

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ (ΟΔΗΓΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ)

Έκδοση 2023

© ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΣΚΑΡΛΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1
Ο κυματοσωματιδιακός διϊσμός του
φωτός
Έκδοση 2023
© ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΣΚΑΡΛΑΤΟΣ

I. ΤΟ ΦΩΣ ΩΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΚΥΜΑ

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό ή τον αέρα: Έστω στο κενό ή τον αέρα, όπου δεν υπάρχουν άλλες πηγές ($\rho=0$ και $J=0$), χρονομεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο της μορφής:

$$\vec{E}(x,t) = 0\hat{i} + E_y(x,t)\hat{j} + 0\hat{k} = E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{j}$$

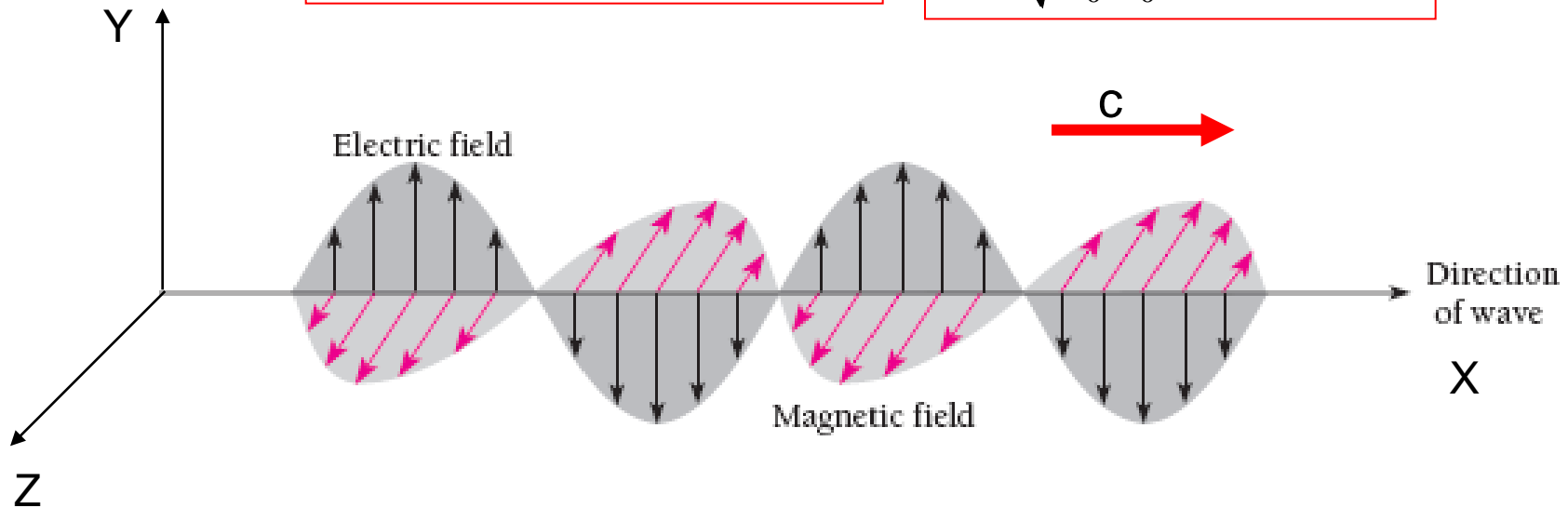
Αποδεικνύεται ότι:

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \sin(kx - \omega t)\hat{k}$$

και ότι:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \Rightarrow \vec{B}(x,t) = \frac{\vec{E}(x,t)}{c}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$



Ισοδύναμα, έστω στο κενό ή τον αέρα, όπου δεν υπάρχουν άλλες πηγές ($\rho=0$ και $J=0$), χωρο-χρονομεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία της μορφής:

$$\vec{E}(t) = 0\hat{i} + E_y(t)\hat{j} + 0\hat{k} \quad \vec{B}(t) = 0\hat{i} + 0\hat{j} + B_z(t)\hat{k}$$

Τότε αποδεικνύεται ότι:

$$E_y, B_z = f(x, t) \Rightarrow \vec{E}, \vec{B} = f(x, t)$$

και ότι:

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t^2}$$

Τα δύο πεδία διαδίδονται ως εγκάρσια κύματα

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

Ένταση ηλεκτρομαγνητικού κύματος: Γνωρίζουμε ότι οι πυκνότητες ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

Στην περίπτωση ΗΜ κύματος οι παραπάνω εκφράσεις δηλώνουν στιγμιαίες τιμές. Η συνολική πυκνότητα ενέργειας (στιγμιαία τιμή) ενός ΗΜ κύματος θα είναι:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \xrightarrow[\substack{B = \frac{E}{c} \\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}]{} u = 2 \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

Επομένως, η στιγμιαία ένταση του ΗΜ κύματος (η ενέργεια που διαπερνά μια μοναδιαία επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος στη μονάδα του χρόνου) είναι:

$$I = cu = c\varepsilon_0 E^2 \quad [\text{W/m}^2]$$

Για ένα αρμονικό ΗΜ κύμα η μέση ένταση σε χρόνο μιας περιόδου θα είναι:

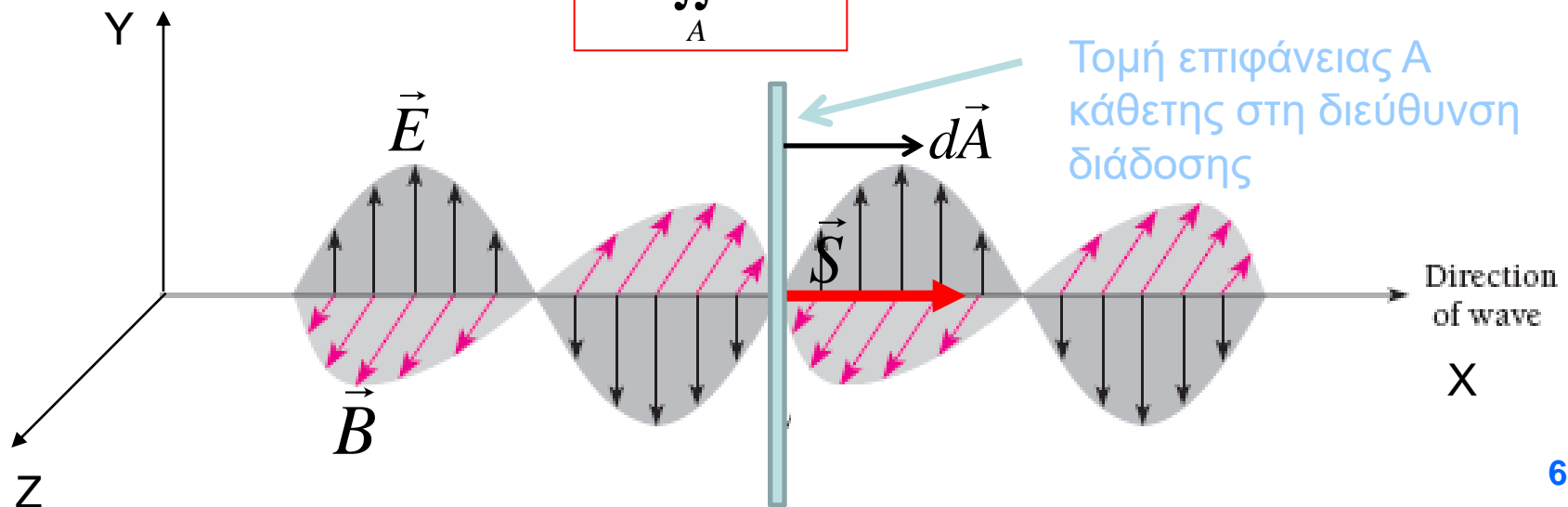
$$I_{ave} = c\varepsilon_0 E_0^2 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kx - \omega t) dt}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \quad [\text{W/m}^2]$$

Το διάνυσμα Poynting:

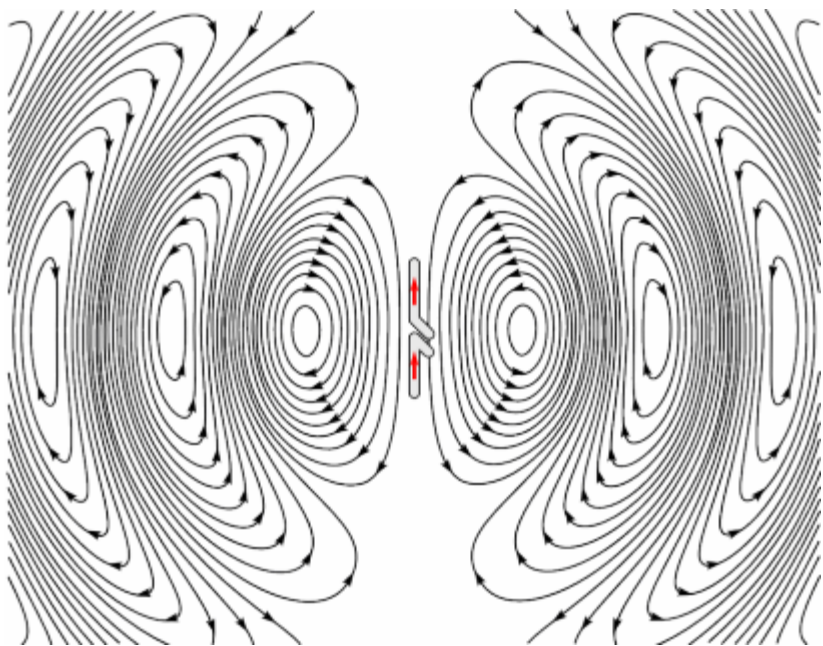
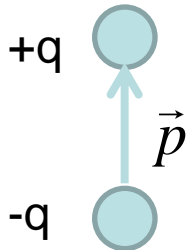
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = c^2 \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

- Διεύθυνση και φορά αυτή της διάδοσης του κύματος
- $|\vec{S}| = \left| \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \right| = \left| c^2 \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \right| = c \varepsilon_0 E^2 = I \quad [\text{W/m}^2]$
- Ενέργεια του κύματος που διαπερνά την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου:

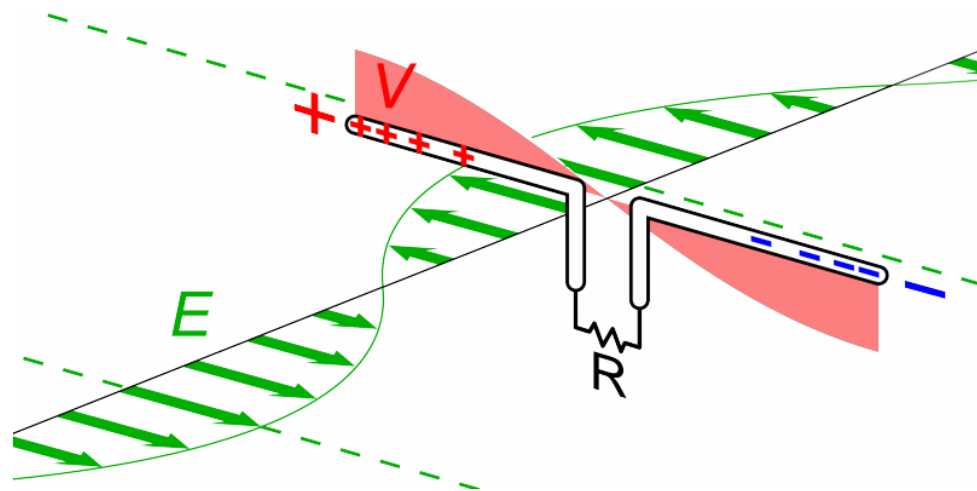
$$P = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad \text{W}$$



Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων: Παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα στα οποία βασίζεται η λειτουργία των κεραιών.



Heinrich Rudolf Hertz
(1857 – 1894)



Το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας:

1. Ραδιοκύματα. (λ : λίγα km – 0,3m) (f: λίγα Hz – 10^9 Hz). Σε αυτά ανήκουν τα κύματα ραδιοφωνίας και τηλεόρασης. Παράγονται από ηλεκτρονικές διατάξεις (ταλαντωτές).

2. Μικροκύματα. (λ : 0,3m- 10^{-3} m) (f: 10^9 Hz- 3×10^{11} Hz). (UHF). Σε αυτά στηρίζονται τα radar. Παράγονται από ηλεκτρονικές διατάξεις (γεννήτριες μικροκυμάτων).

3. Υπέρυθρο. (λ : 10^{-3} m- $7,8 \times 10^{-7}$ m) (f: 3×10^{11} Hz- 4×10^{14} Hz).

Απομακρυσμένο (λ : 10^{-3} m - 3×10^{-5} m)

Μέσο (λ : 3×10^{-5} m - 3×10^{-6} m)

Εγγύς (λ : 3×10^{-6} m - $7,8 \times 10^{-7}$ m)

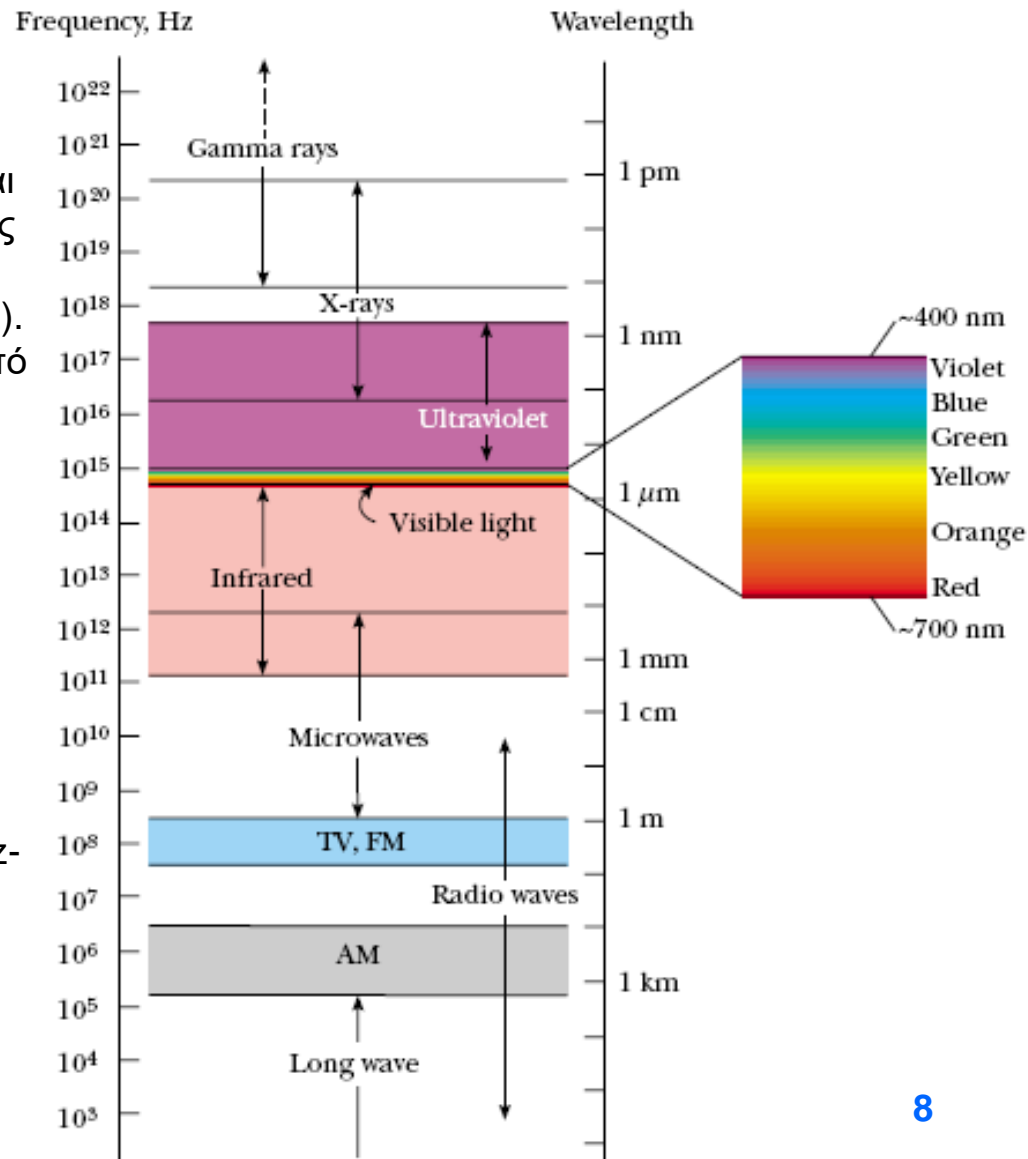
Παράγεται από μόρια και θερμά σώματα.

4. Ορατό. (λ : $7,8 \times 10^{-7}$ m - $3,8 \times 10^{-7}$ m) (f: 4×10^{14} Hz- 8×10^{14} Hz). Παράγεται από άτομα και μόρια.

5. Υπεριώδες. (λ : $3,8 \times 10^{-7}$ m - 6×10^{-10} m) (f: 8×10^{14} Hz- 3×10^{17} Hz). Παράγεται από άτομα και μόρια και σε ηλεκτρικές εκκενώσεις.

6. Ακτίνες Χ. (λ : 10^{-9} m- 6×10^{-12} m) (f: 3×10^{17} Hz- 5×10^{19} Hz). Παράγονται από τα ισχυρά δέσμια ηλεκτρόνια των ατόμων.

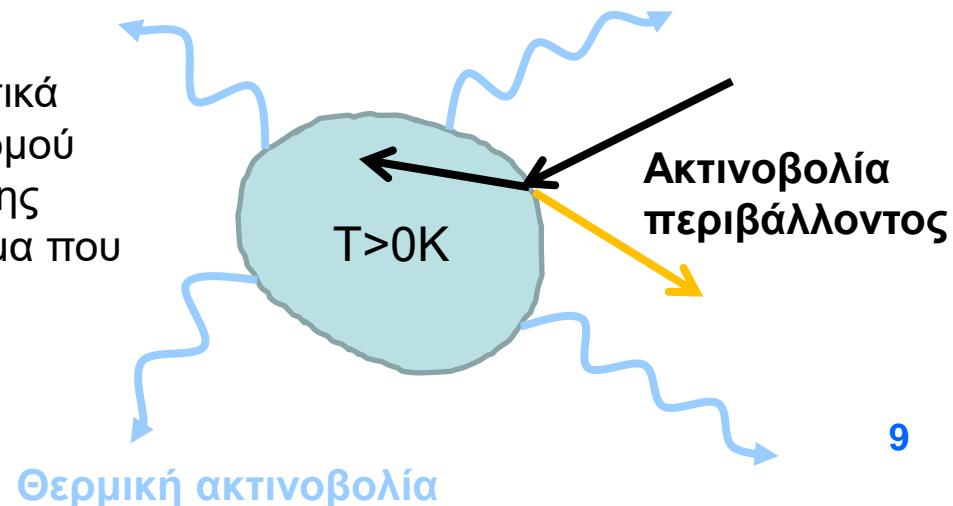
7. Ακτίνες Γ. (λ : 10^{-10} m - 10^{-14} m) (f: 3×10^{18} Hz- 3×10^{22} Hz). Παράγονται από τους ατομικούς πυρήνες.



II. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ (ΤΟΥ ΜΕΛΑΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ)-1900

II.1 Θερμική ακτινοβολία και η έννοια του μέλανος σώματος:

- ▶ Με τον όρο «θερμική ακτινοβολία» εννοούμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπουν όλα τα θερμά (σε $T > 0\text{K}$) σώματα λόγω της θερμοκρασίας τους.
- Η θερμική ακτινοβολία εκπέμπεται λόγω της ταλάντωσης των δομικών λίθων των υλικών (ταλαντούμενα μόρια που δρουν σαν ταλαντούμενα δίπολα)
- Η θερμική ακτινοβολία εμφανίζει ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων (ή μηκών κύματος) που δεν εξαρτάται από τη φύση του υλικού ή της επιφάνειάς του, αλλά μόνο από τη θερμοκρασία του.
- ▶ Όμως, ταυτόχρονα, τα σώματα απορροφούν και ανακλούν ακτινοβολία από το περιβάλλον (θερμικής ή άλλης μορφής). Έτσι η ακτινοβολία που προέρχεται από την επιφάνειά τους είναι μίγμα της θερμικής ακτινοβολίας που τα ίδια εκπέμπουν και της ακτινοβολίας από το περιβάλλον την οποία ανακλούν.
- Τυχόν εξαρτήσεις που παρατηρούνται πειραματικά συναρτήσει της φύσης και της επιφάνειας του θερμού σώματος οφείλονται αποκλειστικά στο ποσοστό της ανακλώμενης ακτινοβολίας που περιέχει το φάσμα που μετράμε.



