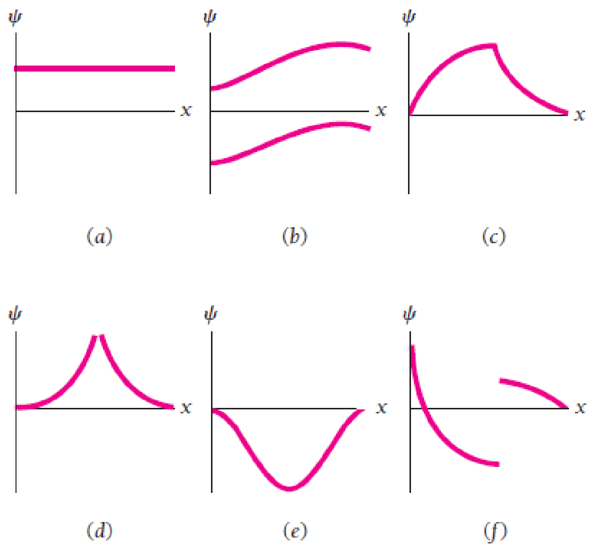
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(Υποχρεωτικό 4ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος
Προβλήματα Σειρά # 5 : Η εξίσωση Schrödinger και η επίλυσή της σε απλά κβαντικά συστήματα – Μονοηλεκτρονιακά Άτομα
Αντιστοιχεί στον Οδηγό Μελέτης του μαθήματος (Ενότητες 5 και 6)

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.
Η ένδειξη √ υποδηλώνει πρόβλημα που σε πρώτη ανάγνωση πρέπει να λυθεί οπωσδήποτε.

I. Ιδιότητες της εξίσωσης Schrödinger- Στάσιμες καταστάσεις και καταστάσεις επαλληλίας

Πρόβλημα 1. Ποιες από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις ψ(x) δεν είναι φυσικά αποδεκτές ως λύσεις της (χρονικά ανεξάρτητης) εξίσωσης Schrödinger και γιατί;



Πρόβλημα 2. Ποιες από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις ψ(x) δεν είναι φυσικά αποδεκτές ως λύσεις της (χρονικά ανεξάρτητης) εξίσωσης Schrödinger και γιατί;

$$\psi_1(x) = Ae^{-ax}\ ,\ \psi_2(x) = Ae^{ax}\ ,\ \psi_3(x) = Ae^{-a|x|}\ ,\ \psi_4(x) = Axe^{-ax^2}\ ,\ \psi_5(x) = \frac{Ax}{\sqrt{x^2+a^2}}\ ,$$

$$\psi_6(x) = Ae^{-|x|}\sin x\ ,\ \psi_7(x) = \frac{A}{\cosh ax}$$ όπου A και a θετικές σταθερές.

[Απ. Οι 1, 2, 5]

Πρόβλημα 3. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο πεδίο δυναμικής ενέργειας

$$U(x) = \alpha^2 x^2,\ \ \alpha = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

Εάν η κατάστασή του περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}x^2\right)$$

που είναι λύση της αντίστοιχης χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger, να υπολογιστεί η ενέργειά του. [Απ. $E = \dfrac{\hbar\alpha}{\sqrt{2m}}$]

√**Πρόβλημα 4.** Θεωρείστε ότι η κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n e^{-\frac{x}{x_0}}, \quad n \; \kappa\alpha\iota \; x_0 \; \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma$$

αντιστοιχεί σε δέσμια κατάσταση ενός σωματιδίου μάζας m σε πεδίο δυναμικής ενέργειας U(x), τέτοιου ώστε U(∞)=0. Να υπολογιστεί η ενέργεια του σωματιδίου και η έκφραση του U(x).

[Απ. $E = -\dfrac{\hbar^2}{2mx_0^2}$, $U(x) = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{n(n-1)}{x^2} - \dfrac{2n}{xx_0}\right]$]

√**Πρόβλημα 5.** Η κυματοσυνάρτηση (λύση της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger) ενός σωματιδίου δίνεται από την έκφραση:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ce^{-x}(1-e^{-x}), & x > 0 \end{cases}$$

όπου το x μετράται σε nm.
(α) Να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς C.
(β) Ποια είναι η πιθανότερη τιμή της θέσης στην οποία μπορεί να βρεθεί το σωματίδιο κατά την διάρκεια σχετικής μέτρησης;
(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου και να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β).

Δίδεται το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = \frac{1}{a^2}$

[Απ. (α) $C = \sqrt{12}\ (nm)^{-\frac{1}{2}}$ (β) $x_p = \ln 2\ nm = 0,693nm$ (γ) $<x> = \dfrac{13}{12}nm = 1,083nm$]

ΙΙ. Δέσμιες καταστάσεις-Σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας.

