.11: Το weight lattice για την ομάδα $SU(3)$. Λόγω του ότι η ομάδα αυτή έχει τρεις $SU(2)$ subalgebras, προκύπτει ότι θα έχουμε τρία διαφορετικά ζεύγη τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης και επομένως θα υπάρχουν τρεις άξονες συμμετρίας, οι οποίοι συμβολίζονται με την κόκκινη διακεκομμένη γραμμή. Τα διανύσματα τα οποία δείχνουν κατά τη διεύθυνση των τελεστών E_{\pm}^m είναι ουσιαστικά τα roots τα οποία προκύπτουν στην Cartan subalgebra.

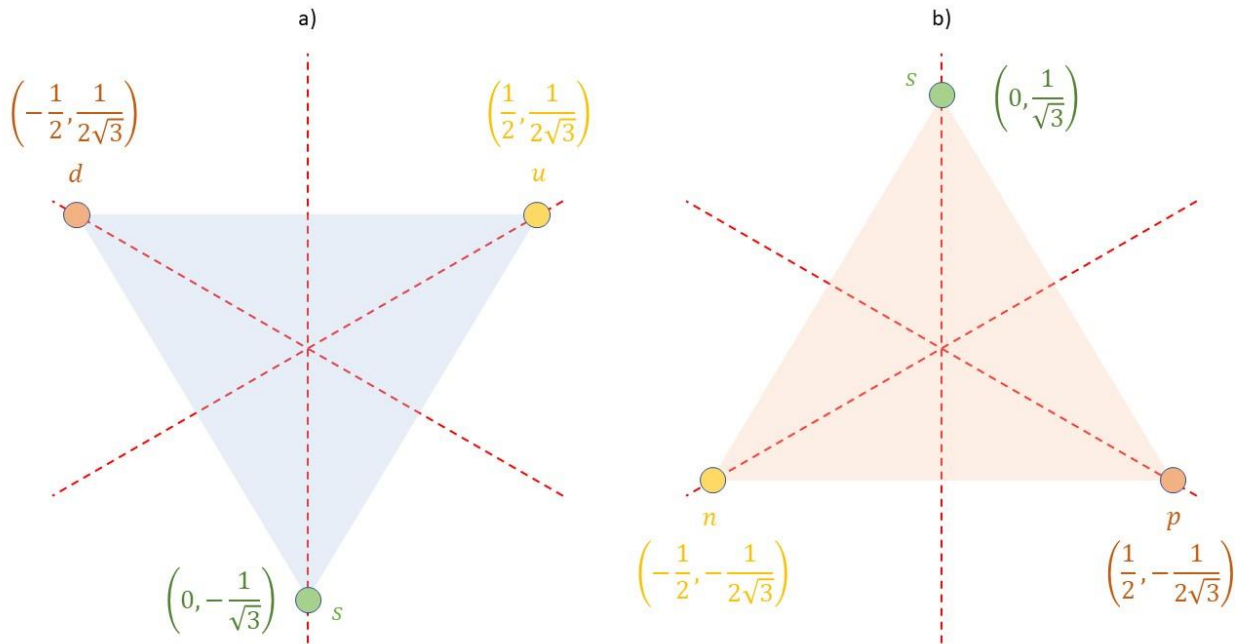
Παρατηρείστε στο Σχ. 3.11 τους τρεις άξονες συμμετρίας οι οποίοι προκύπτουν από τις τρεις $SU(2)$ subalgebras που έχει η $SU(3)$. Έτσι λοιπόν, το weight lattice της $SU(3)$ έχει κατοπτρική συμμετρία γύρω από αυτούς τους τρεις άξονες. Ο άξονας συμμετρίας ο οποίος εμφανίζεται από την πρώτη $SU(2)$ subalgebra η οποία περιέχει τους τελεστές E_{\pm}^1 , βρίσκεται στην ευθεία $\theta = \pi/2$ η οποία περνά από την αρχή των αξόνων. Αντίστοιχα οι άξονες που οφείλονται στις άλλες δύο $SU(2)$ subalgebras, οι οποίες περιέχουν η καθεμιά τους τελεστές E_{\pm}^2 και E_{\pm}^3 , βρίσκονται στις ευθείες $\theta = \pi/6$ και $\theta = 5\pi/6$. Λόγω αυτών των αξόνων συμμετρίας και από το γεγονός ότι κινούμαστε στο weight lattice με τη βοήθεια των σταθερών m_1, m_2 και m_3 , που αναφέραμε παραπάνω, προκύπτει ότι: i) αν το (p, q) είναι ένα weight, τότε weight θα είναι και το $(-p, q)$, ii) αν το (p, q) είναι ένα weight, τότε weight θα είναι και το $(\frac{1}{2}(p + \sqrt{3}q), \frac{1}{2}(\sqrt{3}p - q))$, iii) αν το (p, q) είναι ένα weight, τότε weight είναι και το $(\frac{1}{2}(p - \sqrt{3}q), \frac{1}{2}(-\sqrt{3}p - q))$. Σύμφωνα με