► Στις συνήθεις θερμοκρασίες ($T=300\text{K}-320\text{K}$) ολόκληρο το φάσμα της θερμικά εκπεμπόμενης ΗΜ ακτινοβολίας από την πλειοψηφία των σωμάτων βρίσκεται στο βαθύ υπέρυθρο, και επομένως δεν είναι ορατή. Κατά συνέπεια τα θερμά σώματα (σε συνήθεις έως αρκετά υψηλές θερμοκρασίες) δεν είναι ορατά λόγω της ακτινοβολίας που εκπέμπουν, αλλά λόγω αυτής που ανακλούν από την επιφάνειά τους (**ετερόφωτα σώματα**).

► Καθώς η θερμοκρασία του σώματος αυξάνεται, το μεγαλύτερο μέρος του εκπεμπόμενου φάσματος μετατοπίζεται σε υψηλότερες συχνότητες (μικρότερα μήκη κύματος) και τα σώματα αρχίζουν να γίνονται ορατά ως αμυδρά κόκκινα.

Σε ακόμα υψηλότερες θερμοκρασίες φαίνονται πλέον έντονα κόκκινα.

Σε πάρα πολύ υψηλές θερμοκρασίες τα σώματα εμφανίζουν ένα λαμπρό μπλέ-άσπρο χρώμα (άνω όριο του ορατού φάσματος).

► Ένα θερμό σώμα έρχεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον του ακόμα και χωρίς να ανταλλάσσει θερμότητα μαζί του. Αρκεί η απώλεια ενέργειας λόγω εκπομπής της θερμικής ακτινοβολίας του. Αρχικά ο ρυθμός εκπομπής είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό απορρόφησης ακτινοβολίας. Θερμική ισορροπία επέρχεται όταν οι δύο ρυθμοί εξισωθούν.

► Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε με ασφάλεια την εκπεμπόμενη θερμική ακτινοβολία από ένα σώμα, αυτό θα πρέπει να απορροφά όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία και να μην ανακλά τίποτα από αυτήν.

- Ένα τέτοιο σώμα, αφού δεν ανακλά τίποτα και η θερμική του ακτινοβολία σε συνήθεις θερμοκρασίες βρίσκεται στην περιοχή του υπέρυθρου, θα φαίνεται μαύρο. Για το λόγο αυτό ονομάζεται και **μέλαν σώμα**.

- Ένα μέλαν σώμα θα είναι ορατό (ως αυτόφωτο) μόνο σε πάρα πολύ υψηλές θερμοκρασίες.

► Η θερμική ακτινοβολία ενός μέλανος σώματος παρουσιάζει τα εξής βασικά χαρακτηριστικά:

α) Εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του

β) Είναι ομογενής (δηλαδή εκπέμπεται ακριβώς η ίδια από οποιοδήποτε τμήμα του)

γ) Είναι ισότροπη (δηλαδή εκπέμπεται η ίδια ακριβώς σε κάθε κατεύθυνση)

► Αφού ένα μέλαν σώμα απορροφά όλα τα μήκη κύματος της ακτινοβολίας που προσπίπτει επάνω του, θα μπορεί και να εκπέμπει θεωρητικά θερμική ακτινοβολία σε άπειρα μήκη κύματος.

Στην πραγματικότητα ένα σώμα με τις παραπάνω ιδιότητες είναι ιδεατό και δεν υπάρχει στη φύση.

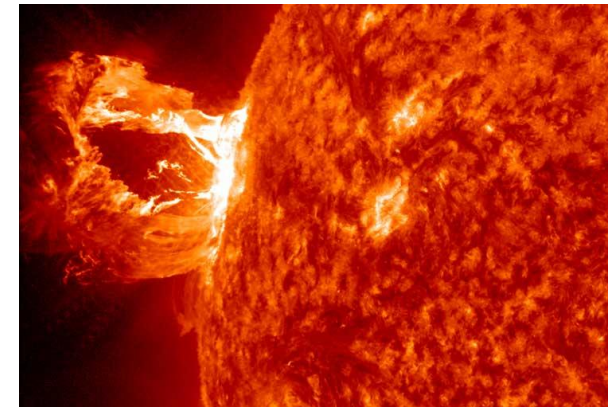
Υπάρχουν, όμως, ικανοποιητικές προσεγγίσεις μελανών σωμάτων:



Καυτά κάρβουνα



Σίδερο στο αμόνι



Αστέρες (Ήλιος)

II.2 Βασικά μεγέθη και νόμοι της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος:

► Ορίζουμε ως «**αφεικτική ικανότητα**» ενός μέλανος σώματος το πηλίκο της ιστροπικά εκπεμπόμενης ισχύος της θερμικής ΗΜ ακτινοβολίας του δια την επιφάνειά του.

$$\alpha = \frac{P}{A} \quad [\text{W/m}^2]$$

Όμως ένα μέλαν σώμα εκπέμπει ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων ή μηκών κύματος που εξαρτάται από τη θερμοκρασία του. Επομένως...

► Ορίζουμε τη «**φασματική κατανομή της αφεικτικής ικανότητας**» ενός μέλανος σώματος $\rho(f, T)$ ή $\rho(\lambda, T)$ [σε σταθερή T $\rho_T(f)$ ή $\rho_T(\lambda)$] ως την εκπεμπόμενη ισχύ ανά μονάδα επιφανείας και συχνότητας (ή μήκους κύματος) έτσι ώστε:

εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας και συχνότητας $[\text{W/m}^2\text{Hz}]$

$$d\alpha = \rho_T(f)df$$

εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας σε συχνότητες $f \rightarrow f+df$
[W/m²]

εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας και μήκους κύματος $[\text{W/m}^2\text{m}]$

$$d\alpha = \rho_T(\lambda)d\lambda$$

εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας σε μήκη κύματος $\lambda \rightarrow \lambda+d\lambda$
[W/m²]

Επομένως σε δεδομένη T:

$$\alpha = \int_0^{\infty} \rho_T(f) df = \int_0^{\infty} \rho_T(\lambda) d\lambda \quad [\text{W/m}^2]$$

$$P = A \int_0^{\infty} \rho_T(f) df = A \int_0^{\infty} \rho_T(\lambda) d\lambda \quad [\text{W}]$$

Παρατήρηση 1: Η εκπεμπόμενη ισχύς σε μήκη κύματος μικρότερα ή ίσα του λ_1 είναι

$$P = A \int_0^{\lambda_1} \rho_T(\lambda) d\lambda$$

Παρατήρηση 2: Η εκπεμπόμενη ισχύς σε μήκη κύματος μεταξύ των λ_1 και λ_2 είναι

$$P = A \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho_T(\lambda) d\lambda$$

Γενική Παρατήρηση: Στη διεθνή βιβλιογραφία εισαγωγικού προπτυχιακού επιπέδου η αφητική ικανότητα του μέλανος σώματος και η φασματική κατανομή της δηλώνονται και ως «ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας» και «φασματική κατανομή της έντασης της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας». Πράγματι το α έχει διαστάσεις έντασης [W/m^2]. Όμως, η αφητική ικανότητα συνδέεται με την ικανότητα εκπομπής μιας επιφάνειας, ενώ η ένταση της ΗΜ ακτινοβολίας συνδέεται με την πρόσπτωσή της σε μια επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Στα βιβλία η χρήση του όρου «ένταση» για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι καταχρηστική!



Τέσσερις νόμοι διέπουν την ακτινοβολία του μέλανος σώματος:

1. Νόμος της παγκοσμιότητας του φάσματος.

Η καμπύλη της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και είναι η ίδια για όλα τα μελανά σώματα.

2. Νόμος των Stefan-Boltzmann.

$$\alpha = \int_0^{\infty} \rho_T(f) df = \int_0^{\infty} \rho_T(\lambda) d\lambda = \sigma T^4$$

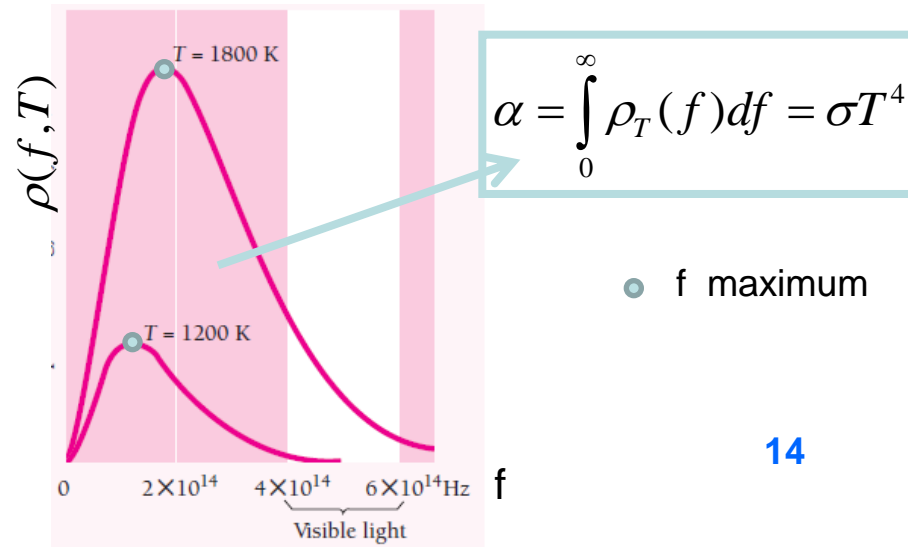
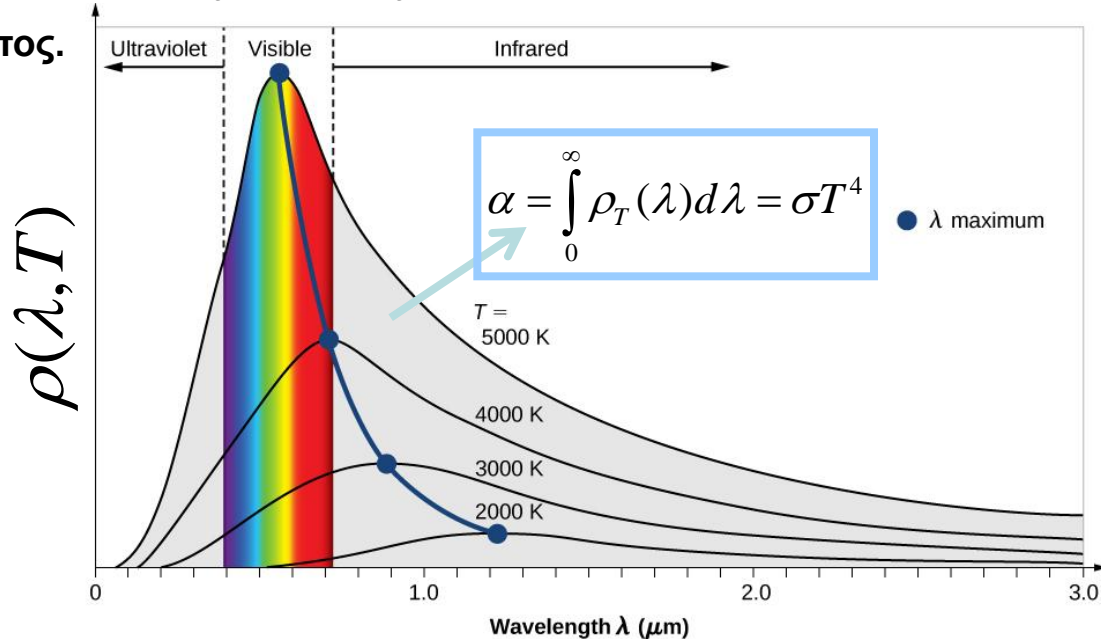
$$\sigma = 5,67037 \times 10^{-8} \text{ [W / m}^2 \text{ K}^4\text{]}$$

$$P = A\sigma T^4 \text{ [W]}$$

3. Νόμος μετατοπίσεως του Wien. Καθώς η θερμοκρασία του σώματος αυξάνεται, το μέγιστο της κατανομής $\rho_T(\lambda)$ [$\rho_T(f)$] μετατοπίζεται σε χαμηλότερα μήκη κύματος [υψηλότερες συχνότητες] κατά τρόπο ώστε:

$$\lambda_{\max} T = \text{σταθερά} = 2,8978 \times 10^{-3} \text{ [mK]}$$

$$\frac{f_{\max}}{T} = \text{σταθερά} = 5,889 \times 10^{10} \text{ [HzK}^{-1}\text{]}$$



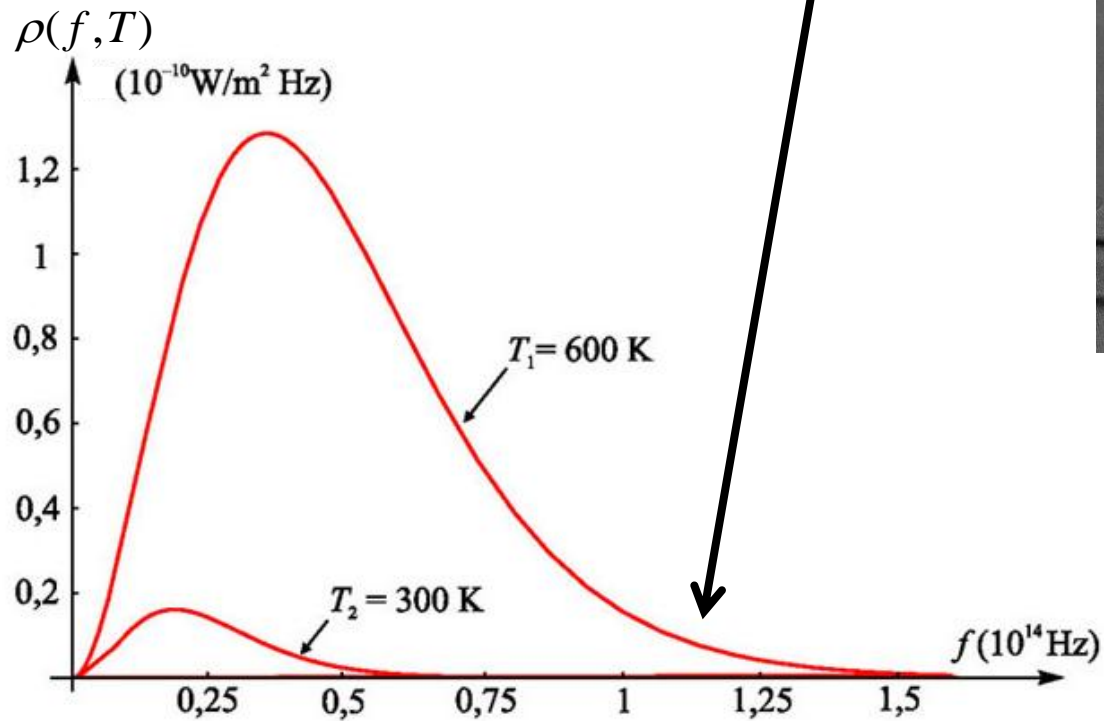
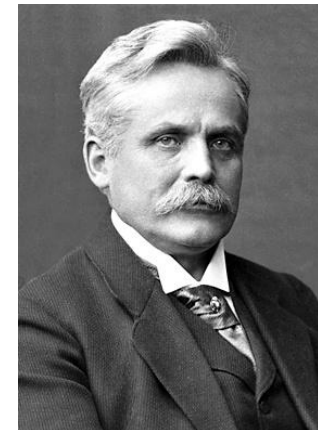
4. **Ασυμπτωτικός νόμος του Wien.** Στις υψηλές συχνότητες ($f \rightarrow \infty$) η φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας περιγράφεται από την εμπειρική (ασυμπτωτική) σχέση:

$$\rho(f, T) = C_1 f^3 e^{-\frac{C_2 f}{T}}, \text{ για } f \rightarrow \infty$$

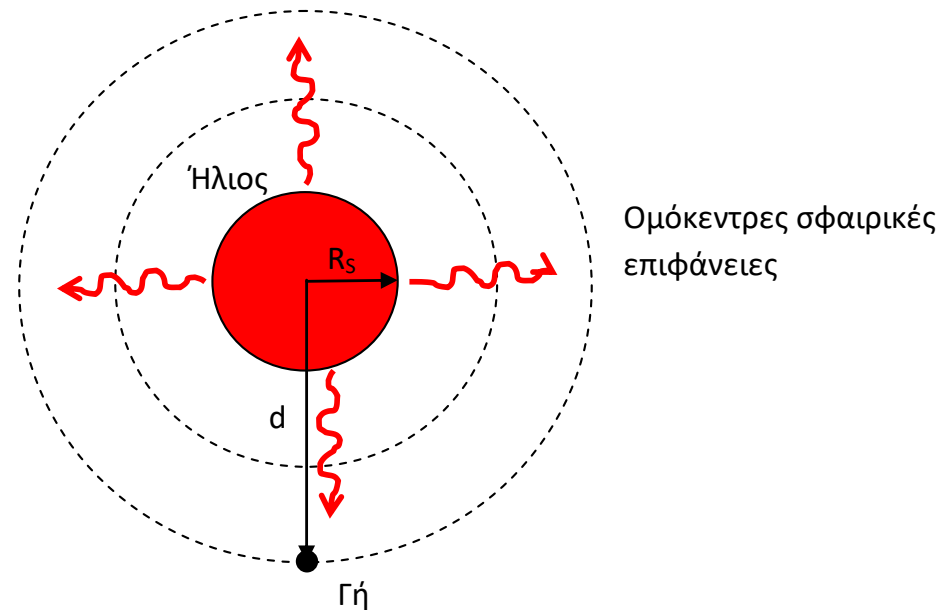
Josef Stefan
(1835 – 1893)



Wilhelm Wien
(1864 – 1928)



Παράδειγμα 1: (Λύθηκε στο Μάθημα) Να εκτιμηθεί η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου από τα ακόλουθα δεδομένα: (α) Ο Ήλιος θεωρείται μέλαν σώμα. (β) Η ακτίνα του Ήλιου είναι $R_S = 7 \times 10^8 \text{m}$. (γ) Η μέση απόσταση Γής – Ήλιου είναι $d = 1,5 \times 10^{11} \text{m}$ (δ) Η ισχύς της ηλιακής ακτινοβολίας σε όλες τις συχνότητες που δέχεται η Γή ανά m^2 από τον Ήλιο είναι 1400 W/m^2 . Δεχθείτε ότι η σταθερά Stefan είναι $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$.



Παράδειγμα 2: (Λύθηκε στο Μάθημα) (α) Σε ποιο μήκος κύματος εκπέμπει το μέγιστο της θερμικής ακτινοβολίας του ένα (μέλαν) σώμα σε θερμοκρασία 20°C ; (β) Σε ποια θερμοκρασία πρέπει να το θερμάνουμε ώστε το μέγιστο της ακτινοβολίας του να εκπέμπεται στην κόκκινη περιοχή του ορατού φάσματος ($\lambda=650\text{ nm}$); (γ) Πόσο περισσότερη ακτινοβολία εκπέμπει ένα σώμα στην υψηλότερη αυτή θερμοκρασία ;

II.3 Απόπειρα κλασικής ερμηνείας της φασματικής κατανομής των Rayleigh-Jeans (1905)

John William Strutt,
3rd Baron Rayleigh
(1842 – 1919)



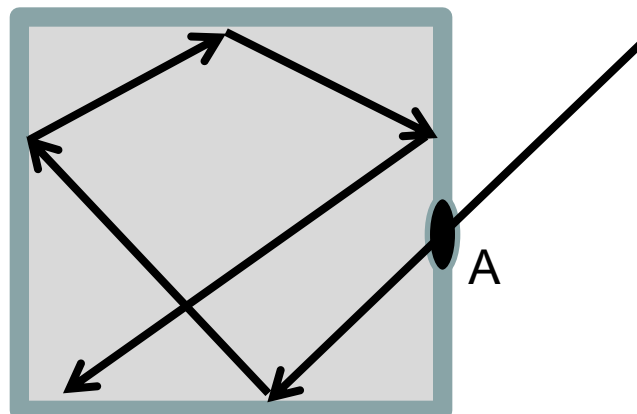
- Βήμα 1^ο (Ανάπτυξη μοντέλλου για το μέλαν σώμα):** Κατασκευάζουμε μια κοιλότητα στο εσωτερικό ενός κύβου. Η κοιλότητα επικοινωνεί με το περιβάλλον μέσω μιας πολύ μικρής οπής με εμβαδό A .
- Τα τοιχώματα του κύβου βρίσκονται σε θερμοκρασία T .
 - Η ακτινοβολία του περιβάλλοντος που προσπίπτει στην οπή εισέρχεται στην κοιλότητα, όπου υφιστάμενη πολλαπλές ανακλάσεις απορροφάται από τα τοιχώματα. Είναι πρακτικά αδύνατο να εξέλθει πάλι από την οπή.
 - Τα θερμαινόμενα τοιχώματα γεμίζουν την κοιλότητα με θερμική H/M ακτινοβολία. Μέρος της εξέρχεται μέσω της οπής στο περιβάλλον.