Πρόβλημα 6. Ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας εκτείνεται από –L/2 έως L/2 , δηλαδή:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \\ \infty, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

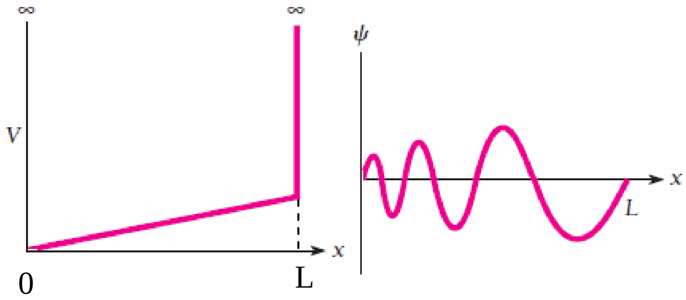
Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα της διαπραγμάτευσης του προβλήματος στο απειρόβαθο πηγάδι

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le L \\ \infty, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

γράψτε την μορφή των τριών πρώτων κανονικοποιημένων κυματοσυναρτήσεων που περιγράφουν την κατάσταση του σωματιδίου. [Υπόδειξη: Δεν απαιτείται λύση του προβλήματος από την αρχή. Μόνο τροποποίηση των ήδη γνωστών αποτελεσμάτων.Πώς;].

[Απ. $\psi_1(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\cos\left(\dfrac{\pi}{L}x\right)$, $\psi_2(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{2\pi}{L}x\right)$, $\psi_3(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\cos\left(\dfrac{3\pi}{L}x\right)$]

√**Πρόβλημα 7.** Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο τροποποιημένο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας του σχήματος. Μία από τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν την κατάσταση του σωματιδίου εντός του πηγαδιού εικονίζεται στο σχήμα. Να εξηγηθεί πλήρως η μορφή της (μεταβολή μήκους κύματος και πλάτους). [Υπόδειξη: Λάβετε καταρχήν υπόψιν ότι το μήκος κύματος της κυματοσυνάρτησης ισοδυναμεί με το μήκος κύματος de Broglie του σωματιδίου. Πως αυτό μεταβάλλεται με το U;].



√•**Πρόβλημα 8.** Στο πρόβλημα της κίνησης σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας, να αποδειχθεί ότι για την κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi_n(x)$:

$$<x> = \frac{L}{2}, \quad <x^2> = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2(n\pi)^2}$$

√**Πρόβλημα 9.** Στο πρόβλημα της κίνησης σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας, η κατάσταση του σωματιδίου περιγράφεται από την επαλληλία των κανονικοποιημένων κυματοσυναρτήσεων (λύσεων της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger) $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ (θεμελιώδης και πρώτη διεγερμένη αντίστοιχα):

$$\psi(x) = C\left[\psi_1(x) + \psi_2(x)\right]$$

√ (α) Να προσδιοριστεί η σταθερά C, έτσι ώστε η $\psi(x)$ να είναι επίσης φυσικά αποδεκτή λύση της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger.
√ (β) Να προσδιοριστεί η μέση ενέργεια του σωματιδίου σε αυτή την κατάσταση επαλληλίας.
√ (γ) Να γραφεί η έκφραση της κυματοσυνάρτησης $\Psi(x,t)$ που εμπεριέχει την χρονική εξέλιξη της κατάστασης του σωματιδίου.
• (δ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου σε αυτή την κατάσταση επαλληλίας **[Η λύση παρατίθεται]**.

[Απ. (α) $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, (β) $<E> = \frac{E_1 + E_2}{2}$, (γ) $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$

(δ)

$$<x> = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\Psi(x,t)|^2 dx = \int_0^L x\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left\{\int_0^L x\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx + \int_0^L x\sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx + e^{-i\Omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx + e^{i\Omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx\right\}, \quad \Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

Επομένως:

$$<x> = \frac{1}{L}\left\{\underbrace{\int_0^L x\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx}_{\frac{L^2}{4}} + \underbrace{\int_0^L x\sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx}_{\frac{L^2}{4}} + \cos(\Omega t)\underbrace{2\int_0^L x\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx}_{-\frac{16L^2}{9\pi^2}}\right\}$$

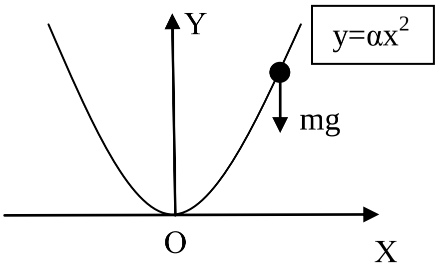
Και:

$$<x> = \frac{L}{2} - \frac{16}{9}\frac{L}{\pi^2}\cos\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)$$

]

III. Δέσμιες καταστάσεις- Ο κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής.

√**Πρόβλημα 10.** Σωματίδιο μάζας m κινείται επάνω στην παραβολική καμπύλη $y=\alpha x^2$ του σχήματος μόνο υπό την επίδραση του βάρους του (σαν χάντρα περασμένη σε σύρμα). (α) Να γραφεί η χρονικά εξαρτημένη και η χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger για το σωματίδιο. (β) Εάν $\alpha = 5\text{x}10^{26}\ \text{m}^{-1}$ να υπολογιστεί η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του σωματιδίου. Θεωρείστε γνωστή την επιτάχυνση της βαρύτητας g.