τις παραπάνω παρατηρήσεις και με λίγη ακόμα γεωμετρία μπορεί να αποδειχθεί ότι το highest weight κάθε αναπαράστασης στην $SU(3)$ θα βρίσκεται πάντα στο τμήμα $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Αν και μέσω του Σχ. 3.11 μπορούμε να βγάλουμε αρκετά ακόμα χρήσιμα συμπεράσματα για την $SU(3)$, ή ακόμα και να ορίσουμε το διάγραμμα Dynkin για την ομάδα αυτή, δε θα ασχοληθούμε περαιτέρω στο σημείο αυτό. Στόχος μας εδώ, είναι να δείξουμε πώς δημιουργούμε ένα τέτοιο διάγραμμα και να αναφέρουμε λίγα παραδείγματα ώστε να δείξουμε τη χρησιμότητά του. Αφήνεται στον εκάστοτε αναγνώστη η περαιτέρω ενασχόλησή του με τα διαγράμματα αυτά (μπορεί κανείς να βρει επιπλέον εφαρμογές των διαγραμμάτων αυτών κυρίως σε συγγράμματα που ασχολούνται με την Πυρηνική Φυσική, την Ενοποίηση Δυνάμεων, την Αστροσωματιδιακή Φυσική αλλά ακόμα και σε συγγράμματα Φυσικής Στερεάς Καταστάσεως όπου μελετώνται πιο σύνθετες κρυσταλλικές δομές). Το μόνο που θα κάνουμε εδώ θα είναι να συνδέσουμε τα γενικά συμπεράσματα που βγάλαμε μέσω του Σχ. 3.11 με τα Σχ. 3.9 και 3.10, έτσι ώστε να δούμε από μία άλλη οπτική γωνία και να κατανοήσουμε λίγο καλύτερα το πώς προκύπτουν τα συγκεκριμένα αποτελέσματα.

Για να ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας, θυμηθείτε τον fundamental representation της $SU(3)$, τον οποίο δώσαμε στο Σχ. 3.8. Θυμηθείτε επίσης ότι το Σχ. 3.8 προέκυψε από την ανάλυση του ισοσπίν και του hypercharge, μιας και είχαμε αναθέσει τον πίνακα $\frac{1}{2}\lambda_3$ στο ισοσπίν (ακριβέστερα στη συνιστώσα z του ισοσπίν) και τον $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$ στο hypercharge και προέκυπτε ότι τα ελαφρά κουάρκ αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές των πινάκων αυτών. Τώρα, αντί των πινάκων Gell-Mann, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στη θέση των πινάκων $\frac{1}{2}\lambda_3$ και $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$ τους πίνακες h_1 και h_2 και θα βρούμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα (με απροσδιοριστία έναν παράγοντα $\frac{1}{\sqrt{3}}$ για το hypercharge). Χρησιμοποιώντας λοιπόν ως βάση τους πίνακες h_1 και h_2 , τα weights τα οποία θα αντιστοιχούν στα ελαφρά κουάρκ θα είναι αυτά που δίνονται στο Σχ. 3.12(a). Παρατηρείστε στο σχήμα αυτό ότι το κουάρκ u , το οποίο ουσιαστικά αντιστοιχεί στο highest weight της αναπαράστασής μας, βρίσκεται πάνω στη γραμμή $\theta = \pi/6$, κάτι το οποίο είναι σύμφωνο με ότι αναφέραμε παραπάνω. Για να κινηθούμε πάνω στο πλέγμα αυτό χρησιμοποιούμε, όπως αναφέραμε και παραπάνω, τους τελεστές e_{\pm}^m ($m = 1,2,3$), οι οποίοι άλλωστε ορίζουν και τους άξονες συμμετρίας, οι οποίοι συμβολίζονται με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή όπως και στο Σχ. 3.11. Επίσης, στο Σχ. 3.12(b) βλέπουμε τα αντίστοιχα weights για τον antifundamental representation.

Στη συνέχεια, θεωρείστε το συνδυασμό του fundamental με τον antifundamental representation, γεγονός το οποίο απεικονίσαμε στο Σχ. 3.9 και συμβολίζεται ως $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας του πίνακες h_1, h_2, e_{\pm}^m με $m = 1,2,3$, μπορούμε να βρούμε τα αντίστοιχα weights τα οποία προκύπτουν από τη σύνθεση αυτή. Τα weights λοιπόν τα οποία προκύπτουν από τη σύνθεση των ελαφρών κουάρκ με τα αντίστοιχα αντικουάρκ, δίνονται στον Πίνακα 3.2.