ΤΟ ΜΕΛΑΝ ΣΩΜΑ ΕΙΝΑΙ Η ΟΠΗ

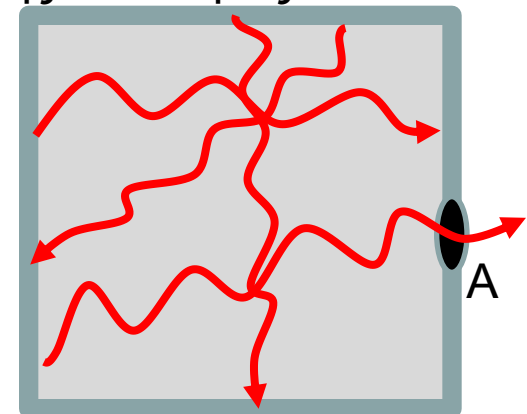
Sir James Hopwood Jeans
(1877 – 1946)



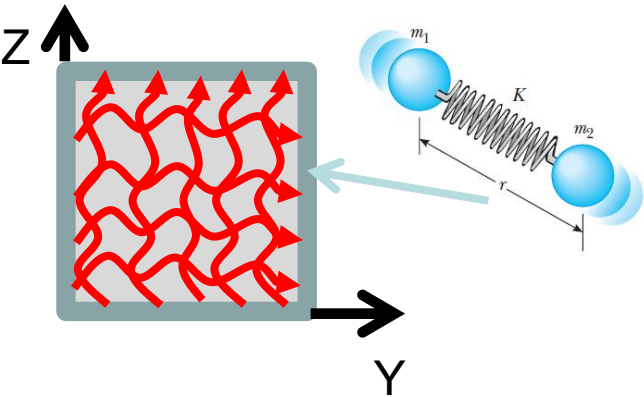
Ακτινοβολία του
περιβάλλοντος



Έξοδος θερμικής ακτινοβολίας
της κοιλότητας

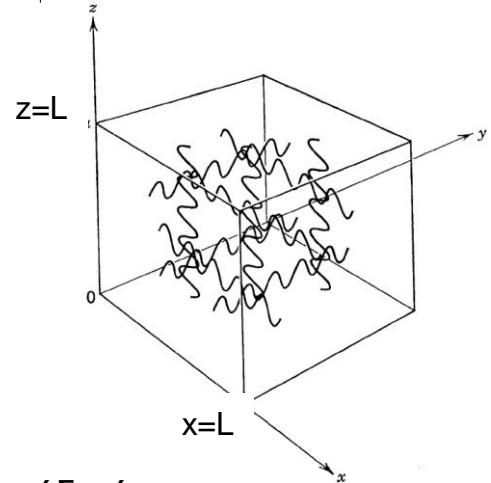


► Αρχικά, λόγω της θερμοκρασίας των τοιχωμάτων, οι δομικοί τους λίθοι ταλαντώνονται και γεμίζουν την κοιλότητα με H/M ακτινοβολία στασίμων κυμάτων. Με τη σειρά της η H/M ακτινοβολία μεταβιβάζει μέρος της ενέργειάς της στα τοιχώματα κ.ο.κ. Κάποια στιγμή επέρχεται θερμική ισορροπία ακτινοβολίας - ύλης των τοιχωμάτων (ακτινοβολία και ταλαντούμενοι δομικοί λίθοι συντονίζονται) όταν εξισωθούν αυτές οι ενεργειακές ανταλλαγές.



► Στην κατάσταση ισορροπίας η πυκνότητα ενέργειας της H/M ακτινοβολίας στην κοιλότητα αποκτά σταθερή τιμή.

$$u = \frac{E}{V} \quad [\text{J/m}^3]$$



► Το μέγεθος που ενδιαφέρει είναι η φασματική κατανομή της πυκνότητας ενέργειας της H/M ακτινοβολίας στην κοιλότητα $u(\mathbf{f}, T)$.
Σε δεδομένη θερμοκρασία:

Ενέργεια ανά μονάδα όγκου και συχνότητας $[\text{J/m}^3 \text{ Hz}]$

$$du = u_T(f) df$$

Ενέργεια ανά μονάδα όγκου σε συχνότητες $f \rightarrow f + df$ $[\text{J/m}^3]$

$$du = \left(\frac{\text{Αριθμός στασίμων κυμάτων σε συχνότητες } f \rightarrow f + df}{V} \right) \times (\text{ενέργεια στασίμου κύματος}) \times df$$

Βήμα 2^ο (Υπολογισμός μέσης θερμικής ενέργειας στασίμου Η/Μ κύματος στην κοιλότητα):

Η προέλευση της ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα είναι οι ταλαντώσεις των δομικών λίθων των τοιχωμάτων. Στην κατάσταση θερμικής ισορροπίας η συχνότητες των στασίμων κυμάτων και των ταλαντούμενων δομικών λίθων θα είναι ίσες. Επομένως:

Κάθε στάσιμο κύμα → μικροσκοπικός μονοδιάστατος κλασικός αρμονικός ταλαντωτής

Με χρήση της κατανομής Boltzmann: $\bar{\varepsilon} = k_B T$

Απόδειξη: Διαπραγματευόμαστε κατά Boltzmann ένα σύνολο ανεξάρτητων (μη αλληλεπιδρώντων) κλασικών αρμονικών ταλαντωτών που ταλαντώνονται λόγω της θερμοκρασίας. Για καθέναν από αυτούς θα έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa x^2$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\zeta = \iint e^{-\beta \varepsilon} dp dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} dp \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta \kappa x^2}{2}} dx \right) = \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta \kappa}} = \underbrace{2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}}}_C \frac{1}{\beta}$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \right) = -\frac{1}{C} \left(-\frac{C}{\beta^2} \right) = \frac{1}{\beta} = k_B T$$



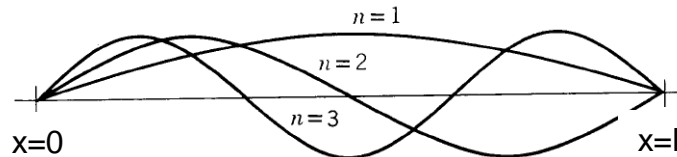
Βήμα 3^ο (Υπολογισμός του πλήθους στασίμων κυμάτων στο διάστημα $f \rightarrow f+df$ στην κοιλότητα):

Συνθήκες ανάπτυξης στασίμων κυμάτων στην κοιλότητα:

$$k_x L = n_x \pi, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_y L = n_y \pi, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots$$

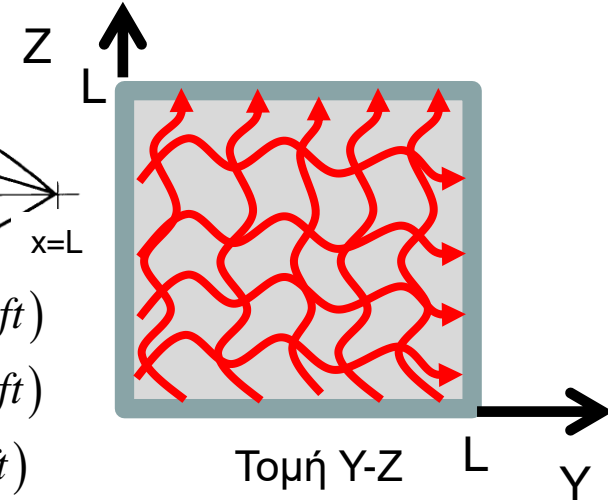
$$k_z L = n_z \pi, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$



$$E(x,t) = E_{0x} \sin(k_x x) \cos(2\pi ft)$$

$$E(y,t) = E_{0y} \sin(k_y y) \cos(2\pi ft)$$

$$E(z,t) = E_{0z} \sin(k_z z) \cos(2\pi ft)$$

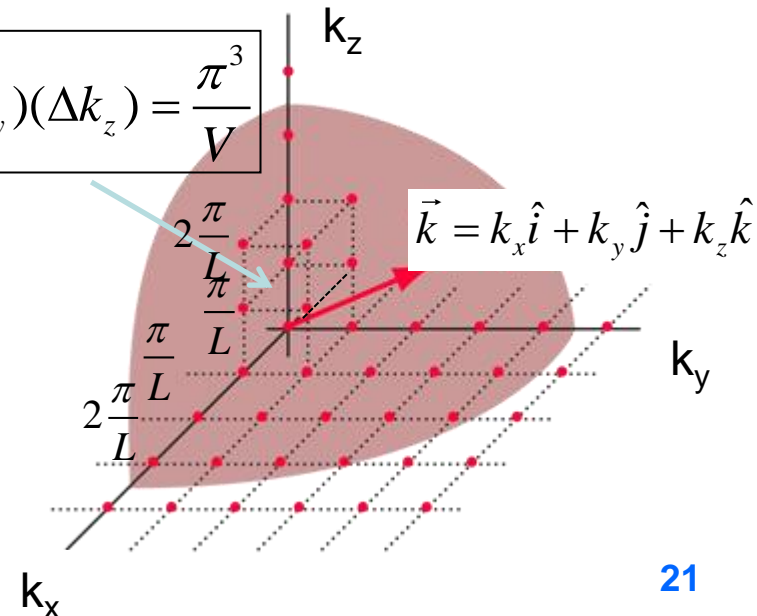


Επινοούμε τον χώρο των κυματαριθμών. Κάθε σημείο του είναι ένας κυματαριθμός τριδιάστατου στάσιμου κύματος που γράφεται ως:

$$V_k = (\Delta k_x)(\Delta k_y)(\Delta k_z) = \frac{\pi^3}{V}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \text{ (σφαίρα)}$$

Σε κάθε όγκο V_k αντιστοιχεί καθαρά ένα σημείο του χώρου (γιατί κάθε σημείο ανήκει σε οκτώ κύβους ταυτόχρονα) $[8 \times (1/8)]$ και επομένως ένας κυματαριθμός.



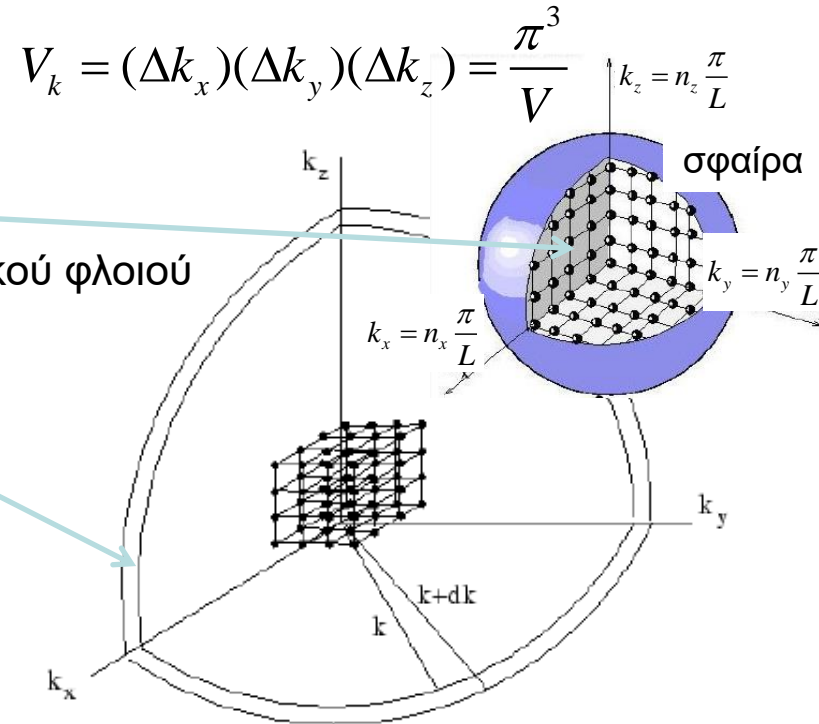


Πλήθος στασίμων κυμάτων με κυματαριθμό στο διάστημα $k \rightarrow k+dk$:

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk) \frac{2}{V_k} = \frac{k^2 dk}{\pi^2} V$$

Ο κυματαριθμός είναι πάντα θετικός. Παίρνουμε το ένα όγδοο του σφαιρικού φλοιού $k \rightarrow k+dk$

Όγκος σφαιρικού φλοιού $k \rightarrow k+dk$

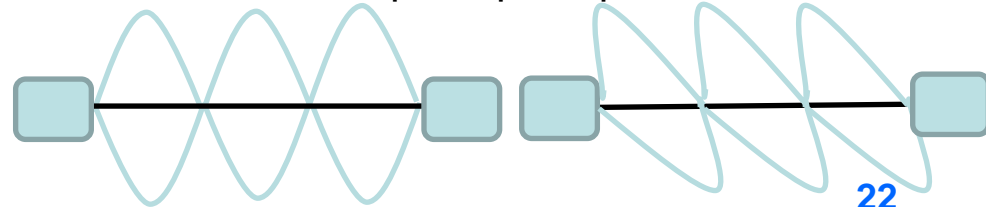


Πλήθος στασίμων κυμάτων στο διάστημα $f \rightarrow f+df$:

$$\left(\text{Αφού } k = \frac{2\pi f}{c} \right)$$

$$\frac{8\pi V}{c^3} f^2 df$$

Σε κάθε στοιχειώδη όγκο V_k αντιστοιχούν δύο στάσιμα κύματα με το ίδιο k :



Βήμα 4° [Υπολογισμός του $u(f,T)$]:

$$du = \frac{1}{V} \frac{8\pi V}{c^3} f^2 k_B T df \Rightarrow u(f, T) = \frac{8\pi}{c^3} f^2 k_B T \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} \right]$$

Ισοδύναμα:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{m}} \right]$$

Βήμα 5° (Σύνδεση με τη φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας):

$$\rho(f, T) = \frac{c}{4} u(f, T) \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{Hz}} \right]$$

$$\rho(\lambda, T) = \frac{c}{4} u(\lambda, T) \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{m}} \right]$$

(Η απόδειξη πίσω)

- Μέσα σε χρονικό διάστημα τ , μόνο η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που βρίσκεται στο ημισφαίριο ακτίνας R με κέντρο την οπή θα μπορέσει να φτάσει εκεί προκειμένου να εκπεμφθεί. Από την ενέργεια που βρίσκεται σε έναν στοιχειώδη όγκο dV αυτού του ημισφαιρίου, μόνο το ποσοστό που κατευθύνεται στην οπή θα μπορέσει να εκπεμφθεί.
- Έστω u η πυκνότητα ενέργειας μέσα στην κοιλότητα. Σε κάθε όγκο dV του ημισφαιρίου θα έχουμε ενέργεια udV . Δεδομένου ότι η ακτινοβολία εκπέμπεται ιστροπικά και ομογενώς, το ποσοστό αυτής που θα μπορέσει να εκπεμφθεί από την οπή θα είναι:

$$udV \frac{d\Omega}{4\pi} = udV \frac{A \cos \theta}{4\pi r^2} = udV \frac{A \cos \theta}{4\pi r^2}$$

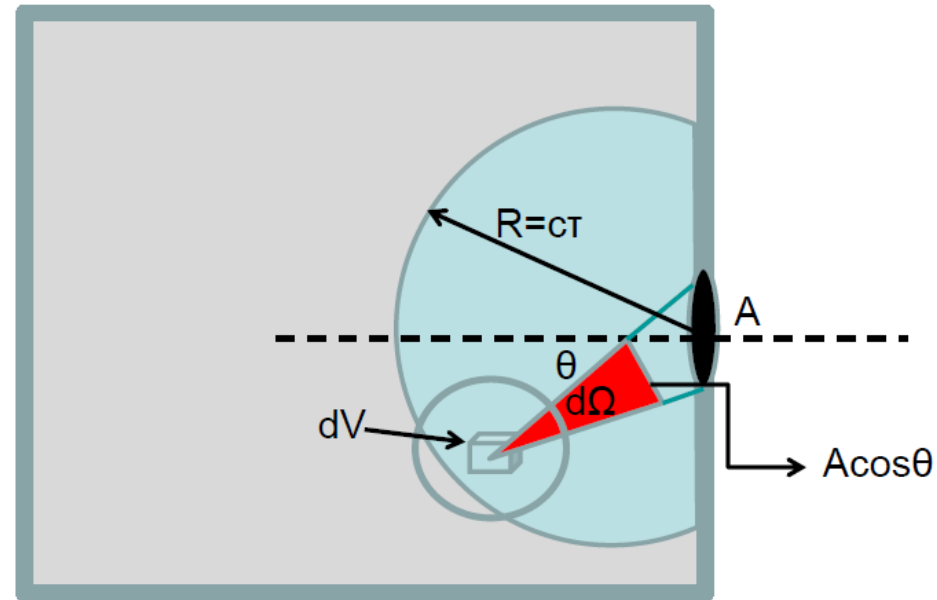
- Επομένως, η ολική ενέργεια που εκπέμπεται από το ημισφαίριο θα είναι:

$$E = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u \frac{A \cos \theta}{4\pi r^2} dV =$$

$$= \frac{uA}{4\pi} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{uA}{4\pi} R\pi$$

- Άρα η αφετική ικανότητα της οπής θα είναι: $\alpha = \frac{E}{A\tau} = \frac{c}{4} u$

- Άρα η ίδια σχέση θα συνδέει και τις αντίστοιχες φασματικές κατανομές: $\rho(f, T) = \frac{c}{4} u(f, T)$ 24

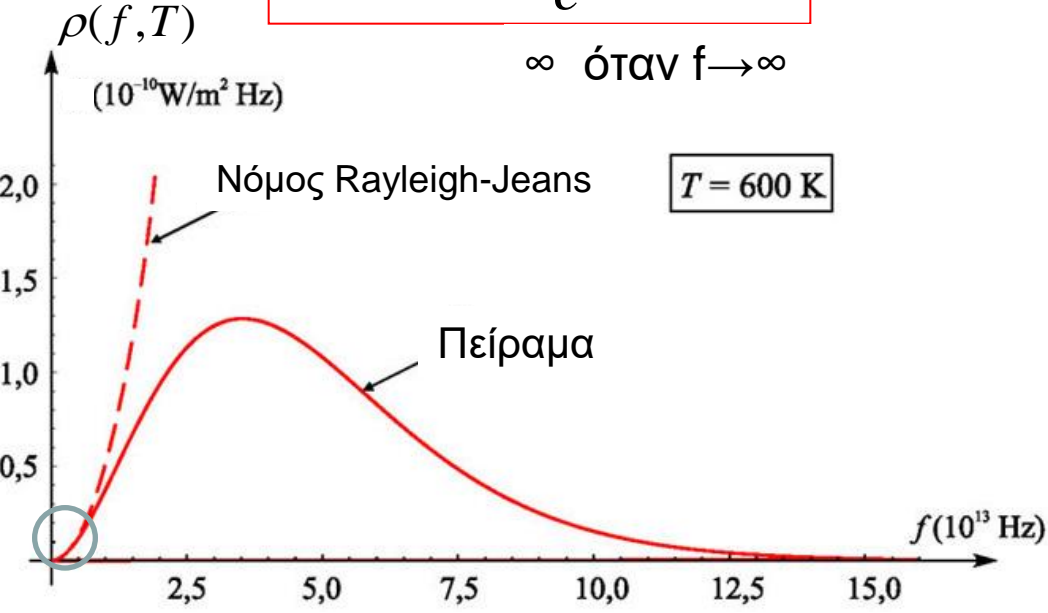


Βήμα 6° (Τύπος των Rayleigh - Jeans):

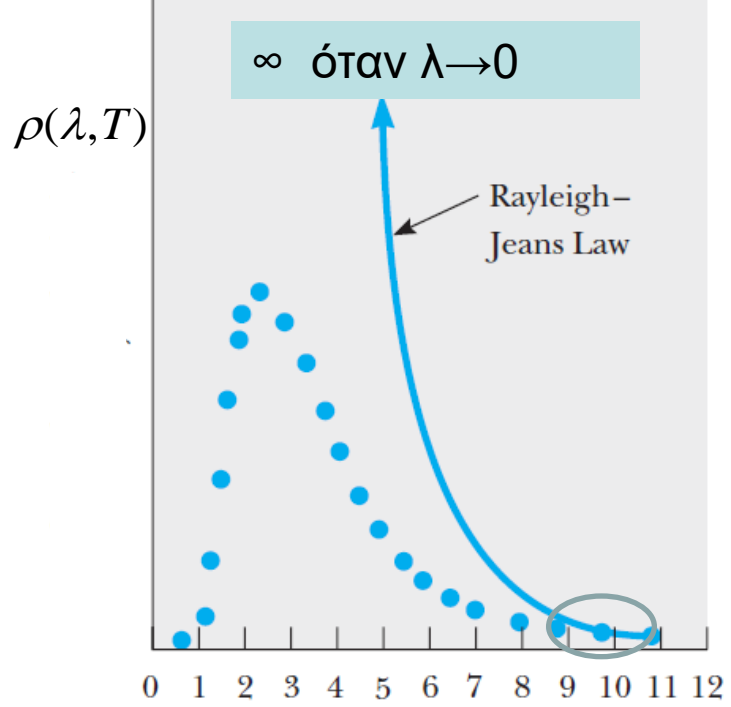
$$\rho(f, T) = \frac{2\pi}{c^2} f^2 k_B T \left[\frac{W}{m^2 Hz} \right]$$

∞ όταν $f \rightarrow \infty$

$$\rho(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T \left[\frac{W}{m^2 m} \right]$$



Καλή συμφωνία μόνο στις πολύ χαμηλές συχνότητες



Καλή συμφωνία μόνο στα πολύ μεγάλα μήκη κύματος

Η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα είναι απογοητευτική, ιδιαίτερα για ένα τόσο σύνθετο πρόβλημα που επιστρατεύει γνώση από ολόκληρη σχεδόν την Κλασική Φυσική!!!!



