

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

(Υποχρεωτικό 4^{ου} Εξαμήνου)

Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος

Προβλήματα Σειρά # 2 : Ατομικά φάσματα και πρότυπα

Αντιστοιχεί στα

(α) Κεφάλαιο 3 των Serway /Moses/Moyer

(β) Κεφάλαιο 6 του Krane

(γ) Στην Ενότητα 2 του αναρτημένου στο e-class Οδηγού Μελέτης

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.

Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.

Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.

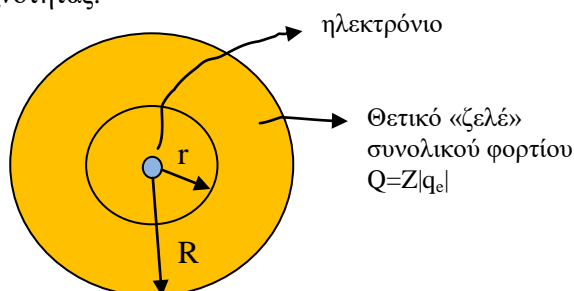
Η ένδειξη ✓ υποδηλώνει πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί σε πρώτη ανάγνωση.

I. Το πρότυπο του Thomson

● **Πρόβλημα 1.** Θεωρήστε ένα μονοηλεκτρονιακό ιόν ατομικού αριθμού Z κατά το πρότυπο του Thomson. Αυτό θα αποτελείται από έναν σφαιρικό θετικό «ζελέ» ακτίνας R με ομοιόμορφη κατανομή συνολικού φορτίου $Q=Z|q_e|$, στο κέντρο του οποίου (για λόγους ευστάθειας) θα βρίσκεται το μοναδικό του ηλεκτρόνιο, όπως εικονίζεται στο Σχήμα.

(α) Απομακρύνουμε το ηλεκτρόνιο από τη θέση ισορροπίας του κατά r . Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ZK_e q_e^2}{m_e R^3}}$$



[Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε το νόμο του Gauss για να υπολογίσετε αρχικά το ηλεκτρικό πεδίο του «ζελέ» σε απόσταση r , και από αυτό τη δύναμη που υφίσταται το ηλεκτρόνιο].

(β) Θεωρείστε τώρα συγκεκριμένα το άτομο του Υδρογόνου ($Z=1$). Η πραγματική έκταση του στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειάς του είναι $R=0,53\text{\AA}$. Έστω ότι το ηλεκτρόνιο απομακρύνεται κατά r από το κέντρο του «ζελέ» παίρνοντας ενέργεια από κάποιο εξωτερικό αίτιο. Αφού θα αρχίσει να ταλαντώνεται, θα εκπέμπει ακτινοβολία στη συχνότητα ταλάντωσης. Κατανοείτε τώρα ένα άλλο βασικό πρόβλημα του μοντέλλου με βάση τη γνώση που έχετε για το φάσμα εκπομπής του Υδρογόνου; Ποια θα είναι αυτή η συχνότητα και το αντίστοιχο μήκος κύματος; Συγκρίνετέ το με αυτό της ισχυρότερης γραμμής του φάσματος εκπομπής του Υδρογόνου που εμφανίζεται στα 122nm (σειρά Lyman).

[Απ. (β) $6,57 \times 10^{15}$ Hz και $45,7$ nm]

II. Το φάσμα του Υδρογόνου

✓ **Πρόβλημα 2.** Ποια τιμή του n σχετίζεται με το μήκος κύματος των $102,6$ nm της σειράς Lyman του ατόμου του υδρογόνου με βάση τη συνδυαστική αρχή των Balmer-Rydberg-Ritz; Μπορεί το συγκεκριμένο μήκος κύματος να σχετίζεται με τις σειρές Paschen και Brackett; [Απ. $n \sim 3$, όχι]

III. Το πρότυπο του Bohr

✓ **Πρόβλημα 3.** Χρησιμοποιήστε την θεωρία του Bohr για να βρείτε τις ενεργειακές διαφορές $E(n_i \rightarrow n_f) = E_{n_i} - E_{n_f}$ στο άτομο του Υδρογόνου και να δείξετε ότι:

(α) $E(4 \rightarrow 2) = E(4 \rightarrow 3) + E(3 \rightarrow 2)$.