Σχήμα 3.12: Ο a) fundamental και ο b) antifundamental representation της $SU(3)$, με τα ελαφρά κουάρκ να βρίσκονται στις κορυφές των εκάστοτε τριγώνων. Οι κόκκινες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στους άξονες συμμετρίας του weight lattice ενώ και στα δύο σχήματα σημειώνονται τα εκάστοτε weights τα οποία αντιστοιχούν τα ελαφρά κουάρκ, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει αντί των πινάκων Gell-Mann τους πίνακες h_1 και h_2 . Παρατηρείστε ότι και στις δύο περιπτώσεις το highest weight βρίσκεται μεταξύ των γραμμών $\theta = \pi/6$ και $\theta = \pi/2$ [συγκεκριμένα για την περίπτωση a) βρίσκεται πάνω στη γραμμή $\theta = \pi/6$ ενώ για την περίπτωση b) βρίσκεται πάνω στη γραμμή $\theta = \pi/2$].

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΚΟΥΑΡΚ	WEIGHTS
$u \otimes \bar{s}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$u \otimes \bar{d}$	$(1, 0)$
$d \otimes \bar{s}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$u \otimes \bar{u}, d \otimes \bar{d}, s \otimes \bar{s}$	$(0, 0)$
$d \otimes \bar{u}$	$(-1, 0)$
$s \otimes \bar{u}$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$s \otimes \bar{d}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Πίνακας 3.2: Τα weights τα οποία προκύπτουν από τη σύνθεση των κουάρκ $3 \otimes \bar{3}$.

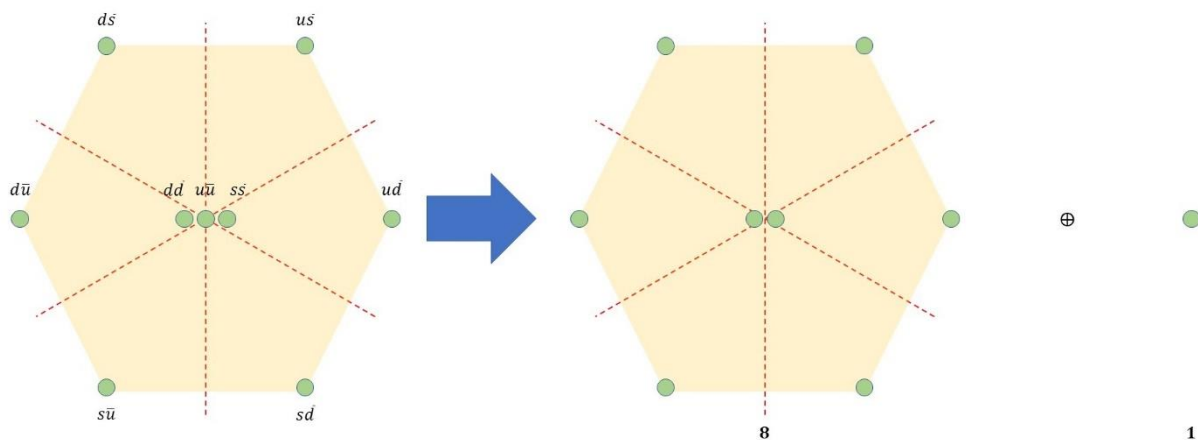
Παρατηρούμε, λοιπόν, από τον Πίνακα 3.2 ότι η σύνθεση των κουάρκ με τα αντίστοιχα αντικουάρκ τους, μας δίνει 9 νέα αποτελέσματα, ή με άλλα λόγια 9 νέα σωματίδια μιας και μιλάμε για στοιχειώδη σωματίια. Βλέπουμε επίσης ότι όλα τα weights τα οποία εμφανίζονται από τη σύνθεση αυτή έχουν πολλαπλότητα 1, εκτός από το weight (0,0) το οποίο έχει πολλαπλότητα 3. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο από όλα τα weights, το highest weight δηλαδή, το παίρνουμε για την κατάσταση $u \otimes \bar{s}$ και όπως βλέπουμε και από τον Πίνακα 3.2, είναι $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Έτσι λοιπόν, για να δημιουργήσουμε όλα τα υπόλοιπα weights, θα πρέπει να δράσουμε στο highest weight με τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης, οι οποίοι θα ορίζονται ως $E_{\pm}^m = e_{\pm}^m \otimes I + I \otimes \bar{e}_{\pm}^m$ για τη σύνθεση των κουάρκ με τα αντικουάρκ τους. Από την εφαρμογή λοιπόν των τελεστών αυτών πάνω στο highest weight παίρνουμε μόνο τις 8 από τις 9 καταστάσεις οι οποίες περιγράφονται από τη σύνθεση κουάρκ-αντικουάρκ στον Πίνακα 3.2. Ο Πίνακας 3.3 δείχνει τα 8 weights τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή όλων των E_{\pm}^m πάνω στο highest weight $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ της κατάστασης $u \otimes \bar{s}$.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΟΥΑΡΚ-ΑΝΤΙΚΟΥΑΡΚ	WEIGHTS
$u \otimes \bar{s}$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$u \otimes \bar{d}$	(1,0)
$d \otimes \bar{s}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes \bar{d} - u \otimes \bar{u}), \frac{1}{\sqrt{6}}(d \otimes \bar{d} + u \otimes \bar{u} - 2s \otimes \bar{s})$	(0,0)
$d \otimes \bar{u}$	(-1,0)
$s \otimes \bar{u}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
$s \otimes \bar{d}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Πίνακας 3.3: Τα weights τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή των E_{\pm}^m ($m = 1,2,3$) πάνω στο highest weight $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση $u \otimes \bar{s}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι όλες οι καταστάσεις των κουάρκ αναπαράγονται από τους τελεστές E_{\pm}^m όπως αναμέναμε, με εξαίρεση τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στο weight (0,0). Για το weight αυτό παρατηρούμε την εμφάνιση δύο καταστάσεων οι οποίες έχουν προέλθει από την επαλληλία των $u \otimes \bar{u}, d \otimes \bar{d}$ και $s \otimes \bar{s}$. Αν τοποθετήσουμε τις καταστάσεις αυτές σε ένα weight lattice τότε θα πάρουμε το εξάγωνο που είχαμε και στο Σχ. 3.10 (δείτε και το Σχ. 3.13).