II.4 Η κβαντική ερμηνεία του Planck (1900)

Max Karl Ernst Ludwig Planck
(1858 – 1947)



$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{k_B T} - 1}$$



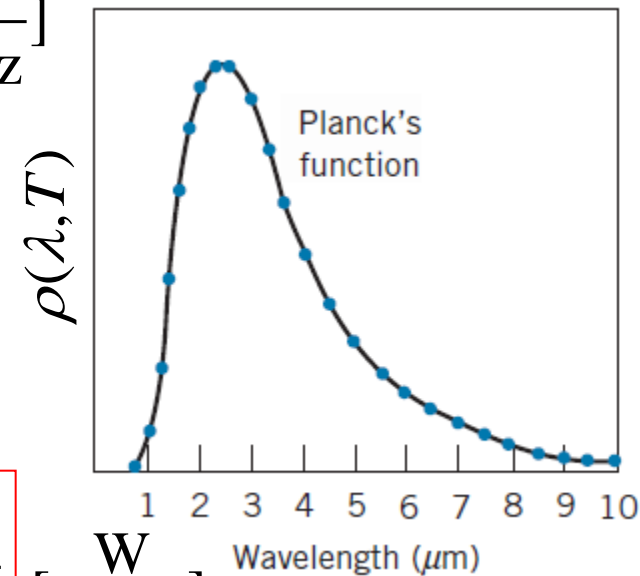
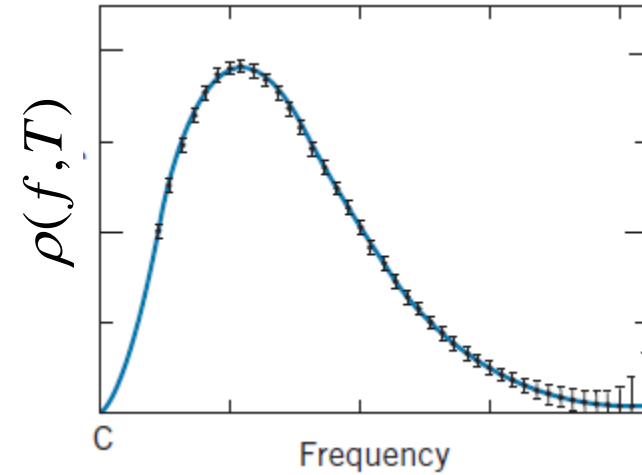
$$\rho(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{e^{k_B T} - 1} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{Hz}} \right]$$

$$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ [Js]}$$

(Σταθερά του Planck)

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ [J/K]}$$

$$\rho(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{m}} \right]$$



«Έξι χρόνια πάλευα με το πρόβλημα της θερμικής ισορροπίας ύλης και ακτινοβολίας χωρίς επιτυχία. Ήξερα ότι αυτό το πρόβλημα είχε θεμελιώδη σημασία για τη φυσική. Ήξερα τον τύπο που αναπαράγει την ενεργειακή κατανομή του φάσματος. Μια θεωρητική ερμηνεία έπρεπε να βρεθεί με κάθε κόστος, οσοδήποτε υψηλό»

Παράδειγμα 3: (Αυτοδιδασκαλία) Να αποδειχθεί ότι στο όριο των πολύ χαμηλών συχνοτήτων ($f \rightarrow 0$) και των πολύ μεγάλων μηκών κύματος ($\lambda \rightarrow \infty$) η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας του Planck συμπίπτει με την αντίστοιχη έκφραση των Rayleigh-Jeans που με τη σειρά της συμπίπτει με τα πειραματικά δεδομένα σε αυτές τις περιοχές. Δίδεται ότι :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots \approx 1 + x, \text{ για } x \ll 1$$

Λύση: (α) Η έκφραση του Planck συναρτήσει της συχνότητας είναι:

$$\rho(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

Αφού $f \rightarrow 0$, $\frac{hf}{k_B T} \ll 1$ και επομένως:

$$e^{\frac{hf}{k_B T}} \approx 1 + \frac{hf}{k_B T}$$

Άρα:

$$\rho(f, T) \approx \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{1 + \frac{hf}{k_B T} - 1} = \frac{2\pi}{c^2} f^2 k_B T$$

που είναι η έκφραση των Rayleigh-Jeans.

(β) Η έκφραση του Planck συναρτήσει του μήκους κύματος είναι:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Αφού $\lambda \rightarrow \infty$, $\frac{hc}{\lambda k_B T} \ll 1$ και επομένως:

$$e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

Άρα:

$$\rho(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda k_B T}{hc} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T$$

που είναι η έκφραση των Rayleigh-Jeans.

Παράδειγμα 4: (Αυτοδιδασκαλία) Να αποδειχθεί ότι η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας του Planck συμπίπτει για $f \rightarrow \infty$ με τον ασυμπτωτικό νόμο του Wien.

Λύση: Η έκφραση του Planck συναρτήσει της συχνότητας είναι:

$$\rho(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

Αφού $f \rightarrow \infty$, $\frac{hf}{k_B T} \gg 1$ και επομένως:

$$e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{hf}{k_B T}}$$

Άρα:

$$\rho(f, T) \approx \frac{2\pi h}{c^2} f^3 e^{-\frac{hf}{k_B T}}$$

που είναι ο ασυμπτωτικός νόμος του Wien.

Παρατήρηση: Η παραπάνω έκφραση γράφεται και ως

$$\rho(f, T) \approx \frac{2\pi h}{c^2} f^3 e^{-\frac{h f}{k_B T}} = \mathbb{C}_1 f^3 e^{-\mathbb{C}_2 \frac{f}{T}}$$

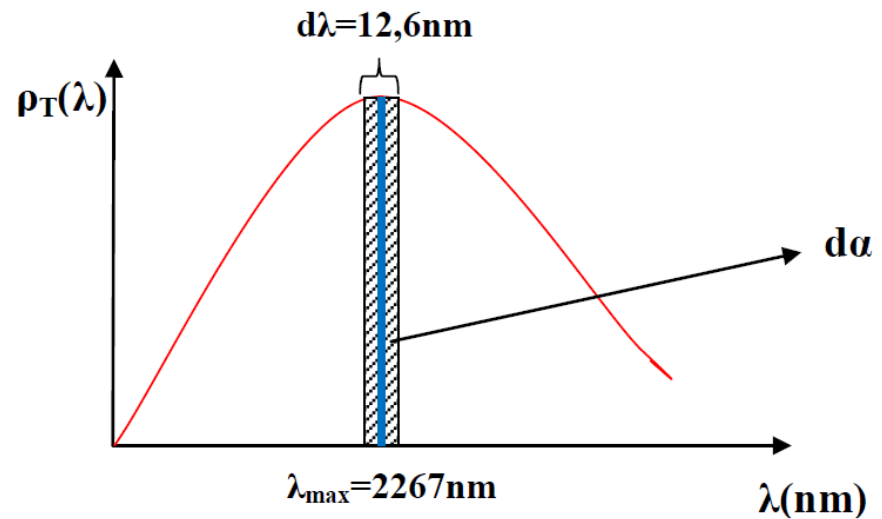
\mathbb{C}_1

Με τον παραπάνω τρόπο μπορούν να προσδιοριστούν οι σταθερές και του ασυμπτωτικού νόμου του Wien:

$$\mathbb{C}_1 = \frac{2\pi h}{c^2} = \frac{2 \times (3,14) \times (6,62 \times 10^{-34}) \frac{Js}{m^2}}{(3 \times 10^8)^2 \frac{s^2}} = 4,62 \times 10^{18} \frac{Ws^4}{m^2}$$

$$\mathbb{C}_2 = \frac{h}{k_B} = \frac{6,62 \times 10^{-34} \frac{Js}{m^2}}{1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}} = 4,8 \times 10^{-11} sK$$

Παράδειγμα 5: (Λύθηκε στο Μάθημα) Ένα (μέλαν) σώμα θερμαίνεται σε θερμοκρασία 1278K . Μετρήσεις ανιχνεύουν ακτινοβολία σε ένα διάστημα $12,6\text{nm}$. Μέσα σε αυτό ανιχνεύεται και η πιο ισχυρή εκπομπή ακτινοβολίας από το σώμα. Να υπολογιστεί η εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας μέσα σε αυτό το διάστημα.



Παράδειγμα 6 (Λύθηκε και στο Μάθημα): Να αποδειχθεί ότι το μήκος κύματος για το οποίο η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας του Planck εμφανίζει μέγιστο σε κάθε T ικανοποιεί την έκφραση:

$$\lambda_{\max} T = (\text{σταθερά})$$

Να εκτιμηθεί η τιμή της σταθεράς.

Λύση: Η έκφραση του Planck συναρτήσει του μήκους κύματος είναι:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Θέτουμε στην παραπάνω έκφραση όπου $x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{x k_B T}$ και επομένως:

$$\rho(x, T) = \frac{2\pi hc^2}{\left(\frac{hc}{k_B T}\right)^5 x^{-5}} \frac{1}{e^x - 1} = 2\pi hc^2 \left(\frac{hc}{k_B T}\right)^{-5} x^5 (e^x - 1)^{-1}$$

Θεωρούμε σταθερή T . Η συνάρτηση $\rho_T(x)$ έχει κρίσιμα σημεία που βρίσκονται από το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της. Άρα:

$$\frac{d\rho_T(x)}{dx} = 0 \Rightarrow 2\pi hc^2 \left(\frac{hc}{k_B T} \right)^{-5} \left[5x^4 (e^x - 1)^{-1} + x^5 (-1)(e^x - 1)^{-2} e^x \right] = 0$$

$$\Rightarrow 5x^4 (e^x - 1)^{-1} - x^5 e^x (e^x - 1)^{-2} = 0 \Rightarrow x^4 (e^x - 1)^{-2} \left[5(e^x - 1) - xe^x \right] = 0$$

Επομένως:

$$(i) \quad x^4 (e^x - 1)^{-2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (απορρίπτεται γιατί θα σήμαινε ότι } \lambda \rightarrow \infty) \\ x \rightarrow \infty \text{ (απορρίπτεται γιατί θα σήμαινε ότι } \lambda \rightarrow 0) \end{cases}$$

$$(ii) \quad \left[5(e^x - 1) - xe^x \right] = 0 \Rightarrow (5 - x)e^x = 5 \Rightarrow 5 - x = 5e^{-x}$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται γραφικά (βλ. Σημείωση στο τέλος) και έχει λύση $x_0 \sim 4,97$. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι:

$$\left. \frac{d^2 \rho_T(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = x_0^4 (e^{x_0} - 1)^{-2} e^{x_0} (4 - x) < 0$$

Επομένως η καμπύλη $\rho_T(x)$ έχει μέγιστο για $x_0 \sim 4,97$.

Επομένως το μήκος κύματος που αντιστοιχεί σε μέγιστο της κατανομής (όχι το μέγιστο μήκος κύματος) θα είναι:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{x_0 k_B T} \Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{k_B x_0} = \frac{(6,62 \times 10^{-34}) Js \times (3 \times 10^8) \frac{m}{s}}{\left(1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}\right) \times (4,97)} = 2,89 \times 10^{-3} mK$$

που είναι ο Νόμος Μετατοπίσεως του Wien.

Σημείωση (Γραφική λύση της $5 - x = 5e^{-x}$): Στο Σχήμα παρίστανται γραφικά οι δύο καμπύλες. Ξεκινούν και οι δύο στον άξονα y από το «5». Επειδή, όμως, η $5e^{-x}$ «πέφτει» πολύ πιο γρήγορα, το σημείο τομής τους θα είναι ένα σημείο x_0 τέτοιο ώστε:

$$x_0 \approx 5 - \varepsilon, \text{ όπου } \varepsilon \text{ ένας πολύ μικρός αριθμός}$$

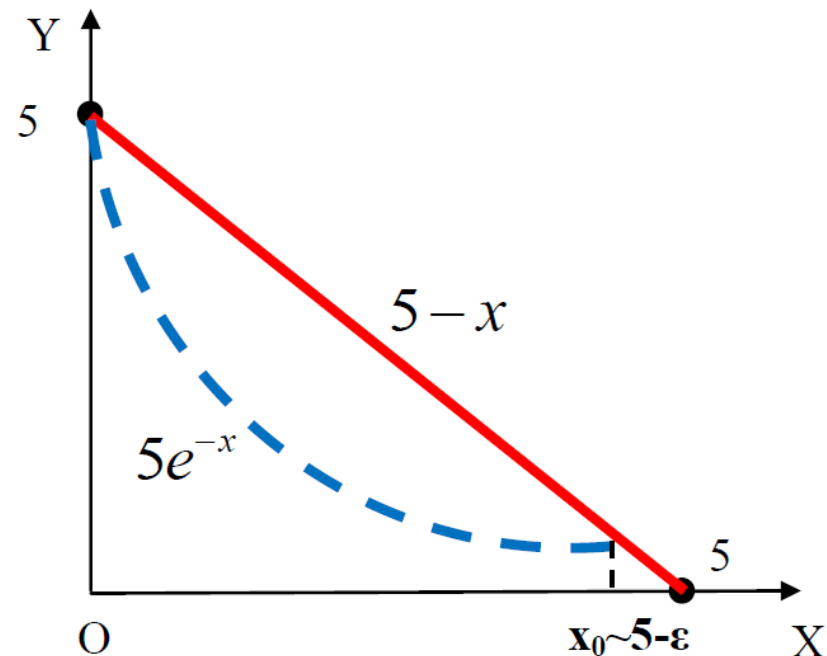
Στο σημείο τομής η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\varepsilon = 5e^{-(5-\varepsilon)} \Rightarrow \varepsilon = 5e^{-5}e^{\varepsilon} \xrightarrow[e^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon]{\varepsilon \lll 1} \varepsilon = 5e^{-5}(1+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\varepsilon = 5e^{-5} + \varepsilon 5e^{-5} \Rightarrow \varepsilon = \frac{5e^{-5}}{1-5e^{-5}} = 0,034$$

Άρα:

$$x_0 \approx 5 - \varepsilon = 4,97$$





Όμως:

Rayleigh – Jeans (1905)

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} k_B T \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} \right]$$

Μέση ενέργεια μικροσκοπικού αρμονικού ταλαντωτή

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa x^2 \quad (\text{συνεχής})$$

$$\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} dp dx = C k_B T = \frac{C}{\beta}$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \right) = k_B T$$

Planck (1900)

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} \right]$$

$$= \frac{hf}{1 - e^{-\frac{hf}{k_B T}}} e^{-\frac{hf}{k_B T}} =$$

$$= hf \left(e^{-\frac{hf}{k_B T}} + e^{-\frac{2hf}{k_B T}} + e^{-\frac{3hf}{k_B T}} + \dots \right)$$

Η ενέργεια μικροσκοπικού αρμονικού ταλαντωτή είναι κβαντισμένη !!!!! $\varepsilon = nhf, n = 1, 2, 3, \dots$

Το ίδιο ισχύει και για την ενέργεια της Η/Μ ακτινοβολίας !!!!!!!!



$$\frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} = \frac{hf}{1 - e^{-\frac{hf}{k_B T}}} e^{-\frac{hf}{k_B T}} = hfe^{-\frac{hf}{k_B T}} \left[1 + e^{-\frac{hf}{k_B T}} + e^{-\frac{2hf}{k_B T}} + \dots \right] = hf \underbrace{\left[e^{-\frac{hf}{k_B T}} + e^{-\frac{2hf}{k_B T}} + e^{-\frac{3hf}{k_B T}} + \dots \right]}_{\zeta}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (\text{Ισχύει για } |z| < 1. \text{ Ικανοποιείται αυτό εδώ?})$$

Αντίστροφα, δεχόμενοι εξαρχής ότι:

$$\zeta = e^{-\frac{hf}{k_B T}} + e^{-\frac{2hf}{k_B T}} + e^{-\frac{3hf}{k_B T}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta hf}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

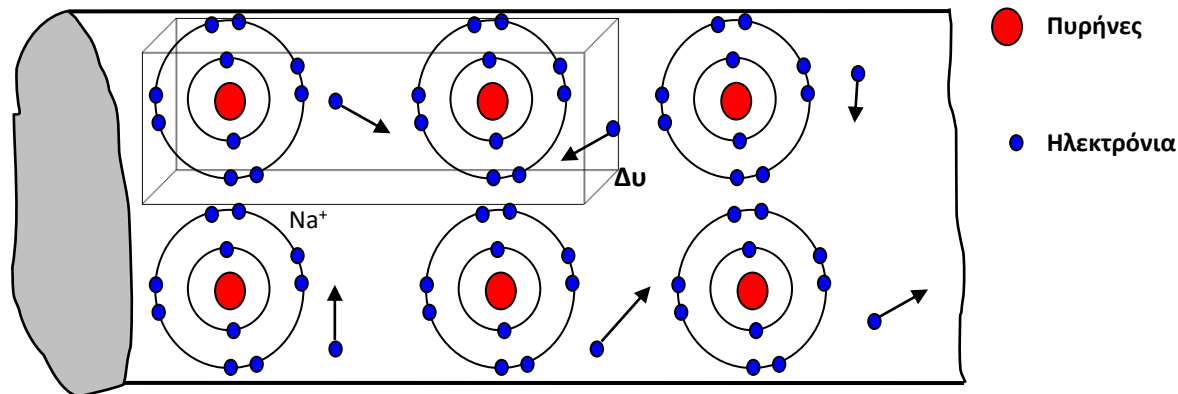
Μπορούμε (με λίγο κόπο και γνώση σειρών) να δείξουμε ότι:

$$-\frac{1}{\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \right) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} = \bar{\varepsilon} \quad \text{Μέση ενέργεια μικροσκοπικού αρμονικού ταλαντωτή}$$

III. ΤΟ ΦΩΤΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

(α) Περιγραφή του φαινομένου: Με τον όρο «φωτοηλεκτρικό φαινόμενο χαρακτηρίζουμε την εκπομπή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο που προκαλείται από την πρόσπτωση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (φωτεινής- στο ορατό ή υπεριώδους) στην επιφάνειά του.