(β) $E(4 \rightarrow 1) = E(4 \rightarrow 2) + E(2 \rightarrow 1)$.

✓ **Πρόβλημα 4.** (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των ενεργειακών σταθμών (τις τέσσερις πρώτες) για τα ιόντα He^+ , Li^{++} , Be^{+++} με βάση την πρόβλεψη του προτύπου του Bohr. Η κατασκευή να γίνει υπό σωστή κλίμακα, χρησιμοποιώντας ακόμη και χαρτί μιλιμετρέ. (β) Ποια είναι τα έργα ιονισμού αυτών των ατόμων; Τι παρατηρείτε; Είναι λογικό;

[Απ. Για το He^+ : $E_1 = -54,4 \text{ eV}$, Για το Li^{++} : $E_1 = -122,4 \text{ eV}$, Για το Be^{+++} : $E_1 = -217,6 \text{ eV}$]

✓ **Πρόβλημα 5.** Ποια είναι η ακτίνα της πρώτης επιτρεπόμενης τροχιάς του ηλεκτρονίου στα ιόντα He^+ , Li^{++} , Be^{+++} με βάση την πρόβλεψη του προτύπου του Bohr; Συγκρίνετε με το γνωστό αποτέλεσμα για το άτομο του Υδρογόνου. Σχολιάστε το τι παρατηρείτε γενικά.

[Απ. $0,0265 \text{ nm}$, $0,0177 \text{ nm}$, $0,0132 \text{ nm}$]

✓ **Πρόβλημα 6.** Υπολογίστε τον χρόνο μιας πλήρους περιστροφής του ηλεκτρονίου στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr. Αυτός ο χρόνος είναι γνωστός ως «ατομικό έτος». Συγκρίνατέ τον με τον μέσο χρόνο που το ηλεκτρόνιο «κάθεται» σε μια διεγερμένη κατάσταση ($\sim 10^{-8} \text{ s}$).

[Απ. $\sim 1,5 \times 10^{-16} \text{ s}$]

✓ **Πρόβλημα 7. Α.** Ποια είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του Υδρογόνου σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr; Ποια στην πρώτη και ποια στη δεύτερη διεγερμένη; Τι παρατηρείτε; Απαιτούνται στη συγκεκριμένη περίπτωση σχετικιστικοί υπολογισμοί και διορθώσεις;

[Απ. $v_1 = 2,19 \times 10^6 \text{ m/s}$, $v_2 = 1,09 \times 10^6 \text{ m/s}$, $v_3 = 7,28 \times 10^5 \text{ m/s}$]

Β. Επαναλάβετε τον παραπάνω υπολογισμό για το ιόν Li^{++} . Δοκιμάστε στη συνέχεια με ένα ιόν που έχει $Z > 80$ (από το οποίο έχουμε αφαιρέσει όλα τα ηλεκτρόνια εκτός από ένα). Τι παρατηρείτε;

✓ **Πρόβλημα 8.** Να υπολογιστεί η σταθερά του Planck εάν είναι γνωστή η διαφορά $\lambda_2 - \lambda_1 = 5347 \text{ \AA}$ στο μήκος κύματος των κύριων γραμμών των σειρών Balmer και Lyman του φάσματος του ατόμου του Υδρογόνου

[Απ. $h = \sqrt[3]{\frac{15(\lambda_2 - \lambda_1)\pi^2 m_e q_e^4}{44c}}$]

✓ **Πρόβλημα 9.** Να αποδείξετε ότι η ενέργεια ιονισμού του ατόμου του Υδρογόνου δίνεται και από την έκφραση

$$E_{ion} = hc \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}$$

Όπου λ_1 το μήκος κύματος της κύριας γραμμής της σειράς Lyman και λ_2 το μήκος κύματος του ορίου της σειράς Balmer του φάσματος του ατόμου του Υδρογόνου. Επαληθεύστε την τιμή της.