Παρ' όλα αυτά, μας λείπει μία ακόμα κατάσταση για να ολοκληρώσουμε την ανάλυσή μας, μιας και όπως είπαμε το αποτέλεσμα της σύνθεσης του fundamental με τον antifundamental representation μας δίνει 9 καταστάσεις και όχι 8. Αυτή η κατάσταση θα πρέπει προφανώς να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $u \otimes \bar{u}$, $d \otimes \bar{d}$ και $s \otimes \bar{s}$ και θα πρέπει να είναι τέτοιος συνδυασμός ώστε να έχει weight (0,0) και οποιαδήποτε εφαρμογή των τελεστών E_{\pm}^m πάνω σε αυτόν να μας δίνει μηδενικό αποτέλεσμα, έτσι ώστε να μη μας δίνει καμία από τις καταστάσεις του Πίνακα 3.3. Από τις απαιτήσεις που αναφέραμε, προκύπτει ότι ο μόνος τέτοιος γραμμικός συνδυασμός είναι ο $\frac{1}{\sqrt{3}}(u \otimes \bar{u} + d \otimes \bar{d} + s \otimes \bar{s})$ και προφανώς είναι μία singlet κατάσταση. Έτσι, εξηγείται επ' ακριβώς το γιατί γράψαμε στο Σχ. 3.9 τη σύνθεση του fundamental και του antifundamental representation με τον συγκεκριμένο τρόπο. Με άλλα λόγια, το να γράψουμε το τανυστικό γινόμενο $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ ως ένα ευθύ άθροισμα $\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ δεν είναι δική μας επιλογή, αλλά αντιθέτως προκύπτει από αναλυτικούς υπολογισμούς.



Σχήμα 3.13: Οι καταστάσεις κουάρκ-αντικουάρκ οι οποίες προκύπτουν από τη σύνθεση του fundamental με τον antifundamental representation, δηλαδή από το τανυστικό γινόμενο $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$. Αρχικά έχουμε τοποθετήσει όλες τις καταστάσεις των κουάρκ-αντικουάρκ μαζί και τις έχουμε τοποθετήσει στα συγκεκριμένα σημεία του εξαγώνου με βάση τα weights τα οποία δίνονται από τον Πίνακα 3.2. Στη συνέχεια, στο δεξί μέρος του σχήματος έχουμε αναδιατάξει τις καταστάσεις των κουάρκ-αντικουάρκ έτσι ώστε να σέβονται τη δράση των τελεστών E_{\pm}^m της $SU(3)$.

Στη συνέχεια, μπορούμε να κάνουμε ακριβώς το ίδιο και για το τανυστικό γινόμενο $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$, το οποίο μελετήσαμε στο Σχ. 3.10 και περιγράφει ουσιαστικά τη σύνθεση κουάρκ-κουάρκ, ή με άλλα λόγια, τη σύνθεση του fundamental representation με τον εαυτό του. Οι αντίστοιχες λοιπόν καταστάσεις, οι οποίες προκύπτουν από τη σύνθεση κουάρκ-κουάρκ δίνονται στον Πίνακα 3.4. Στην ουσία, η σύνθεση αυτή παρουσιάζεται στο κάτω αριστερά μέρος του Σχ. 3.10 όπου φαίνονται χαρακτηριστικά τα 4 τριγωνάκια τα οποία αναπαριστούν με έναν κάπως αφηρημένο τρόπο τη σύνθεση κουάρκ-κουάρκ (δείτε και το Σχ. 3.14).