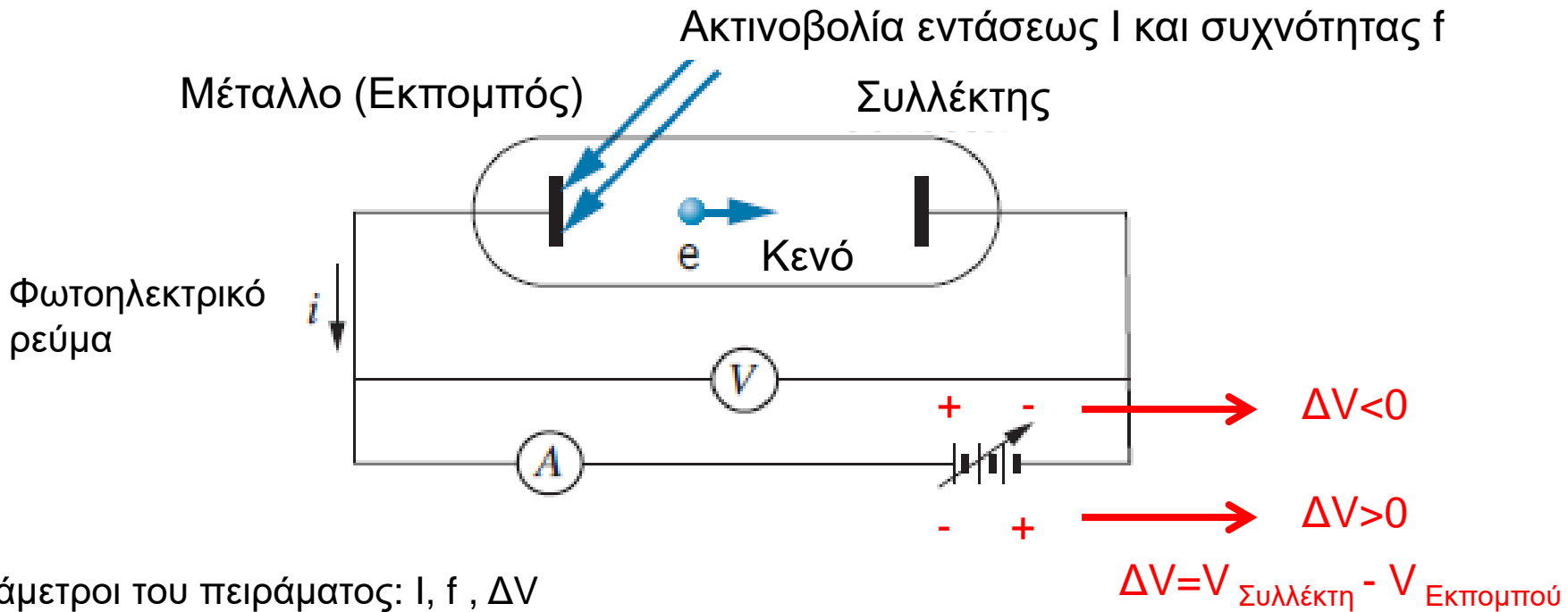
- Στα μέταλλα, ακόμα και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, τα χαλαρότερα συνεδεδεμένα στα άτομα ηλεκτρόνια έχουν πρακτικά αποσπαστεί από αυτά και κινούνται χαοτικά μέσα στον όγκο του μετάλλου. Τα άτομα των μετάλλων, από τα οποία έχουν αποσπασθεί ηλεκτρόνια, έχουν χάσει την ηλεκτρική τους ουδετερότητα και έχουν μετατραπεί σε θετικά ιόντα.
- Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων (αγωγών) κινούνται τυχαία και άτακτα στον όγκο τους «συγκρουόμενα» παράλληλα με τα ιόντα τους και αλλάζοντας διαρκώς κατεύθυνση κίνησης. Λόγω των διαδοχικών αυτών κρούσεων μπορούμε να πούμε ότι πρακτικά σε κάθε χρονική στιγμή είναι δυνατόν να βρούμε ένα αποσπασμένο ηλεκτρόνιο δίπλα σε ένα ιόν. Κατά συνέπεια, οποιονδήποτε στοιχειώδη όγκο Δu του στερεού αγωγού και να αποκόψουμε, θα τον βρούμε πρακτικά ηλεκτρικά ουδέτερο. Ο αγωγός εμφανίζει, όπως λέμε, τόσο ολική όσο και τοπική ηλεκτρική ουδετερότητα.



- Η προσπίπτουσα ακτινοβολία παρέχει ενέργεια στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου, τα οποία εκπέμπονται στο περιβάλλον. Επειδή σε κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να βρούμε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο στη «γειτονιά» ενός ιόντος, θεωρούμε πρακτικά ότι η προσπίπτουσα ακτινοβολία αποσπά το ηλεκτρόνιο αυτό από το άτομο.
- Είναι προφανές ότι πιο εύκολα αποσπώνται από το μέταλλο τα ηλεκτρόνια των επιφανειακών ατόμων.
- Για να μπορέσει να ξεφύγει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο θα πρέπει να υπερβεί έναν ενεργειακό φραγμό (το ελκτικό δυναμικό των ιόντων του κρυστάλλου) που ονομάζεται έργο εξόδου (w ή ϕ) και είναι χαρακτηριστικός για κάθε μέταλλο.
- Τα εκπεμπόμενα από το μέταλλο ηλεκτρόνια ονομάζονται και «φωτοηλεκτρόνια».

Μέταλλο	ϕ (eV)
Na	2.28
Al	4.08
Co	3.90
Cu	4.70
Zn	4.31
Ag	4.73
Pt	6.35
Pb	4.14

(β) Πειραματική μελέτη του φαινομένου και προβλήματα ερμηνείας του:



- Παράμετροι του πειράματος: I , f , ΔV
- Μεταβάλλοντας την ΔV μελετούμε το φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Για $\Delta V > 0$ το φαινόμενο διευκολύνεται. Για $\Delta V < 0$ το φαινόμενο παρεμποδίζεται.
- Για τιμή $\Delta V = \Delta V_S$ (τάση αποκοπής) < 0 δεν παρατηρούμε φωτοηλεκτρικό ρεύμα και μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας των φωτοηλεκτρονίων:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = q_e \Delta V_S$$

1. Η ένταση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος i αυξάνεται ανάλογα με την ένταση της προσπίπτουσας Η/Μ ακτινοβολίας.

Ερμηνεύεται με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία.

$$I = c\varepsilon_0 E^2 \quad \vec{F}_e = -|q_e| \vec{E}$$

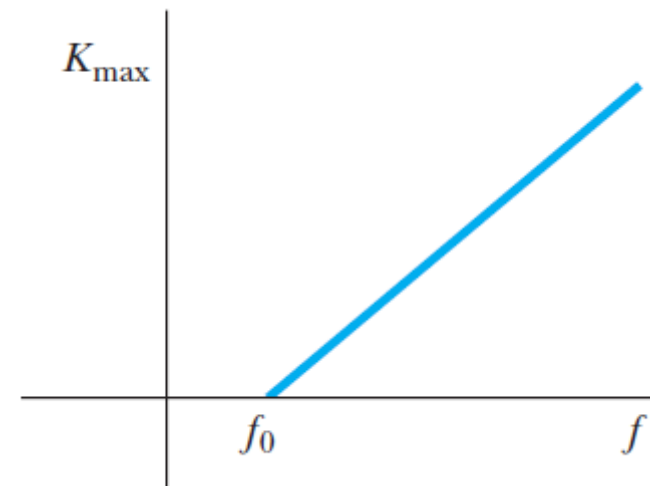
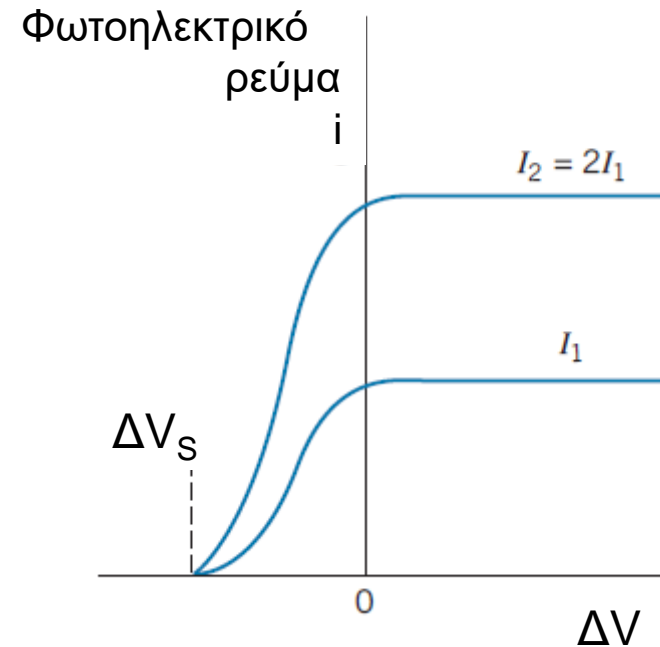
Αύξηση της έντασης σημαίνει αύξηση της δύναμης που υφίσταται το ηλεκτρόνιο, και αύξηση του ρυθμού εξαγωγής των φωτοηλεκτρονίων και επομένως του ρεύματος i .

2. Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων δεν εξαρτάται από την ένταση, αλλά από τη συχνότητα της προσπίπτουσας Η/Μ ακτινοβολίας.

Δεν ερμηνεύεται με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία κατά την οποία η ένταση, και όχι η συχνότητα, παίζει πρωτεύοντα ρόλο στις ενεργειακές ανταλλαγές ακτινοβολίας-ύλης.

3. Δεν παρατηρείται φωτοηλεκτρικό φαινόμενο για τιμές συχνότητας της προσπίπτουσας Η/Μ ακτινοβολίας κάτω από μια χαρακτηριστική τιμή για κάθε μέταλλο (συχνότητα αποκοπής-cutoff frequency f_0). Αυτό συμβαίνει ανεξάρτητα από την ένταση της Η/Μ ακτινοβολίας.

Δεν ερμηνεύεται με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία κατά την οποία, αφού η ένταση παίζει πρωτεύοντα ρόλο, δεν προβλέπεται συχνότητα αποκοπής.



4. Το φωτοηλεκτρικό ρεύμα εμφανίζεται πρακτικά ταυτόχρονα με την πρόσπτωση της Η/Μ ακτινοβολίας στο μέταλλο (χρόνος απόκρισης του μετάλλου $\sim 10^{-9}$ s).

Εντελώς ασύμβατο με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Με βάση αυτή, η μεταβίβαση ενέργειας από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο ηλεκτρόνιο θα γίνει σταδιακά (κατά π.χ. περιόδους) και αναγκαστικά θα πρέπει να μεσολαβήσει κάποιο ικανό διάστημα μέχρι να εμφανιστεί φωτοηλεκτρικό ρεύμα.

Εδώ το φαινόμενο λαμβάνει χώρα με ταχύτατη (σχεδόν αστραπιαία) μεταβίβαση ενέργειας από το κύμα στο ηλεκτρόνιο.

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν ερμηνεύεται στα πλαίσια της κλασικής Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας.

(γ) Ερμηνεία του φαινομένου με την υπόθεση της κβάντωσης της Η/Μ ακτινοβολίας από τον Einstein (1905):

Η Η/Μ ακτινοβολία αποτελείται από κβάντα ενέργειας $\epsilon=hf$ (φωτόνια), όπου h η σταθερά του Planck και f η συχνότητα της ακτινοβολίας.

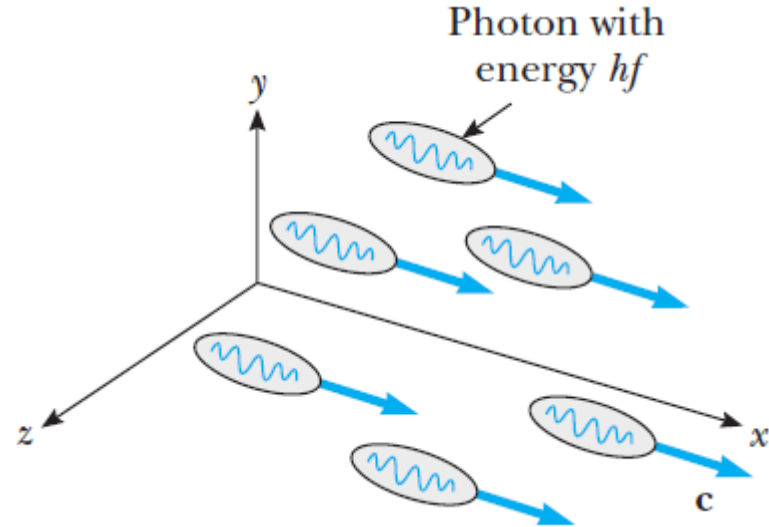
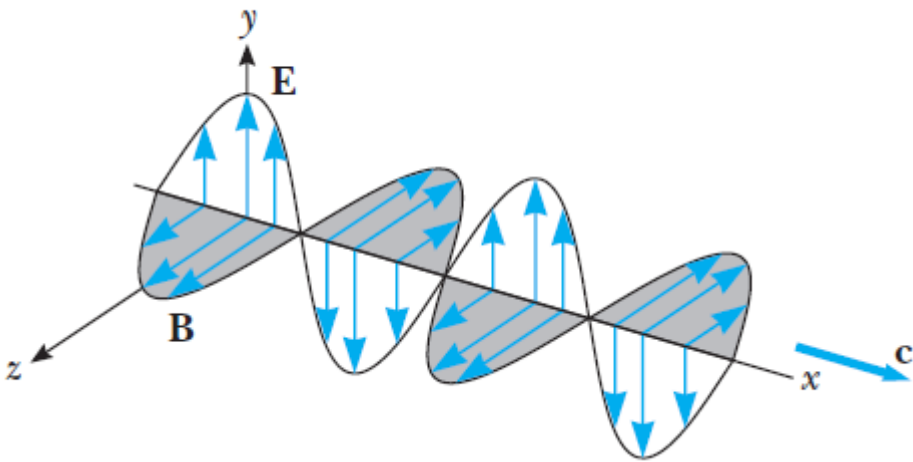
$$hf = \phi + \frac{1}{2} m_e v^2$$

Ενέργεια προσπίπτοντος φωτονίου

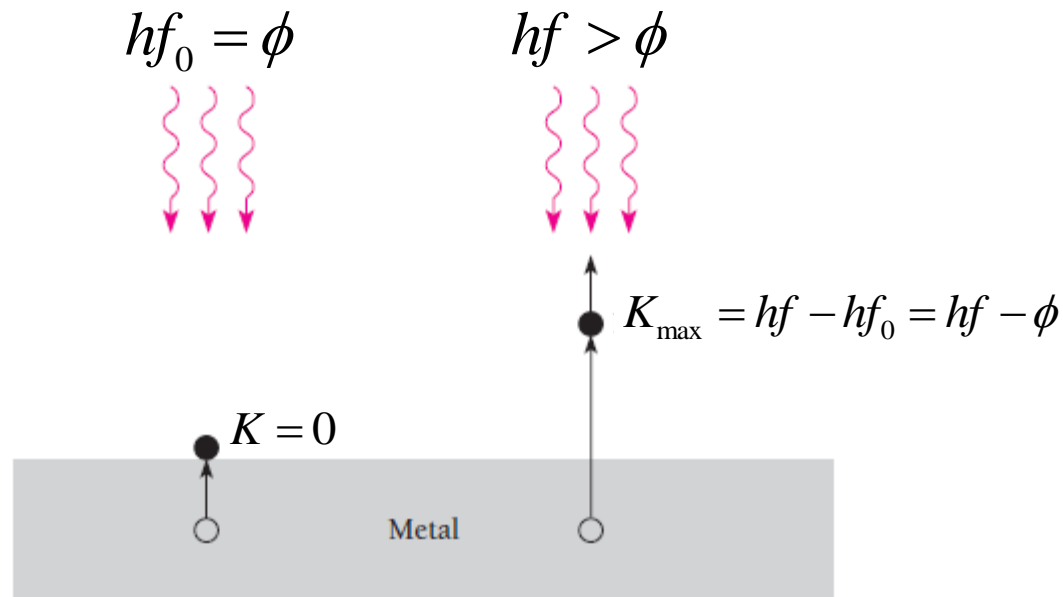
Φωτοηλεκτρική Εξίσωση του Einstein

Ένα μέρος της καταναλίσκεται στην υπερνίκηση του έργου εξόδου

Το υπόλοιπο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του φωτοηλεκτρονίου



Παρατήρηση: Τι συμβαίνει εάν $hf = hf_0 = \phi$;



Το ηλεκτρόνιο εξάγεται από το μέταλλο και θεωρητικά κάθεται ακίνητο στο περιβάλλον.

Το ηλεκτρόνιο εξάγεται από το μέταλλο και αποκτά τη μέγιστη κινητική του ενέργεια.

Με βάση αυτή την εικόνα το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ερμηνεύεται πλήρως:

- (i) Αύξηση της έντασης I συνεπάγεται πρακτικά αύξηση ροής φωτονίων και αύξηση του ρυθμού παραγωγής φωτοηλεκτρονίων.
- (ii) Προβλέπεται εξάρτηση του K απευθείας από τη συχνότητα της H/M ακτινοβολίας.
- (iii) Προβλέπεται η ύπαρξη συχνότητας αποκοπής. Πράγματι, για να λάβει χώρα φωτοηλεκτρικό φαινόμενο θα πρέπει:

$$hf \geq \phi$$

Επομένως:

$$f_0 = \frac{\phi}{h}$$

- (iv) Η εξαγωγή φωτοηλεκτρονίων από το μέταλλο γίνεται ταυτόχρονα με την πτώση της H/M ακτινοβολίας μέσω της αστραπιαίας απορρόφησης από το ηλεκτρόνιο όλης της ενέργειας hf ενός φωτονίου.
Ένα κβάντο H/M ακτινοβολίας (φωτόνιο) δίνει όλη του την ενέργεια μόνο σε ένα ηλεκτρόνιο του μετάλλου.

ΑΥΤΟ ΘΥΜΙΖΕΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΔΕΙΚΝΥΕΙ ΔΕΙΛΑ-ΔΕΙΛΑ ΟΤΙ ΤΟ ΦΩΣ ΕΧΕΙ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Σημαντική παρατήρηση: Πως αλληλεπιδρά το φωτόνιο με το ηλεκτρόνιο;

- Το φωτόνιο δεν παύει να είναι παράλληλα ένα Η/Μ κύμα, το οποίο αλληλεπιδρά με το ηλεκτρόνιο μέσω του ηλεκτρικού του πεδίου που πάντα το συνοδεύει.....
- Απλά η δράση του φωτονίου και η μεταφορά ενέργειας στο ηλεκτρόνιο δεν γίνεται σταδιακά , αλλά «αστραπιαία» με «διαμιάς» απορρόφηση όλης της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου από το ηλεκτρόνιο.....

[βλ. εξαιρετική ανάλυση Στ. Τραχανά στο βιβλίο «Στοιχειώδης Κβαντική Φυσική», σελ.13 ΠΕΚ, 2012]

Το φως έχει ταυτόχρονα κυματικά και σωματιδιακά χαρακτηριστικά. Τα τελευταία δεν εθίγησαν από τον Einstein κατά την ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

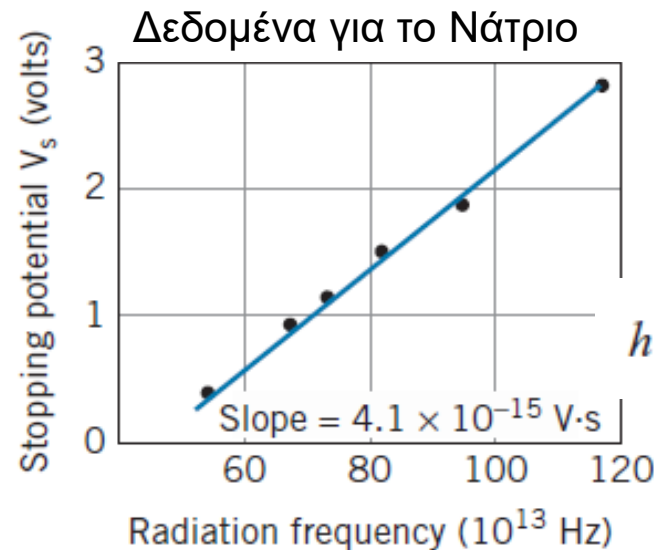
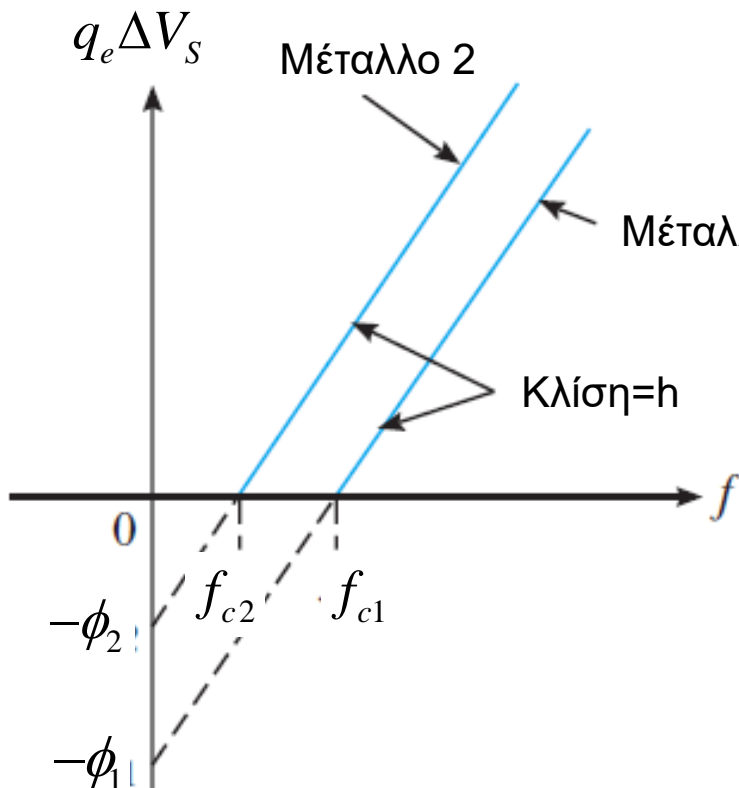
Τα εμφάνισε δειλά-δειλά σε μια μεταγενέστερη εργασία του το 1916....