✓ **Πρόβλημα 10.** Ως γνωστόν η ενέργεια των επιτρεπόμενων τροχιών σε ένα μονοηλεκτρονιακό άτομο δίδεται σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr από την έκφραση:

$$E_n = -\frac{Z^2 m_e q_e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (1)$$

Παράλληλα η θεωρία της σχετικότητας υποδεικνύει μεταβολή της μάζας του ηλεκτρονίου με την ταχύτητα με βάση τη σχέση:

$$m_e = \frac{m_{0e}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2), \quad m_{0e} = \text{μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου}$$

Εκτιμήστε την επίπτωση της ισχύος της σχέσης (2) στα τρία πρώτα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου του υδρογόνου ($Z=1$). Συγκεκριμένα:

(α) Αποδείξτε ότι η σχετική μεταβολή της μάζας του περιστρεφόμενου ηλεκτρονίου δίδεται από την έκφραση:

$$\frac{\Delta m}{m_{0e}} = \frac{m_e - m_{0e}}{m_{0e}} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{n^2}, \quad a = \frac{K_e q_e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

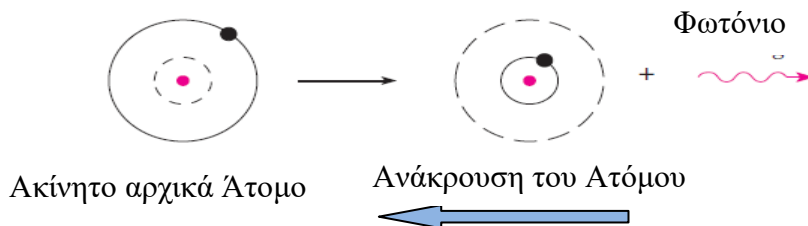
[Υπόδειξη: Αναπτύξτε σε σειρά την υπόρριζο ποσότητα της (2) και κρατείστε τους δύο πρώτους όρους].

(β) Υπολογίστε στη συνέχεια την σχετική μεταβολή στην ενέργεια.

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{E_n(m_e) - E_n(m_{0e})}{E_n(m_{0e})}$$

[Απ.. Για n=1 $\Delta E/E \sim 10^{-5}$]

• **Πρόβλημα 11.** Ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία σε μία διεγερμένη κατάσταση από όπου μεταβαίνει σε στάθμη χαμηλότερης ενέργειας με την εκπομπή ενός φωτονίου.



Να εξαχθεί μία σχέση για την ταχύτητα ανάκρουσης του ατόμου του Υδρογόνου κατά την αποδιέγερση του ηλεκτρονίου του από τη στάθμη υψηλότερης στη στάθμη χαμηλότερης ενέργειας συναρτήσει της ενεργειακής διαφοράς των δύο σταθμών ΔE . Συγκεκριμένα να αποδείξετε ότι:

$$v \cong \frac{\Delta E}{M_{atom} c}$$

όπου M_{atom} η μάζα του ατόμου του Υδρογόνου (ίση πρακτικά με τη μάζα του πρωτονίου). Θεωρείστε μη σχετικιστική ανάκρουση του ατόμου και ότι $2\Delta E/M_{atom} c^2 \ll 1$ (δικαιολογείται πάντα αυτή η προσέγγιση?).

[Εκτεταμένη Υπόδειξη: Συνδυάστε τις αρχές διατήρησης ενέργειας και ορμής

$$M_{atom} v = P_{ph} = \frac{E_{ph}}{c}$$

$$\Delta E = E_{ph} + \frac{1}{2} M_{atom} v^2$$

Θα πρέπει να καταλήξετε στην εξίσωση $v^2 + 2cv - \frac{2\Delta E}{M_{atom}} = 0$]

• **Πρόβλημα 12.** Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα ελκτικό κέντρο υπό την επίδραση ελκτικής δύναμης μέτροι

$$F = -C r^{-\frac{3}{2}}, \quad C = \text{θετική σταθερά}$$

Εφαρμόστε κατά γράμμα τη θεωρία του Bohr για να βρείτε τις στασίμων τροχιών του σωματιδίου. [Υπόδειξη: Θα πρέπει να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου από τη σχέση $U(r) = -\int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$]

[Απ. $E_n = -\frac{3}{2} \left(\frac{mC^4}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$]