Παρατηρούμε τώρα από τον Πίνακα 3.4 ότι το highest weight στη σύνθεση κουάρκ-κουάρκ το παίρνουμε για την κατάσταση $u \otimes u$, και συγκεκριμένα είναι $(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Για να βρούμε τώρα τις ζητούμενες καταστάσεις, εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους τελεστές καταβίβασης, όπως κάναμε και στην προηγούμενη περίπτωση. Προσέξτε ότι τώρα οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης θα δίνονται από τη σχέση $E_{\pm}^m = e_{\pm}^m \otimes I + I \otimes e_{\pm}^m$. Από την εφαρμογή λοιπόν των E_{\pm}^m πάνω στο highest weight προκύπτουν μόνο 6 από τις συνολικά 9 καταστάσεις που αναμέναμε, οι οποίες δίνονται στον Πίνακα 3.5 μαζί με τα αντίστοιχα weights.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΚΟΥΑΡΚ-ΚΟΥΑΡΚ	WEIGHTS
$u \otimes u$	$(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$d \otimes d$	$(-1, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$s \otimes s$	$(0, -\frac{2}{\sqrt{3}})$
$u \otimes d, d \otimes u$	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$u \otimes s, s \otimes u$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$
$d \otimes s, s \otimes d$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$

Πίνακας 3.4: Τα weights τα οποία προκύπτουν από τη σύνθεση των κουάρκ $3 \otimes 3$.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΚΟΥΑΡΚ-ΚΟΥΑΡΚ	WEIGHTS
$u \otimes u$	$(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$d \otimes d$	$(-1, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$s \otimes s$	$(0, -\frac{2}{\sqrt{3}})$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes u + u \otimes d)$	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(s \otimes u + u \otimes s)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes s + s \otimes d)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$

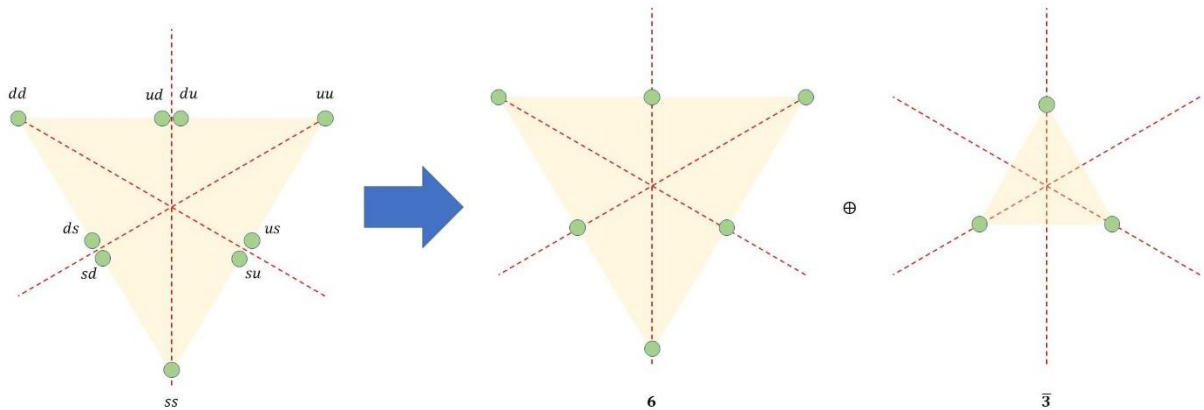
Πίνακας 3.5: Τα weights τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή των E_{\pm}^m ($m = 1, 2, 3$) πάνω στο highest weight $(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$, το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση $u \otimes u$.

Οι καταστάσεις οι οποίες εμφανίζονται στον Πίνακα 3.5 συμβολίζονται ως **6**. Αν τώρα από τις συνολικές καταστάσεις της σύνθεσης κουάρκ-κουάρκ αφαιρέσουμε τις 6 αυτές καταστάσεις, θα μείνουμε μόνο με τρεις καταστάσεις τις οποίες αντίστοιχα θα πρέπει να περιγράψουμε. Από αυτές τις τρεις καταστάσεις, η κατάσταση με το highest weight είναι εκείνη η οποία έχει weight $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Όπως προκύπτει όμως και από τον Πίνακα 3.4, η κατάσταση αυτή θα πρέπει να γράφεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $d \otimes u$ και $u \otimes d$. Επιπλέον, ο γραμμικός αυτός συνδυασμός θα πρέπει να δίνει μηδενικό αποτέλεσμα ύστερα από την εφαρμογή σε αυτόν των τελεστών E_{\pm}^m έτσι ώστε να μην αναπαράγεται καμία από τις καταστάσεις που ανήκουν στον Πίνακα 3.5. Από όλα αυτά, προκύπτει ότι ο μόνος γραμμικός συνδυασμός με αυτές τις ιδιότητες είναι ο $\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes u - u \otimes d)$. Δουλεύοντας με το ίδιο σκεπτικό και για τις άλλες καταστάσεις προκύπτουν οι εναπομείναντες καταστάσεις, οι οποίες συγκεντρωτικά δίνονται στον Πίνακα 3.6 μαζί με τα αντίστοιχα weights. Αν όμως θελήσουμε να παραστήσουμε τις καταστάσεις αυτές σε ένα weight lattice θα δούμε ότι συνθέτουν τον antifundamental representation $\bar{\mathbf{3}}$! Παρατηρείστε επιπλέον ότι οι καταστάσεις οι οποίες ανήκουν στην αναπαράσταση **6** είναι συμμετρικές, ενώ εκείνες οι οποίες ανήκουν στον antifundamental representation $\bar{\mathbf{3}}$ είναι αντισυμμετρικές.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΚΟΥΑΡΚ-ΚΟΥΑΡΚ	WEIGHTS
$\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes u - u \otimes d)$	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(s \otimes u - u \otimes s)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes s - s \otimes d)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$