Τέλος:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = hf - \phi \Rightarrow q_e \Delta V_s = hf - \phi$$

↙ Προσδιορισμός σταθεράς του Planck

Robert A. Millikan
(1868 – 1953)



$$h = 6.57 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

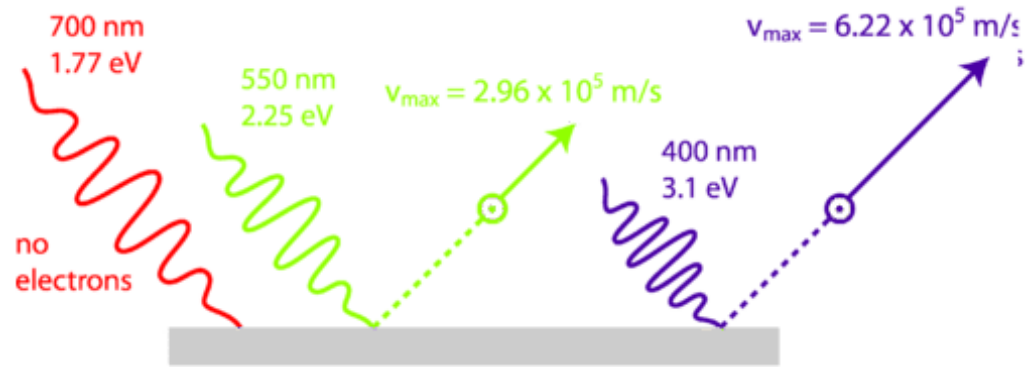
Παράδειγμα 7: (Αυτοδιδασκαλία) Το έργο εξόδου του Καλίου είναι 2eV . Να υπολογιστεί η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων κατά την πρόσπτωση σε κομμάτι Καλίου

(α) Κόκκινου φωτός με $\lambda=700\text{nm}$

(β) Πράσινου φωτός με $\lambda=550\text{nm}$

(γ) Ιώδους φωτός με $\lambda=400\text{nm}$

Λύση: (α) Η ενέργεια των φωτονίων του κόκκινου φωτός θα είναι:



$$E_{ph} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,62 \times 10^{-34} \text{ Js}) \times \left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{700\text{nm}} = \frac{19,86 \times 10^{-26} \text{ Jm}}{700\text{nm}} =$$

$$= \frac{12,412 \times 10^{-7} \text{ eVm}}{700\text{nm}} = \frac{12,412 \times 10^{-7} \text{ eVm}}{700\text{nm}} \approx \frac{1240 \text{ eVnm}}{700\text{nm}} = 1,77\text{eV} < \phi$$

$$1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Στην περίπτωση αυτή δεν θα έχουμε εκπομπή φωτοηλεκτρονίων

(β) Κατά τον ίδιο τρόπο η ενέργεια των φωτονίων του πράσινου φωτός θα είναι:

$$E_{ph} = 2,25\text{eV} > \phi$$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε εκπομπή φωτοηλεκτρονίων.

Και έτσι:

$$K_{\max} = E_{ph} - \phi = 0,25eV = 0,4 \times 10^{-19} J$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{2K_{\max}}{m_e} = \frac{0,8 \times 10^{-19} J}{9,1 \times 10^{-31} \text{Kgr}} =$$
$$= 0,0879 \times 10^{12} \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow v_{\max} = 2,96 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

(γ) Κατά τον ίδιο τρόπο η ενέργεια των φωτονίων του ιώδους φωτός θα είναι:

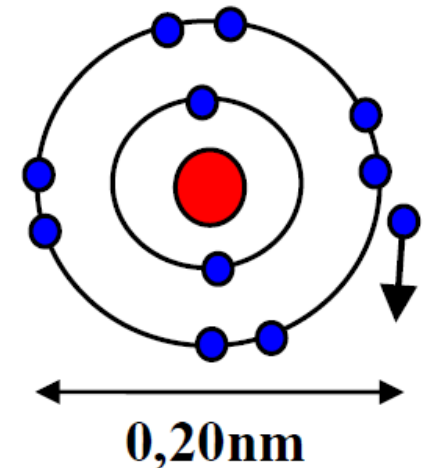
$$E_{ph} = 3,1eV > \phi$$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε εκπομπή φωτοηλεκτρονίων.

$$K_{\max} = E_{ph} - \phi = 1,1eV = 1,76 \times 10^{-19} J$$

$$v_{\max}^2 = \frac{2K_{\max}}{m_e} = \frac{3,52 \times 10^{-19} J}{9,1 \times 10^{-31} \text{Kgr}} = 0,386 \times 10^{12} \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow v_{\max} = 6,21 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

Παράδειγμα 8: (Λύθηκε στο Μάθημα) (α) Μία φωτεινή δέσμη εντάσεως $I = 120\text{W/m}^2$ προσπίπτει στην επιφάνεια ενός κομματιού Νατρίου. Για την εξαγωγή ενός ηλεκτρονίου από το Na απαιτείται ελάχιστη ενέργεια $2,3\text{ eV}$ (το έργο εξόδου του Νατρίου). Θεωρώντας ότι ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο στον όγκο του υλικού εντοπίζεται πρακτικά σε μία περιοχή διαμέτρου ίσης με αυτή του ατόμου του Νατρίου ($0,20\text{nm}$), πόσος χρόνος απαιτείται για την εκπομπή ενός ηλεκτρονίου με βάση την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία; (β) Επαναλάβετε τον υπολογισμό για $I = 1 \times 10^{-7}\text{ mW/cm}^2$ που επίσης οδηγεί σε παρατήρηση φωτοηλεκτρικού φαινομένου στο Νάτριο.



Παράδειγμα 9: (Λύθηκε στο Μάθημα) Θεωρείστε ότι φώς ολικής εντάσεως $I_0 = 1\mu\text{W}/\text{cm}^2$ προσπίπτει σε δείγμα καθαρού Σιδήρου επιφάνειας $A = 1\text{ cm}^2$. Υποθέστε ότι το δείγμα ανακλά το 96% του φωτός και ότι μόνο το 3% της απορροφούμενης ενέργειας βρίσκεται στην περιοχή του φάσματος πάνω από τη συχνότητα αποκοπής του Σιδήρου που βρίσκεται στην ιώδη περιοχή. (α) Πόση ένταση είναι στην πραγματικότητα διαθέσιμη για την εμφάνιση φωτοηλεκτρικού φαινομένου; (β) Εάν υποτεθεί ότι όλα τα φωτόνια στην ιώδη περιοχή του φάσματος έχουν ενεργό μήκος κύματος 250 nm, πόσα φωτοηλεκτρόνια εκπέμπονται ανά δευτερόλεπτο; (γ) Υπολογίστε το φωτοηλεκτρικό ρεύμα σε A. (δ) Εάν η συχνότητα αποκοπής του Σιδήρου είναι $f_0 = 1,1 \times 10^{15}\text{ Hz}$, υπολογίστε το έργο εξόδου του Σιδήρου. (ε) Υπολογίστε την τάση αποκοπής για τον Σίδηρο εάν τα φωτοηλεκτρόνια παράγονται από φώς με $\lambda = 250\text{nm}$.

IV. ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΣ ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ - ΦΩΤΟΝΙΑ

- ▶ Ο Einstein επανήλθε στην έννοια του φωτονίου το 1916 εντάσσοντάς το σταδιακά (αλλά όχι κραυγαλέα) ως σωμάτιο στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας, την οποία ο ίδιος είχε παρουσιάσει σχεδόν ταυτόχρονα με την ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου το 1905.
- ▶ Το φωτόνιο (κβάντο ενέργειας της H/M ακτινοβολίας) κινείται με την ταχύτητα του φωτός c . Κατά συνέπεια είναι ένα «ακραίως σχετικιστικό σωμάτιο», που εάν θέλουμε να του αποδώσουμε παράλληλα αυτήν την ιδιότητα, θα πρέπει να δεχτούμε βάσει της έκφρασης

$$m_0 = m \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

ότι έχει μηδενική μάζα ηρεμίας $m_{0ph} = 0$

- ▶ Παράλληλα, με βάση τη σχέση

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (cp)^2}$$

η ενέργειά του θα είναι:

$$E_{ph} = cp_{ph}$$

- ▶ Επομένως:

$$p_{ph} = \frac{E_{ph}}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

το φωτόνιο είναι φορέας
και ορμής !!!!



► Όμως:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

και έτσι:

$$E_{ph} = hf = \frac{h}{2\pi} \omega \Rightarrow E_{ph} = \hbar \omega$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$p_{ph} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi / k} \Rightarrow p_{ph} = \hbar k$$

► Αφού το φωτόνιο έχει ορμή θα πρέπει να έχει και αδρανειακή μάζα [η μάζα ενός σώματος που εμφανίζεται στον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής $\vec{F} = m_{in} (d^2\vec{v} / dt^2)$]:

$$m_{iph} = \frac{p_{ph}}{c} = \frac{hf}{c^2}$$

Έχει μάζα όταν κινείται (που αυτό κάνει).

Στην ακραία σχετικιστική περιοχή που κινείται, όλη η μάζα του είναι ενέργεια και ορμή!!!!

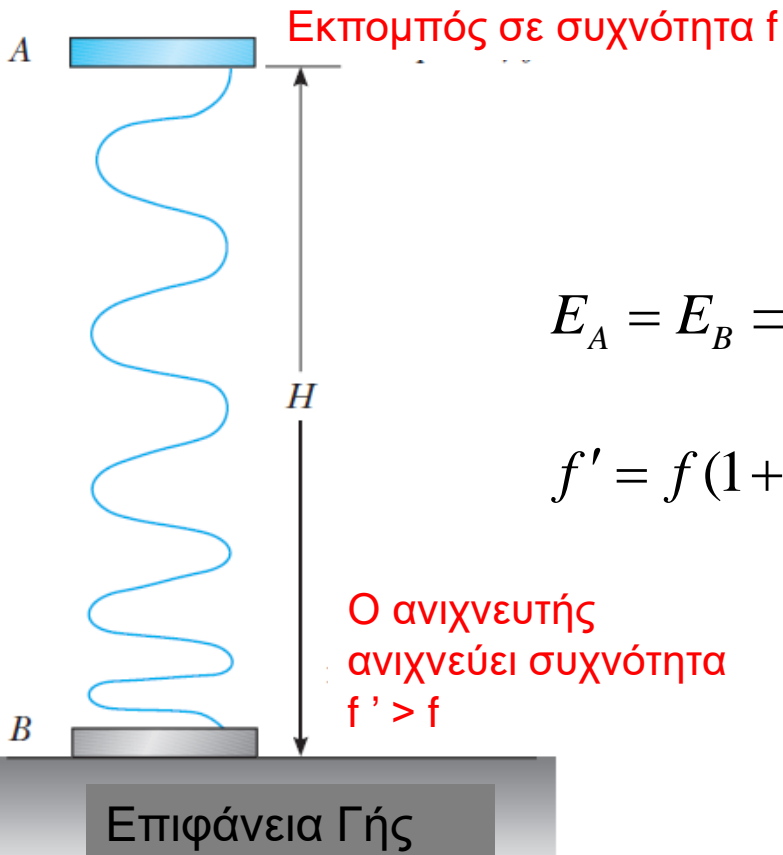
• Ως γνωστόν, για όλα τα σώματα η αδρανειακή τους μάζα ισούται με πολύ μεγάλη ακρίβεια με τη βαρυτική τους μάζα [η μάζα ενός σώματος που εμφανίζεται στον νόμο της παγκόσμιας έλξης]. Άρα και για το φωτόνιο αναμένεται:

$$m_{iph} = m_{gph} = m_{ph} = \frac{hf}{c^2}$$



Κατά συνέπεια το φωτόνιο πρέπει να «αντιλαμβάνεται» την βαρυτική έλξη. Πράγματι πολύ ελκυστικά φαινόμενα αποδεικνύουν την αντίληψη του βαρυτικού πεδίου από το φωτόνιο επιβεβαιώνοντας ότι η βαρυτική του μάζα έχει την παραπάνω τιμή.....

Φαινόμενο 1 (Το πείραμα του Pound):



Στην κορυφή κτηρίου $H=50\text{m}$ μια πηγή εκπέμπει H/M ακτινοβολία προς το έδαφος σε συχνότητα f . Στο έδαφος ένας ανιχνευτής ανιχνεύει συχνότητα f' . Εάν οι παραπάνω συλλογισμοί είναι σωστοί, η αρχή διατήρησης της ενέργειας επιβάλλει:

$$E_A = E_B \Rightarrow hf + m_{ph}gH = hf' + 0 \Rightarrow hf + \frac{hf}{c^2}gH = hf' \Rightarrow$$

$$f' = f\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = \frac{gH}{c^2} = 5,4 \times 10^{-15} \text{ !!!!}$$

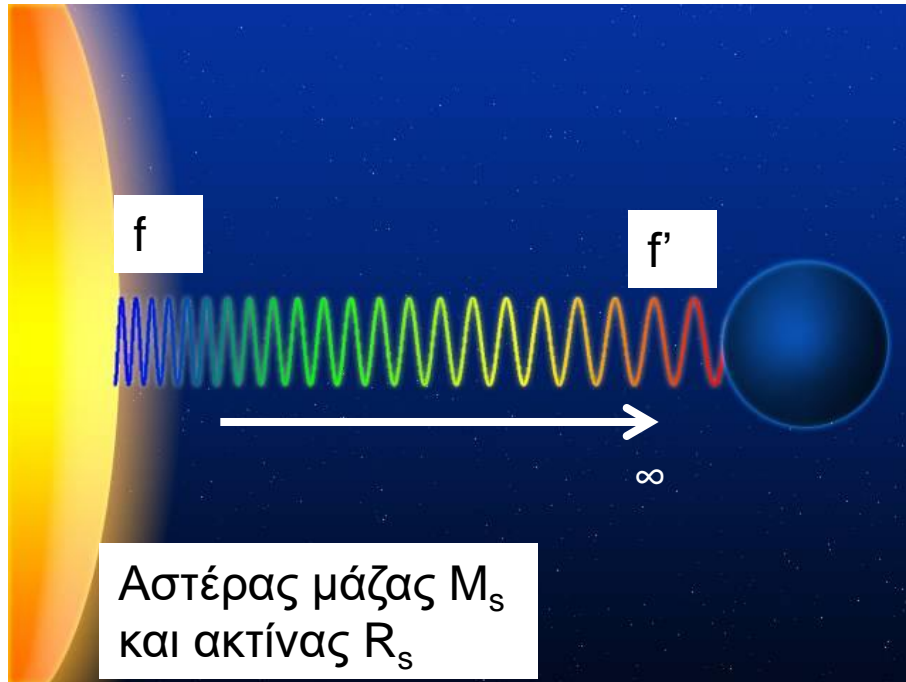
Αύξηση συχνότητας!!!

Και όμως τέτοιες διαφορές μετρήθηκαν από τον Pound το 1960 !!!!

Άρα σωστά η βαρυτική μάζα του φωτονίου θεωρείται

$$\frac{hf}{c^2}$$

Φαινόμενο 2 (Βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό):



Ένας αστέρας θεωρείται μέλαν σώμα. Εάν η θερμοκρασία του είναι πολύ υψηλή, εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία στο ιώδες του ορατού φάσματος. Καθώς η ακτινοβολία απομακρύνεται από αυτόν, αλλάζει συχνότητα και μετατοπίζεται προς το ερυθρό. Αυτό οφείλεται στο ότι τα εκπεμπόμενα φωτόνια υφίστανται προοδευτικά ασθενέστερη βαρυτική έλξη από τον αστέρα....:

$$E|_{R_s} = E|_{r \rightarrow \infty} \Rightarrow$$

$$hf - G \frac{M_s m_{ph}}{r} \Big|_{r=R_s} = hf' + 0 \Rightarrow$$

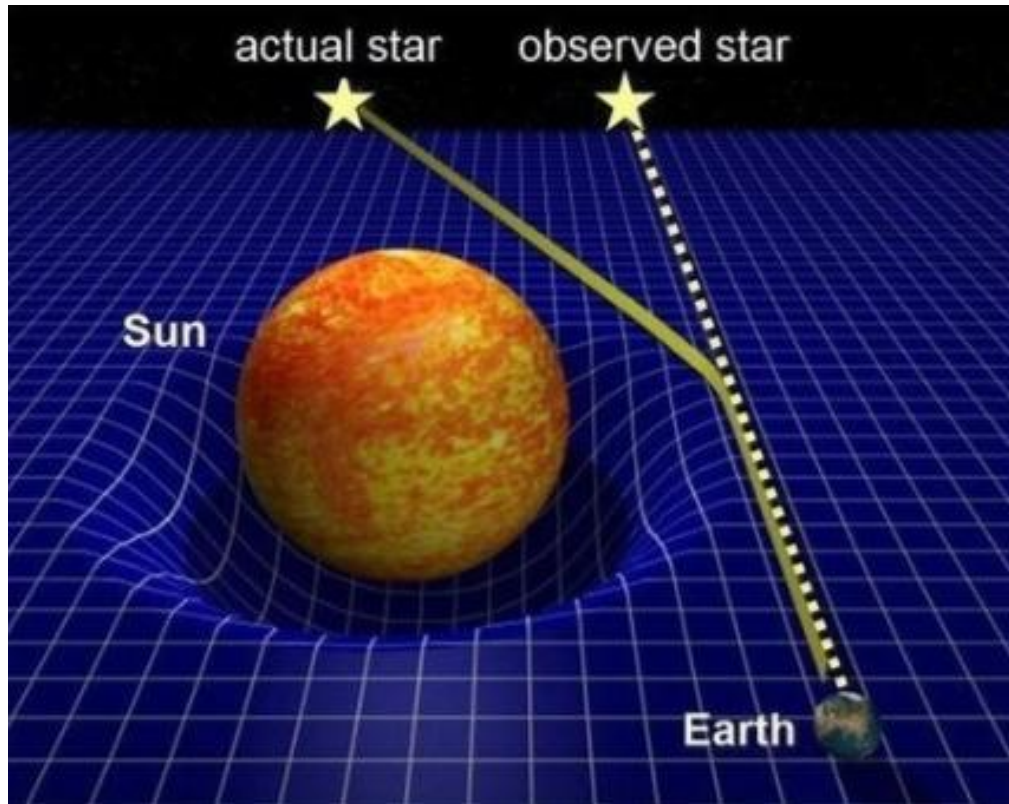
$$hf - G \frac{M_s}{R_s} \frac{hf}{c^2} = hf' + 0 \Rightarrow$$

$$f' = f \left(1 - \frac{GM_s}{R_s c^2} \right)$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = - \frac{GM_s}{R_s c^2}$$

Μείωση συχνότητας!!!

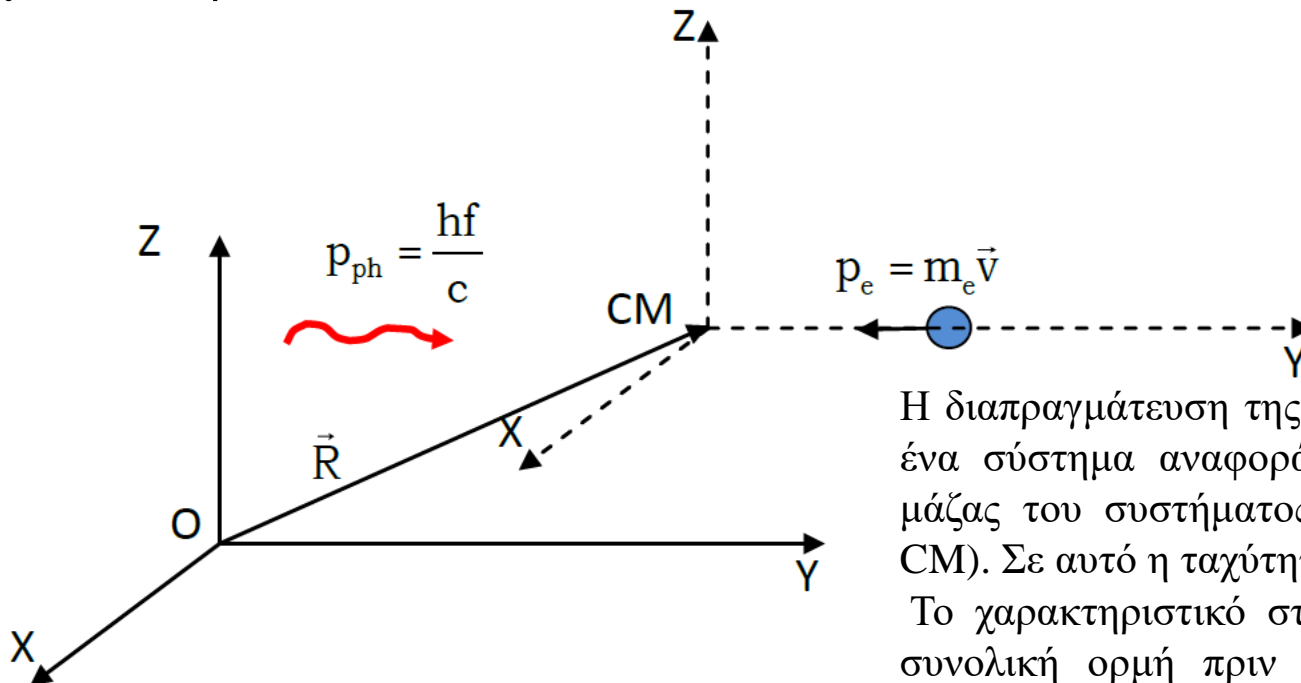
Φαινόμενο 3 (Βαρυτική σκέδαση του φωτός από τον Ήλιο):



Το φως ενός αστέρα καθώς οδεύει προς τη Γή μπορεί να σκεδαστεί από την καμπύλωση του χώρου που βάσει της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας προκαλεί η ύπαρξη του Ήλιου. Έτσι δημιουργείται στη Γή παραπλανητική εικόνα για τη θέση του αστέρα.....

Παράδειγμα 10: (Λύθηκε και στο Μάθημα) Να αποδειχθεί ότι ένα φωτόνιο δεν μπορεί να μεταφέρει όλη του την ενέργεια σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο στον κενό χώρο. Έρχεται αυτό σε αντίφαση με την ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από τον Einstein;

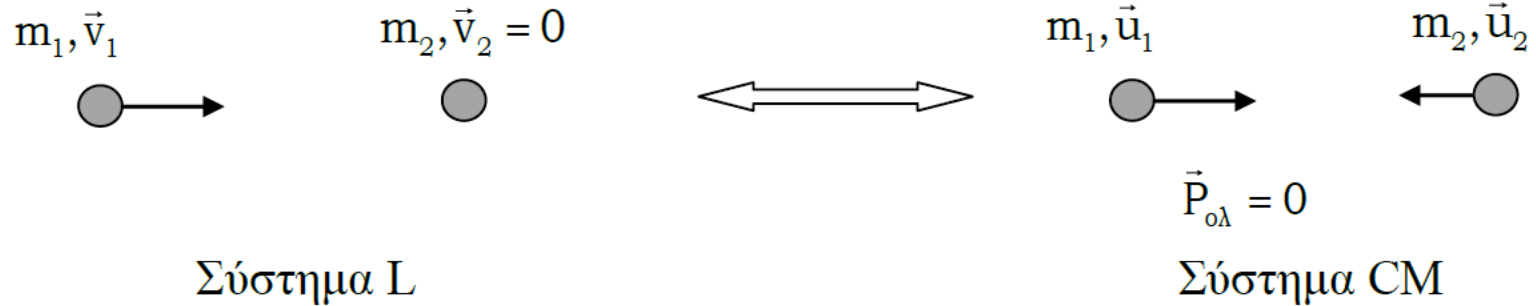
Λύση: Με τον όρο ελεύθερο ηλεκτρόνιο εννοούμε ένα ηλεκτρόνιο που δεν υφίσταται κανενός είδους δύναμη πριν συγκρουστεί. Η σύγκρουση με το φωτόνιο στο σύστημα ενός ακίνητου παρατηρητή (σύστημα εργαστηρίου - L) εικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα. Το ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα \vec{v} , ενώ το φωτόνιο με ταχύτητα c . Η κρούση τους θεωρείται σχετικιστική.



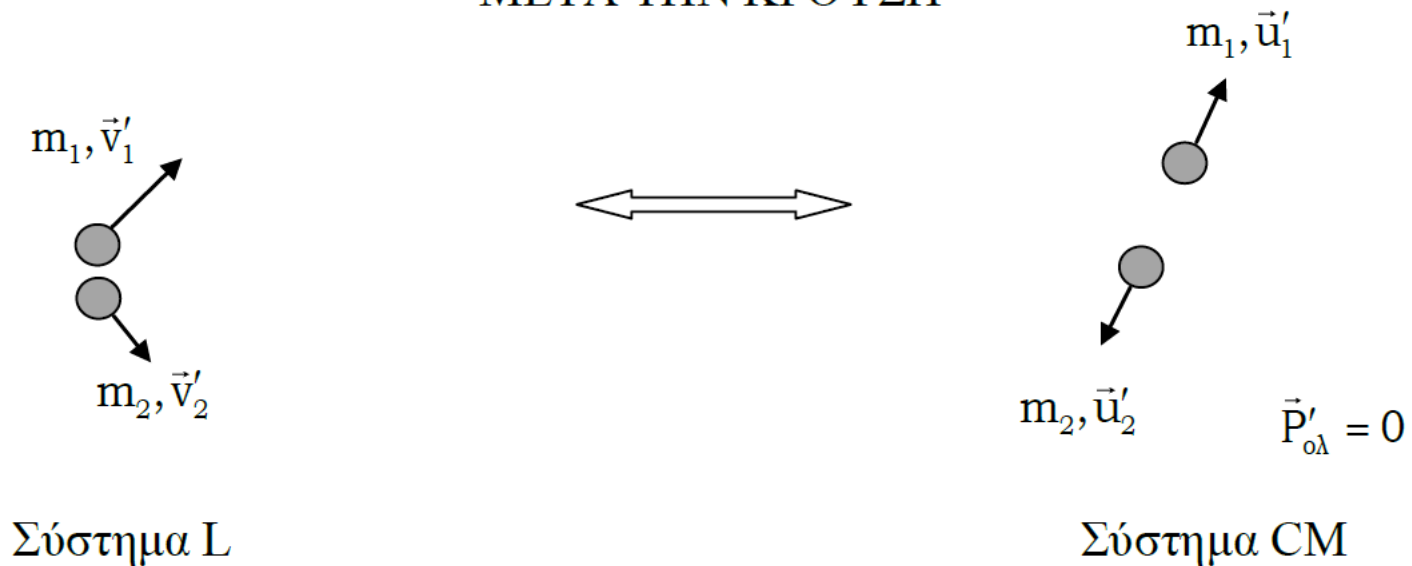
Η διαπραγμάτευση της κρούσης είναι πιο εύκολη σε ένα σύστημα αναφοράς που έχει αρχή το κέντρο μάζας του συστήματος (σύστημα κέντρου μάζας-CM). Σε αυτό η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι \vec{u}

Το χαρακτηριστικό στο σύστημα αυτό είναι ότι η συνολική ορμή πριν και μετά την κρούση είναι μηδέν.


ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ




ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ



Επομένως στο σύστημα κέντρου μάζας θα έχουμε:

$$p_{\text{ph}} = \frac{hf}{c}$$


$$\vec{p}_e = m_e \vec{u}$$


$$m_{0e}, \vec{u}' = 0$$



Πρίν την απορρόφηση

$$\vec{P}_{\text{ολ,πριν}} = 0$$

$$E_{\text{ολ,πριν}} = hf + m_e c^2$$

Μετά την απορρόφηση

Το φωτόνιο εξαφανίζεται

$$p'_e = 0 \text{ (από διατήρηση ορμής)}$$

$$E_{\text{ολ,μετά}} = m_{0e} c^2$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E_{\text{ολ,πριν}} = E_{\text{ολ,μετά}} \Rightarrow hf + m_e c^2 = m_{0e} c^2 \Rightarrow m_{0e} > m_e !!! \text{(αδύνατο)}$$

Κατά συνέπεια προσπίπτοντας σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο το φωτόνιο δεν μπορεί να του μεταβιβάσει όλη του την ενέργεια και να απορροφηθεί πλήρως.

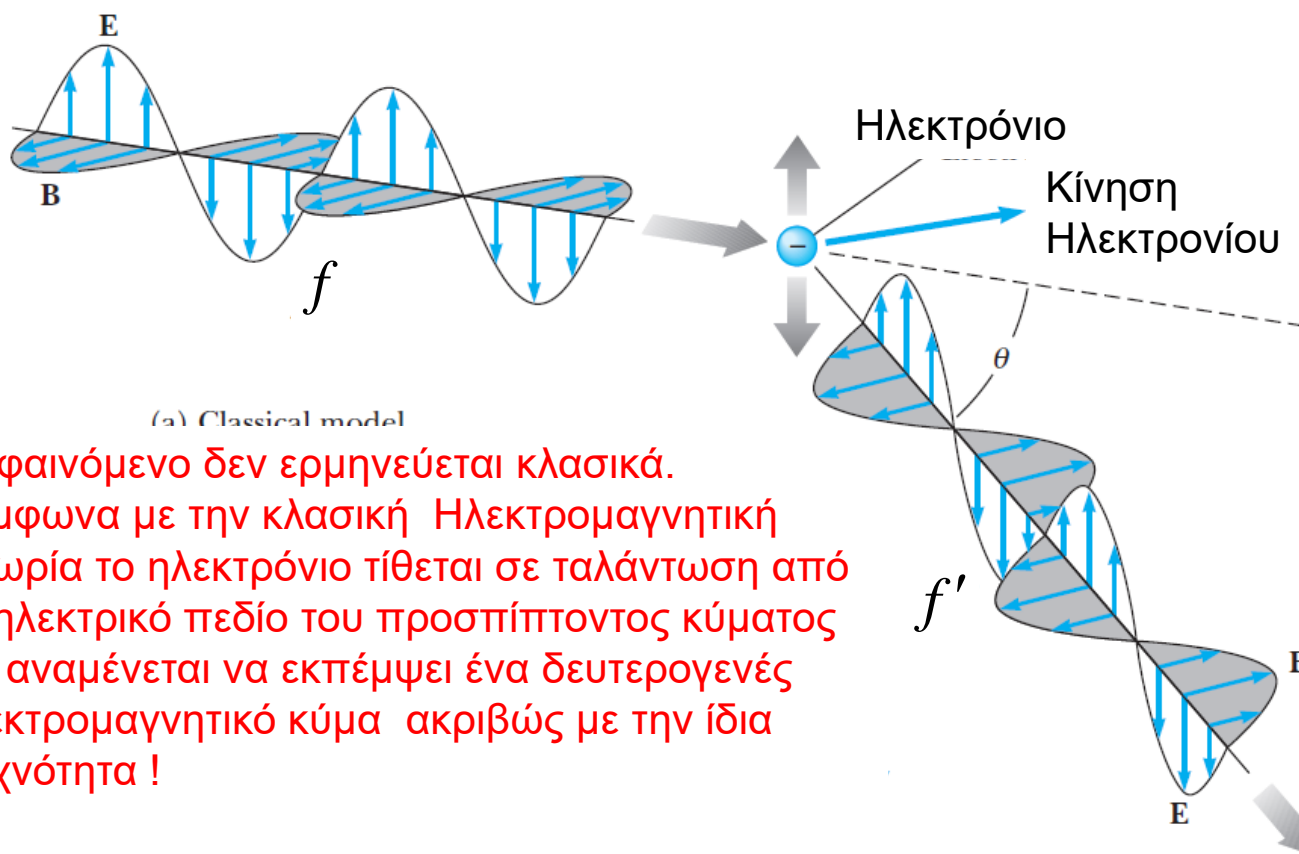
Δεν υπάρχει καμία αντίφαση στην ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων είναι ελεύθερα από τα άτομά τους. Υφίστανται όμως δυνάμεις από τα ιόντα του μετάλλου μέσα στο οποίο κινούνται και με τα οποία συγκρούονται. Επομένως δεν θεωρούνται ελεύθερα δυνάμεων. Σε αυτή την περίπτωση η ενέργεια του φωτονίου μπορεί να μεταβιβαστεί ολόκληρη στα ηλεκτρόνια. Η υπόλοιπη ύλη δεν απορροφά σε αυτή την περίπτωση ενέργεια από τα φωτόνια (ή απορροφά ελάχιστη που αγνοείται).

V. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ COMPTON (1922)

► Ορίζεται ως το φαινόμενο της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας υψηλής συχνότητας ή ισοδύναμα μικρού μήκους κύματος (ακτίνες X ή γ) από χαλαρά δέσμια σε άτομα ηλεκτρόνια που συνοδεύεται από αύξηση του μήκους κύματός της. Η αύξηση του μήκους κύματός της είναι ανάλογη της γωνίας σκέδασης θ .

Το φαινόμενο κατέδειξε για πρώτη φορά ότι τα φωτόνια μεταφέρουν ορμή

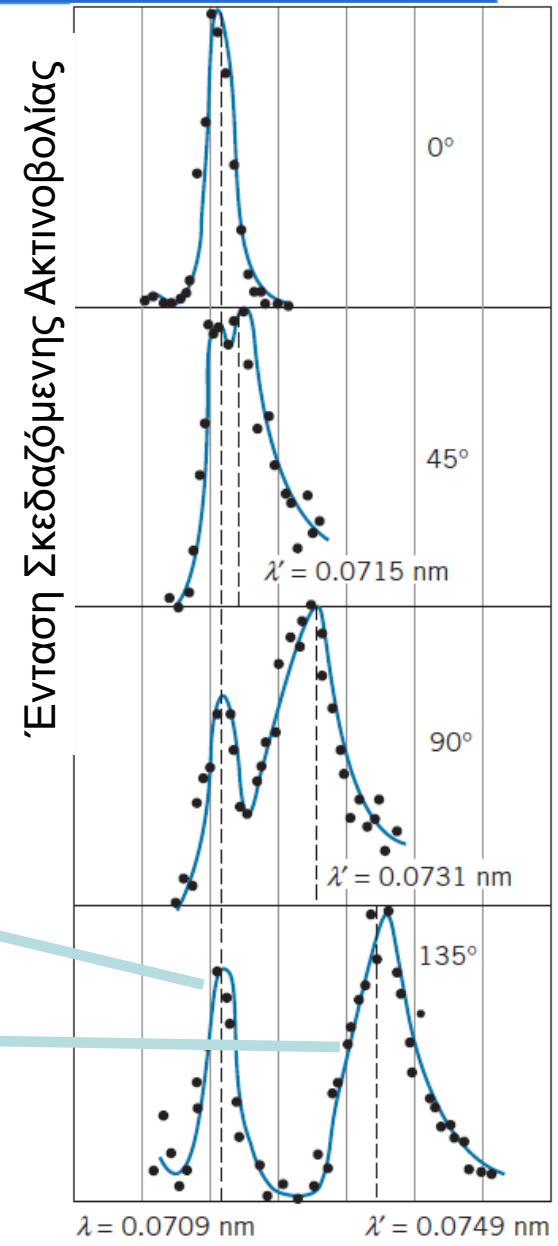
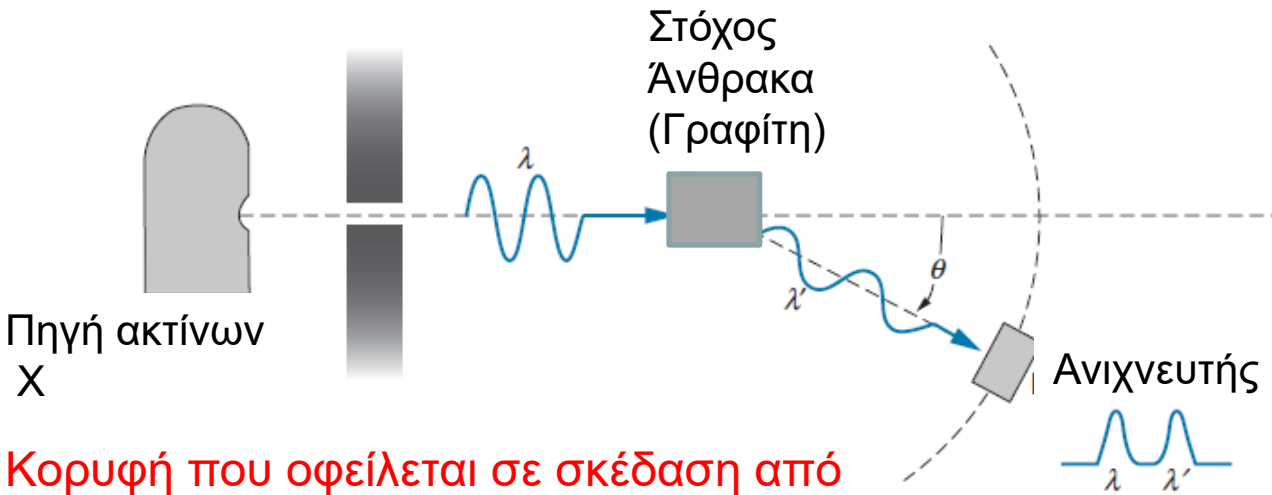
Arthur H. Compton
(1892 – 1962)



Το φαινόμενο δεν ερμηνεύεται κλασικά.
Σύμφωνα με την κλασική Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία το ηλεκτρόνιο τίθεται σε ταλάντωση από το ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος κύματος και αναμένεται να εκπέμψει ένα δευτερογενές ηλεκτρομαγνητικό κύμα ακριβώς με την ίδια συχνότητα !



► Λεπτομέρειες του πειράματος:



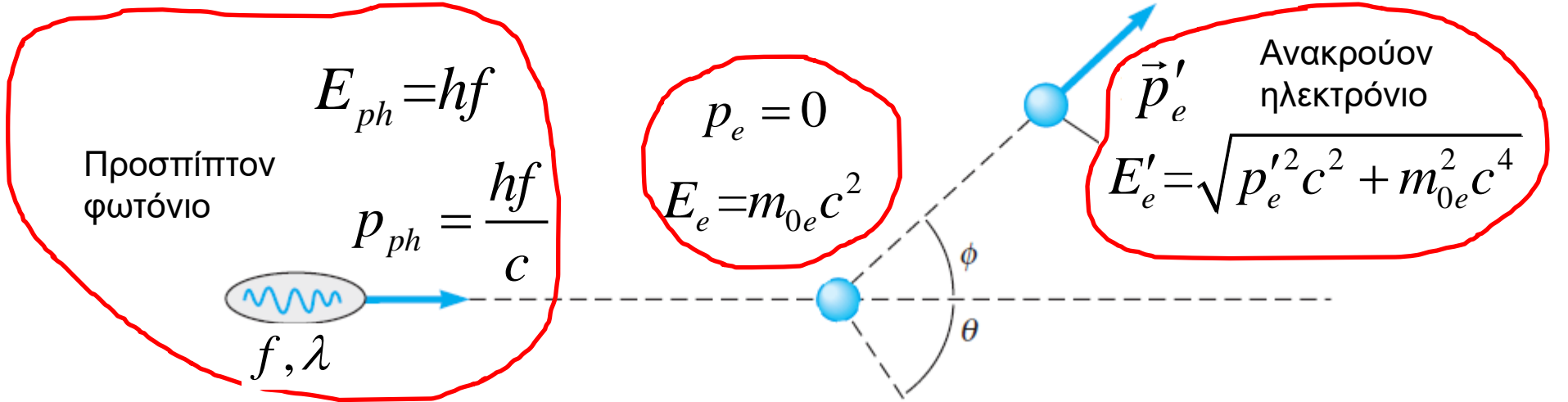
Κορυφή που οφείλεται σε σκέδαση από ισχυρά δέσμια ηλεκτρόνια του στόχου. Σε αυτά σκεδάζεται η ακτινοβολία χωρίς απώλεια ενέργειας. Ισοδυναμεί με το κύμα να πέφτει σε όλο το άτομο...