Πίνακας 3.6: Οι αντισυμμετρικές καταστάσεις οι οποίες συνθέτουν τον antifundamental representation $\bar{\mathbf{3}}$ μαζί με τα αντίστοιχα weights.

Με τον τρόπο λοιπόν που μελετήσαμε μπορούμε να αναλύσουμε κάθε πιθανό συνδυασμό των κουάρκ με τον εαυτό τους ή με τα αντίστοιχά τους αντικουάρκ. Επιπλέον, μπορούμε με τον τρόπο αυτό να μελετήσουμε και ένα τανυστικό γινόμενο της μορφής $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ ή της μορφής $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ κτλ. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα εκάστοτε σωματίδια που γνωρίζουμε (π.χ. πιόνια, καόνια, Λ-σωμάτια, Δ-σωμάτια, Σ-σωμάτια κτλ) σε εξάδες, οκτάδες, δεκάδες και οποιεσδήποτε «-άδες» προκύπτουν από τα εκάστοτε τανυστικά γινόμενα. Καταλήγουμε λοιπόν, μέσω της $SU(3)$ να καταφέρουμε να βάλουμε μία τάξη στα σωματίδια και να τα κατηγοριοποιήσουμε ανάλογα με τις ιδιότητές τους. Κάποια τυπικά παραδείγματα μπορεί κανείς να βρει στην Ενότητα 8.3 της αναφοράς [1] ή σε οποιοδήποτε άλλο βιβλίο που έχει να κάνει με τη θεωρία ομάδων και τις συμμετρίες σωματιδίων.



Σχήμα 3.14: Οι καταστάσεις κουάρκ-κουάρκ οι οποίες προκύπτουν από τη σύνθεση του *fundamental* με τον εαυτό του, δηλαδή από το τανυστικό γινόμενο $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. Αρχικά έχουμε τοποθετήσει και πάλι όλες τις καταστάσεις της σύνθεσης κουάρκ-κουάρκ μαζί και τις έχουμε τοποθετήσει σε ένα μεγάλο τρίγωνο με βάση τα *weights* τα οποία δίνονται από τον Πίνακα 3.4. Στη συνέχεια, στο δεξί μέρος του σχήματος έχουμε αναδιατάξει τις καταστάσεις των κουάρκ σεβόμενοι τη δράση των τελεστών E_{\pm}^m της $SU(3)$. Ουσιαστικά, είναι σαν να σπάμε το αρχικό μας τρίγωνο έτσι ώστε η κάθε κατάσταση να έχει πολλαπλότητα 1. Το γεγονός αυτό όμως δεν είναι επιλογή μας αλλά προκύπτει από την ίδια μας τη θεωρία.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, αξίζει να αναφέρουμε ότι ο πιο πρακτικός τρόπος για να κάνουμε πράξεις μεταξύ των διάφορων αναπαραστάσεων στη γενική ομάδα $SU(N)$, είναι με τη χρήση κάποιων ειδικών πινάκων οι οποίοι ονομάζονται Young tableaux. Παρ' όλα αυτά, επειδή χρειάζεται να αναπτυχθεί κάποια επιπλέον θεωρία ώστε να μπορέσουμε να θεμελιώσουμε τα Young tableaux και να τα χρησιμοποιήσουμε σε πράξεις, αναφέρουμε εδώ μόνο το γεγονός ότι χρησιμοποιούνται ευρέως στη Θεωρία Ομάδων καθώς και στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων.

Παράρτημα

Σε αυτό το Παράρτημα δίνουμε κάποιες γενικές αλλά απαραίτητες ιδιότητες των πινάκων που χρησιμοποιούμε εδώ. Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε βιβλίο εισαγωγής στη Γραμμική Άλγεβρα.

Στο μάθημα αυτό, αλλά και γενικά στη θεωρία ομάδων, χρησιμοποιούμε κυρίως τους τετράγωνους πίνακες. Γενικά, ένας πίνακας ο οποίος έχει m γραμμές και n στήλες συμβολίζεται με ένα γράμμα της αλφαβήτου, έστω M , και λέμε ότι έχει διαστάσεις $m \times n$. Οι τετραγωνικοί πίνακες που μας ενδιαφέρουν εδώ, είναι αυτοί οι οποίοι έχουν ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, έχουν δηλαδή διαστάσεις $n \times n$.