Κορυφή που οφείλεται σε σκέδαση από σχεδόν ελεύθερα (χαλαρά δέσμια) ηλεκτρόνια στα άτομα του στόχου. Αναδεικνύεται όσο αυξάνεται η γωνία θ.

Συλλέγει και τα δύο



► **Κβαντική ερμηνεία:** Σκέδαση φωτονίου από ακίνητο ηλεκτρόνιο



Διατήρηση ενέργειας:

$$hf + m_{0e}c^2 = hf' + \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4}$$

Διατήρηση ορμής (x-άξονας):

$$\frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c} \cos \theta + p'_e \cos \phi \quad (1)$$

Διατήρηση ορμής (y-άξονας):

$$0 + 0 = -\frac{hf'}{c} \sin \theta + p'_e \sin \phi \quad (2)$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{0e}c} (1 - \cos \theta)$$

Μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου



Απόδειξη:

$$(1) \Rightarrow p'_e \cos \varphi = \frac{hf}{c} - \frac{hf'}{c} \cos \theta$$

$$(2) \Rightarrow p'_e \sin \varphi = \frac{hf'}{c} \sin \theta$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε τις παραπάνω.

$$p_e'^2 = \left(\frac{hf}{c} - \frac{hf'}{c} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{hf'}{c} \sin \theta \right)^2 = \frac{h^2 f^2}{c^2} + \frac{h^2 f'^2}{c^2} - \frac{2h^2}{c^2} ff' \cos \theta \Rightarrow$$

$$p_e'^2 c^2 = h^2 (f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta) \quad (3)$$

Από την σχέση της διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι:

$$hf + m_{0e} c^2 = hf' + \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} \Rightarrow h(f - f') + m_{0e} c^2 = \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} \Rightarrow$$

$$\left[h(f - f') + m_{0e} c^2 \right]^2 = p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4 \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε στην (4) την (3) και έχουμε ότι:

$$\left[h(f - f') + m_{0e}c^2 \right]^2 = h^2 (f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta) + m_{0e}^2 c^4 \Rightarrow$$

$$2h(f - f')m_{0e}c^2 = 2h^2 ff' - 2h^2 ff' \cos \theta \Rightarrow$$

$$f - f' = \frac{h}{m_{0e}c^2} ff' (1 - \cos \theta) \xrightarrow{\text{ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ ΜΕ } ff'}$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_{0e}c^2} (1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_{0e}c} (1 - \cos \theta)$$

Παρατήρηση 1: Στην διαπραγμάτευση που προηγήθηκε το ηλεκτρόνιο του ατόμου θεωρήθηκε πρακτικά ακίνητο, παρά το ότι γνωρίζουμε ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται γύρω από τον πυρήνα. Οι ενέργειες, όμως, των φωτονίων των ακτίνων Χ ή γ είναι τόσο μεγάλες (της τάξεως των keV-MeV) που πρακτικά θεωρούμε ότι προσπίπτουν σε ακίνητο ηλεκτρόνιο.....

Παρατήρηση 2: Η κινητική ενέργεια που μεταβιβάζεται στο ηλεκτρόνιο από το προσπίπτον φωτόνιο ισούται με:

$$K_e' = E_{ph} - E'_{ph} = hf - hf' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)$$

Αυτή συνδέεται με την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση με τη γνωστή σχετικιστική σχέση:

$$E_e' = K_e' + m_{0e}c^2 = \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4}$$

$$1eV = 1,6 \times 10^{-19} J$$

$$m_{e0}c^2 = 9,1 \times 10^{-31} Kgr \times 9 \times 10^{16} \frac{m^2}{s^2} = 81,9 \times 10^{-15} J = 51,18 \times 10^4 eV$$

Παρατήρηση 3:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_C}{\lambda} (1 - \cos\theta), \quad \lambda_C = \frac{h}{m_{0e}c} \simeq 2,4 \times 10^{-2} \text{ \AA}$$

$$(\Delta\lambda)_{\max} = 2\lambda_C \text{ για } \theta=180^\circ$$

- Το φαινόμενο γίνεται σημαντικό όταν η ενέργεια του πρωτογενούς φωτονίου είναι συγκρίσιμη με ή μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου. Αυτό εξαρτάται από τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτονίου που συνδέεται με τη μάζα κίνησής του με τη σχέση:

$$m_{ph} = \frac{hf}{c^2}$$

Εάν $\frac{hf}{c^2} \ll m_{0e}$ ($\lambda \gg \lambda_C$) («ελαφριά» φωτόνια) το φωτόνιο αναπηδά στο ηλεκτρόνιο χωρίς απώλεια ενέργειας και αλλαγή συχνότητας

Εάν $\frac{hf}{c^2} \geq m_{0e}$ ($\lambda \leq \lambda_C$) («βαριά» φωτόνια) το φωτόνιο μεταβιβάζει μέρος της ενέργειάς του στο ηλεκτρόνιο

Το φαινόμενο είναι, επομένως, αμελητέο κατά την πρόσπτωση ορατού φωτός (βλ. Παράδειγμα 12).

Παράδειγμα 11:(Αυτοδιδασκαλία) Σε μία σκέδαση Compton με ένα ηλεκτρόνιο, ένα φωτόνιο με μήκος κύματος $\lambda = 0,200 \text{ nm}$ (ακτίνες X) σκεδάζεται σε γωνία 90° . Να υπολογιστούν:

- (α) Η αλλαγή στο μήκος κύματος του φωτονίου και
(β) Η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.

Λύση: (α) Θα έχουμε ότι

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_{oe} c} (1 - \cos \theta) = \frac{6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}}{(9,1 \times 10^{-31} \text{ Kgr})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} (1 - \cos 90^\circ) = 0,00242 \text{ nm}$$

(β) Το φωτόνιο μετά τη σκέδαση χάνει ενέργεια, η οποία μεταβιβάζεται στο αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο ως κινητική ενέργεια. Επομένως:

$$K_e' = hf - hf' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)$$

Όμως:

$$\lambda' = \lambda + \Delta \lambda = 0,2 \text{ nm} + 0,00242 \text{ nm} = 0,20242 \text{ nm}$$

Και έτσι:

$$K_e' = \left[\frac{(6,62 \times 10^{-34} \text{ J s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} \right] \left(\frac{1}{0,2} - \frac{1}{0,20242} \right) \times 10^9 m = 73,2 \text{ eV}$$

Παράδειγμα 12: (Αυτοδιδασκαλία) Εάν στο πείραμα του Compton αντί για ακτίνες X ή γ προσέπιπτε ορατό φως θα παρατηρούσαμε το φαινόμενο; Θεωρείστε ότι έχουμε σκέδαση των φωτονίων σε γωνία 90° με πρόσπτωση:

- (i) Ακτίνων γ με $\lambda=0,0106 \text{ \AA}$
- (ii) Ακτίνων X με $\lambda=0,712 \text{ \AA}$
- (iii) Πράσινου φωτός με $\lambda= 5461 \text{ \AA}$

Λύση: Θα έχουμε ότι:

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_{oe}c} (1 - \cos \theta) = \frac{6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}}{(9,1 \times 10^{-31} \text{ Kgr})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} (1 - \cos 90^\circ) = 0,00242 \text{ nm}$$

ανεξάρτητα από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου.

Άρα

(i) Για τις ακτίνες γ :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{0,00242 \text{ nm}}{0,00106 \text{ nm}} = 2,28$$

(ii) Για τις ακτίνες X :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{0,00242 \text{ nm}}{0,0712 \text{ nm}} = 0,033$$

(iii) Για το πράσινο φώς:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{0,00242 \text{ nm}}{546,1 \text{ nm}} = 4,43 \times 10^{-6}$$

Καταλαβαίνουμε ότι δεν είναι δυνατή η ανίχνευση τόσο μικρής αλλαγής στο μήκος κύματος όταν προσπίπτει ορατό φώς, δεδομένου ότι ο ανιχνευτής, όπως έχουμε δείξει, συλλέγει τόσο την προσπίπτουσα όσο και τη σκεδαζόμενη ακτινοβολία. Για να είναι διαχωρίσιμες θα πρέπει πρακτικά το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου να είναι της τάξεως του 1 \AA ή και λιγότερο.

Παρατήρηση: Εναλλακτικά θα μπορούσαμε εξαρχής να συγκρίνουμε το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου με το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου που είναι:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 e c} \simeq 2,4 \times 10^{-2} \text{ \AA}$$

Στο πράσινο φώς $\lambda \gg \lambda_C$ και δεν θα παρατηρήσουμε φαινόμενο Compton

Παράδειγμα 13: (Αυτοδιδασκαλία) Σε ένα πείραμα Compton ακτίνες γ ενέργειας 1,02 MeV προσπίπτουν σε ακίνητο ηλεκτρόνιο. Εάν η σκέδαση είναι συμμετρική ($\theta = \phi$) να υπολογιστεί η γωνία σκέδασης του ηλεκτρονίου και η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου.

Λύση: Η αρχή διατήρησης της ορμής στους άξονες X-Y [σχέσεις (1)-(2) στη σελίδα 63] γίνεται:

$$\frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c} \cos \theta + p'_e \cos \theta \Rightarrow \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + p'_e \cos \theta \quad (1)$$

$$0 + 0 = -\frac{hf'}{c} \sin \theta + p'_e \sin \theta \Rightarrow \frac{h}{\lambda'} \sin \theta = p'_e \sin \theta \Rightarrow p'_e = \frac{h}{\lambda'} \quad (2)$$

Επομένως από (1) και (2): $\lambda' = 2\lambda \cos \theta \quad (3)$

$1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$

Όμως:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

Από (3) και (4):

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{E_{ph}} = \frac{(6,62 \times 10^{-34} \text{ Js}) \times (3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{1,02 \times 10^6 \text{ eV}} = \frac{19,86 \times 10^{-26} \text{ Jm}}{1,02 \times 10^6 \text{ eV}} = \\ &= \frac{12,412 \times 10^{-7} \text{ eVm}}{1,02 \times 10^6 \text{ eV}} = \frac{12,412 \times 10^{-7} \text{ eVm}}{1,02 \times 10^6 \text{ eV}} \approx \frac{1240 \text{ eV nm}}{1,02 \times 10^6 \text{ eV}} = 0,00122 \text{ nm} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{\lambda_c + \lambda}{\lambda_c + 2\lambda} = \frac{0,00243 \text{ nm} + 0,00122 \text{ nm}}{0,00242 \text{ nm} + 0,00244 \text{ nm}} = 0,7495 \Rightarrow \theta = 41,5^\circ$$

Επίσης:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta) = 0,001 22 \text{ nm} + (0,002 43 \text{ nm})[1 - \cos(41,5^\circ)] = 0,001 83 \text{ nm}$$

Και επομένως:

$$E'_{ph} = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1 240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,001 83 \text{ nm}} = 0,679 \text{ MeV}$$

Παράδειγμα 14: (Αυτοδιδασκαλία) Εάν σε ένα πείραμα Compton η μέγιστη ενέργεια που μεταβιβάζεται στο ηλεκτρόνιο είναι 30 keV ποιο είναι το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου;

Λύση: Μέγιστη μεταφορά ενέργειας στο ηλεκτρόνιο θα έχουμε όταν η σκέδαση του φωτονίου γίνει σε γωνία $\theta=180^\circ$. Επίσης η γωνία σκέδασης του ηλεκτρονίου είναι $\varphi=0^\circ$. Η αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα X [σχέση (1) στη σελίδα 63] γίνεται:

$$\frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c} \cos 180 + p'_e \cos 0 \Rightarrow hf + hf' = p'_e c \Rightarrow$$

$$hf + hf' = \sqrt{(m_{0e}c^2 + K'_e)^2 - m_{0e}^2c^4} \approx 178 \text{ keV}$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει:

$$hf - hf' = K'_e = 30 \text{ keV}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι:

$$hf = 104 \text{ keV}$$

Από όπου:

$$\lambda = 0,0120 \text{ nm}$$

$$m_{e0}c^2 = 9,1 \times 10^{-31} \text{ Kgr} \times 9 \times 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} =$$

$$= 81,9 \times 10^{-15} \text{ J} = 51,18 \times 10^4 \text{ eV}$$

$$1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Παράδειγμα 15: (Αυτοδιδασκαλία) (α) Σε ένα πείραμα Compton να υπολογιστεί το ποσό ενέργειας που μεταφέρεται από το φωτόνιο στο ηλεκτρόνιο συναρτήσει της μεταβολής του μήκους κύματός του. Δίνεται η έκφραση:

$$\Delta F(x)=[dF(x)/dx]\Delta x$$

Λύση: Η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου θα είναι:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

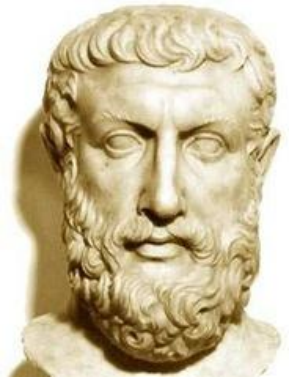
Επομένως η μεταβολή της ενέργειας του φωτονίου κατά τη σκέδαση θα είναι:

$$\Delta E = \left| \frac{dE}{d\lambda} \Delta\lambda \right| = \left| -\left(\frac{hc}{\lambda^2} \right) \Delta\lambda \right| = \left(\frac{hc}{\lambda^2} \right) \Delta\lambda$$

Αυτό το ποσό ενέργειας μεταβιβάζεται στο ηλεκτρόνιο.

VI. ΤΕΛΙΚΑ ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΦΩΣ;

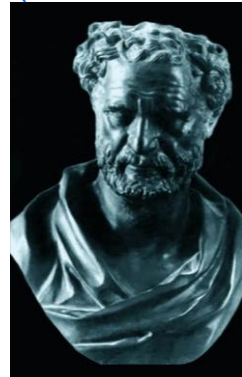
Εμπεδοκλής
(490-430 π.Χ)



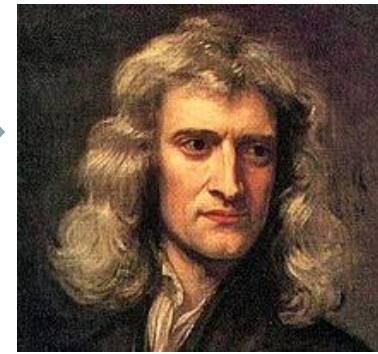
Λεύκιππος
(5^{ος} αιώνας π.Χ)



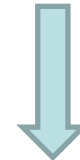
Δημόκριτος
(460-370 π.Χ)



Sir Isaac Newton
(1643-1727)

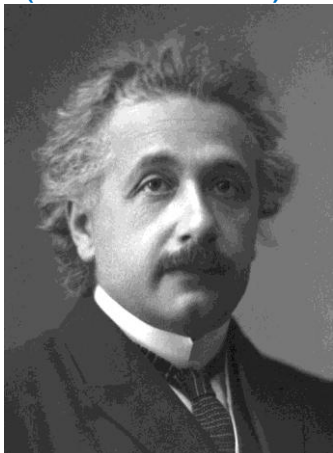


Συμφωνεί
(Γεωμετρική
Οπτική)



Σωματίδια

Albert Einstein
(1879 – 1955)



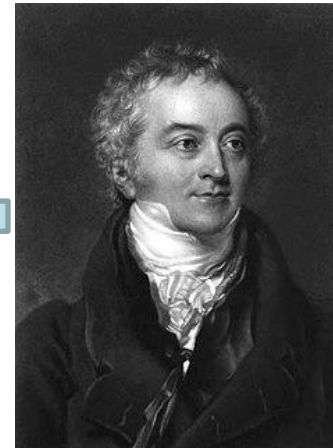
Και τα δύο

James Clerk Maxwell
(1831 – 1879)



Ηλεκτρομαγνητικό Κύμα

Thomas Young
(1773 – 1829)



Κύμα (Κυματική Οπτική)

Christiaan Huygens
(1629 – 1695)



Διαβάστε την εξαιρετική ανάλυση στο βιβλίο του Αρ. Ζδέτση
«Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική», Σελ.109-117

Το φως συμπεριφέρεται, ανάλογα με το πείραμα, άλλοτε σαν σωματίο και άλλοτε σαν κύμα. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά δεν είναι αντίθετα αλλά συμπληρώνουν το ένα το άλλο. Όμως δεν είναι δυνατόν να καθορίσουμε ταυτόχρονα ή να χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα (στο ίδιο πείραμα) τα σωματιδιακά και τα κυματικά χαρακτηριστικά. Το φως, λοιπόν, παρουσιάζει μια διττή υπόσταση.

- ▶ Στις πολύ χαμηλές συχνότητες (μεγάλα μήκη κύματος της H/M ακτινοβολίας – π.χ. Ραδιοκύματα) έχουμε πολύ μικρές ενέργειες φωτονίων που πρακτικά δεν είναι ανιχνεύσιμα. Εδώ το μήκος κύματος είναι της τάξεως του μέτρου!!! Δεν υπάρχει τέτοιας διάστασης σωματίο.....
- ▶ Στις πολύ υψηλές συχνότητες (μικρά μήκη κύματος της H/M ακτινοβολίας – π.χ. ακτίνες X και γ) έχουμε πολύ μεγάλες ενέργειες φωτονίων που ανιχνεύονται σαν ανεξάρτητα σωματίια. Παράλληλα τα μήκη κύματος είναι σε διαστάσεις που δικαιολογούν σωματίια....
- ▶ Στις ενδιάμεσες συχνότητες συνυπάρχουν και τα δύο χαρακτηριστικά ;;;
- ▶ *Η τελικά το φως αποτελείται τελικά από σωματίια, αλλά το μεγάλο πλήθος απ' αυτά, που συνήθως υπάρχει στα συνήθη κλασικά πειράματα, κινείται έτσι ώστε κατά μέσο όρο, στατιστικά, να περιγράφεται από ένα (ηλεκτρομαγνητικό) κύμα;*

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΕΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ

- (α) Το Μέλαν Σώμα βρίσκεται στον Krane [Σελίδες 115-123] και στον Serway [Σελίδες 50-63]. Διαβάστε το, όμως, αποκλειστικά από τον Οδηγό Μελέτης.
- (β) Το Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο βρίσκεται στον Krane [Σελίδες 108-115] και στον Serway [Σελίδες 63-68]. Διαβάστε, εάν θέλετε, και από εκεί.
- (γ) Η ενότητα για τα φωτόνια δεν βρίσκεται στα παραπάνω συγγράμματα μαζεμένη κατά τον τρόπο αυτό. Διαβάστε την πολύ καλά. **Θα ξέρετε «απ' έξω» τις σελίδες 52-56 αυτής της Ενότητας του Οδηγού Μελέτης και τα Φαινόμενα 1 και 2 ως λυμένα παραδείγματα.**
- (δ) Το φαινόμενο Compton βρίσκεται στον Krane [Σελίδες 123-127] και στον Serway [Σελίδες 72-76]. Διαβάστε το, ως προς τον συμβολισμό, κυρίως από τον Οδηγό Μελέτης. **Να ξέρετε να κατασκευάζετε «απ' έξω» τις σχέσεις διατήρησης ορμής και ενέργειας της σελίδας 63 του Οδηγού Μελέτης. Διαβάστε καλά τα λυμένα Παραδείγματα 11-15.**

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

Μέλαν Σώμα: https://phet.colorado.edu/sims/html/blackbody-spectrum/latest/blackbody-spectrum_en.html

Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/photoelectric>

Φαινόμενο Compton:
<https://www.geogebra.org/m/dgx8uSXJ>