Στη συνέχεια, ξεκινώντας από έναν τετράγωνο πίνακα M διαστάσεων $n \times n$ και θεωρώντας ότι τα στοιχεία του είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, μπορούμε να ορίσουμε τα εξής:

- Ορίζουμε ως **αντίστροφο** πίνακα N , διαστάσεων $n \times n$, τον πίνακα εκείνον για τον οποίο $MN = NM = I_n$. Για τον πίνακα αυτόν γράφουμε λοιπόν ότι $N = M^{-1}$. Σημειώνεται ότι για να είναι ένας πίνακας αντιστρέψιμος θα πρέπει να έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός, δηλαδή $\det(M) \neq 0$. Ο πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $\det(M) = 0$ ονομάζεται singular ενώ εκείνος για τον οποίο $\det(M) \neq 0$ ονομάζεται non-singular. Επομένως ένας non-singular πίνακας έχει αντίστροφο ενώ ένας singular όχι.
- Ορίζουμε ως **ανάστροφο** πίνακα τον πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον αρχικό πίνακα M εναλλάσσοντας μεταξύ τους τις γραμμές και τις στήλες. Αν συμβολίσουμε με $(M)_{ij}$ τα στοιχεία του πίνακα M , τότε τα στοιχεία του αναστροφου, ο οποίος συμβολίζεται με M^T , θα είναι $(M)_{ji}$.
- Ο πίνακας M θα λέγεται **συμμετρικός** αν $M^T = M$, δηλαδή αν $(M)_{ij} = (M)_{ji}$. Τα ανεξάρτητα στοιχεία ενός συμμετρικού πίνακα $n \times n$ είναι $n(n + 1)/2$.
- Ο πίνακας M θα λέγεται **αντισυμμετρικός** αν $M^T = -M$, δηλαδή αν $(M)_{ij} = -(M)_{ji}$. Τα ανεξάρτητα στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πίνακα $n \times n$ είναι $n(n - 1)/2$.
- Ορίζουμε ως **μιγαδικό συζυγή (complex conjugate)** πίνακα του M , τον πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι τα αντίστοιχα μιγαδικά συζυγή στοιχεία του M , δηλαδή $(M^*)_{ij} = (M_{ij})^*$.
- Ορίζουμε ως **Ερμιτιανό (Hermitian ή conjugate transpose)** πίνακα, τον πίνακα εκείνον ο οποίος ισούται με τον αρχικό πίνακα M και έχει προκύψει παίρνοντας τα μιγαδικά συζυγή στοιχεία του αρχικού πίνακα και εναλλάσσοντας τις γραμμές του και τις στήλες του. Δηλαδή ο Ερμιτιανός πίνακας, ο οποίος συμβολίζεται M^\dagger και για τον οποίο ισχύει $M^\dagger = M$, προκύπτει ως συνδυασμός των δράσεων $M^\dagger = (M^*)^T = (M^T)^*$. Εάν ισχύει ότι $M^\dagger = -M$ τότε ο πίνακας λέγεται **anti-Hermitian**.

Αναφέραμε προηγουμένως ότι αν ένας πίνακας M διαστάσεων $n \times n$ έχει μη-μηδενική ορίζουσα τότε αυτός ονομάζεται **non-singular**. Οι non-singular πίνακες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη Φυσική αλλά και στη Θεωρία Ομάδων λόγω της ιδιότητάς τους να έχουν ορίζουσα διάφορη του μηδενός. Το σύνολο των non-singular πινάκων αποτελεί ομάδα αν το εφοδιάσουμε με την πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων. Παρ' όλα αυτά, η ομάδα αυτή είναι πολύ γενική και έτσι μπορούμε να ξεχωρίσουμε κάποιες εξίσου πολύ σημαντικές υποομάδες της. Προφανώς οι υποομάδες της θα είναι και αυτές εφοδιασμένες με την πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων. Έχουμε λοιπόν τις εξής υποομάδες:

- **Μιγαδική Γενική Γραμμική Ομάδα $GL(n, \mathbb{C})$ (Complex General Linear Group)**. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους non-singular πίνακες με μιγαδικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων του εκάστοτε πίνακα είναι $2n^2$ μιας και δεν έχουμε κάποιον επιπλέον περιορισμό εκτός του $\det(M) \neq 0$. Σημειώνουμε επίσης ότι, το εκάστοτε στοιχείο $(M)_{ij}$ λόγω του ότι είναι μιγαδικό χαρακτηρίζεται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.
- **Πραγματική Γενική Γραμμική Ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ (Real General Linear Group)**. Η ομάδα αυτή ορίζεται ακριβώς όπως και η $GL(n, \mathbb{C})$ με τη διαφορά ότι όλα τα στοιχεία των πινάκων θα πρέπει να είναι πραγματικοί αριθμοί. Ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων θα είναι και πάλι n^2 .
- **Μιγαδική Ειδική Γραμμική Ομάδα $SL(n, \mathbb{C})$ (Complex Special Linear Group)**. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους πίνακες οι οποίοι έχουν μιγαδικά στοιχεία καθώς και ορίζουσα ίση με τη μονάδα. Λόγω του επιπλέον αυτού περιορισμού προκύπτει ότι, οι ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων της ομάδας αυτής είναι $2(n^2 - 1)$.
- **Πραγματική Ειδική Γραμμική Ομάδα $SL(n, \mathbb{R})$ (Real Special Linear Group)**. Η ομάδα αυτή ορίζεται ακριβώς όπως και η $SL(n, \mathbb{C})$ με τη διαφορά ότι τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί. Στην ομάδα αυτή, ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι $n^2 - 1$.
- **Μοναδιαία Ομάδα $U(n)$ (Unitary Group)**. Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους unitary πίνακες για τους οποίους γνωρίζουμε ότι ισχύει $U^\dagger U = I_n$. Γράφοντας την εξίσωση αυτή με τη βοήθεια των στοιχείων που αποτελούν τους unitary πίνακες έχουμε ότι $\sum_{k=1}^n U_{ik} U_{kj}^* = \sum_{k=1}^n U_{ik}^* U_{kj} = \delta_{ij}$. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι κανένα στοιχείο των unitary πινάκων δε θα έχει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας. Επιπλέον, από τους περιορισμούς στους οποίους υπόκεινται τα στοιχεία των unitary πινάκων προκύπτει ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών τους είναι n^2 .
- **Ειδική Μοναδιαία Ομάδα $SU(n)$ (Special Unitary Group)**. Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους unitary πίνακες $U(n)$ για τους οποίους ισχύει ότι $\det(U)=1$. Λόγω του επιπλέον αυτού περιορισμού, οι ανεξάρτητες μεταβλητές των πινάκων της ομάδας αυτής είναι $n^2 - 1$.
- **Ορθογώνια Ομάδα $O(n)$ (Orthogonal Group)**. Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους πίνακες οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $O^T O = I_n$. Σημειώνουμε ότι από αυτή τη σχέση προκύπτει η πολύ σημαντική ιδιότητα των ορθογώνιων πινάκων $O^T = O^{-1}$. Επομένως

η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα θα είναι ± 1 μιας και ισχύει ότι $|O^T O| = |O^T| |O| = |O| |O| = |O|^2 = |I_n| = \pm 1$. Η ορθογώνια ομάδα μπορεί να χωριστεί και αυτή σε δύο ομάδες, την $O(n, \mathbb{C})$ και την $O(n, \mathbb{R})$, όπου τα στοιχεία της πρώτης είναι μιγαδικοί αριθμοί ενώ εκείνα της δεύτερης είναι πραγματικοί αριθμοί. Τώρα, ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων της $O(n, \mathbb{C})$ είναι $n(n-1)$, ενώ της $O(n, \mathbb{R})$ είναι $n(n-1)/2$. Σημειώνουμε ότι οι πίνακες με ορίζουσα -1 δεν αποτελούν ομάδα διότι το σύνολο αυτό δεν περιέχει το μοναδιαίο στοιχείο.

- **Ειδική Μιγαδική Ορθογώνια Ομάδα $SO(n, \mathbb{C})$ (Special Complex Orthogonal Group).** Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους ορθογώνιους πίνακες $O(n, \mathbb{C})$ οι οποίοι έχουν ορίζουσα ίση με $+1$. Λόγω του επιπλέον περιορισμού για την ορίζουσα, ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών θα είναι $(n-1) - 1$.
- **Ειδική Πραγματική Ορθογώνια Ομάδα $SO(n, \mathbb{R})$ (Special Real Orthogonal Group).** Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους ορθογώνιους πίνακες με πραγματικά στοιχεία, $O(n, \mathbb{R})$, και οι οποίοι έχουν ορίζουσα ίση με $+1$. Ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών της ομάδας αυτής θα είναι $\frac{n(n-1)}{2} - 1$.

Βιβλιογραφία

- 1) H. F. Jones, *'Groups, Representations and Physics, Second edition'*, Taylor & Francis Group (1998).
- 2) K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, *'Mathematical Methods for Physics and Engineering'*, Cambridge University Press (2006).
- 3) B. C. Hall, *'Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An elementary Introduction'*, Springer (2003).
- 4) H. Georgi, *'Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories, Second edition'*, Taylor & Francis Group (1999).
- 5) Δ. Σουρλάς, *'Θεωρία Ομάδων και Τελεστών'*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών (2012).
- 6) J. Stillwell, *'Naive Lie Theory'*, Springer (2008).