[Απ. (α) Βρείτε αρχικά την έκφραση της δυναμικής ενέργειας του σωματιδίου συναρτήσει του x.
(β) $\hbar\sqrt{\frac{g\alpha}{2}} = 0{,}033eV$]

Πρόβλημα 11. (α) Να κατασκευαστεί η κυματοσυνάρτηση $\psi_1(x)$ της πρώτης διεγερμένης κατάστασης (n=1) κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή.
(β) Να βρεθεί η έκφραση της κυματοσυνάρτησης $\Psi_1(x,t)$ που εμπεριέχει την χρονική εξέλιξη της πρώτης διεγερμένης κατάστασης (n=1) κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή.
(γ) Ποια είναι η πιθανότερη τιμή της θέσης του ταλαντωτή στην κατάσταση n=1 κατά την διάρκεια σχετικής μέτρησης;
(δ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της θέσης του ταλαντωτή στην κατάσταση n=1 και να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ).

[Απ. (α) $\psi_1(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} (2\alpha)^{\frac{1}{2}} x e^{-\frac{ax^2}{2}} = \left(\frac{m^3\omega^3}{\hbar^3\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$, $a=\frac{m\omega}{\hbar}$ (γ) $x_p = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$,
(δ) $<x>=0$]

√•**Πρόβλημα 12.** Ένας κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να βρεθεί εκτός των κλασικών ορίων κίνησής του.
Υπενθυμίζεται ότι τα κλασικά όρια κίνησης κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή αντιστοιχούν σε κλασικό ταλαντωτή με ενέργεια ίση με την αντίστοιχη του κβαντικού σε κάθε κατάστασή του. Έτσι για τη θεμελιώδη κατάσταση του κβαντικού ταλαντωτή τα αντίστοιχα κλασικά όρια κίνησης είναι $\pm A = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ (γιατί;)

Δίδεται το ολοκλήρωμα : $\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots.$

[Απ. $\wp(x<-A,\ x>A) = 1-\wp(-A \le x \le A) \approx 0{,}16 = 16\%$]

√**Πρόβλημα 13.** Ένα σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στο πεδίο δυναμικής ενέργειας

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cx,\ k = m\omega^2,\ c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

(τροποποιημένος αρμονικός ταλαντωτής). Να βρεθεί το ενεργειακό του φάσμα.

[Υπόδειξη: Τροποποιείστε κατάλληλα της έκφραση του U(x) και θέσατε $\xi = x + \frac{c}{k}$]

[Απ. $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{c^2}{2k},\ n = 0,1,2,3...$]

•**Πρόβλημα 14.** Ένα σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στο πεδίο δυναμικής ενέργειας

$$U(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

(τροποποιημένος αρμονικός ταλαντωτής). Να βρεθεί το ενεργειακό του φάσμα.

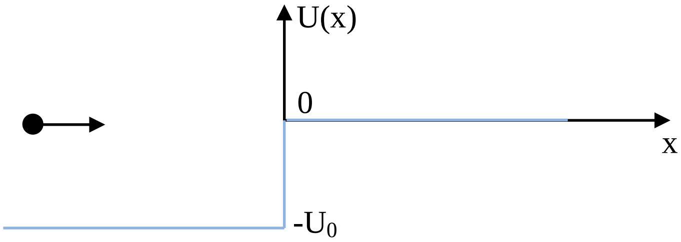
[Υπόδειξη: Τροποποιείστε κατάλληλα της έκφραση του U(x) σε $U(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]$, βγάζοντας αρχικά κοινό παράγοντα το α, και θέσατε στην πορεία $\xi=x+\frac{\beta}{2\alpha}$]

[Απ. $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\left(\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$, $n=0,1,2,3...$]

IV. Καταστάσεις σκέδασης και φαινόμενα σήραγγος.

Πρόβλημα 15. Σωμάτιο μάζας m κινείται έχοντας ενέργεια Ε στο πεδίο δυναμικής ενέργειας του σχήματος:

$$U(x)=\begin{cases}-U_0, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

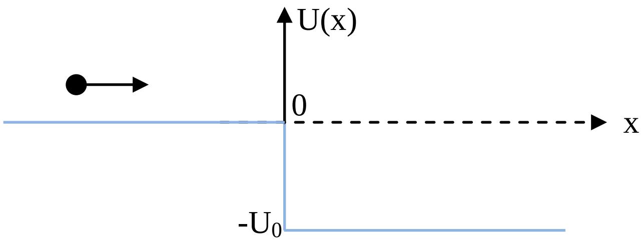


Να υπολογιστεί η πιθανότητα ανάκλασης και διέλευσής του από το σκαλοπάτι έάν:
(α) Ε > 0
(β) $-U_0 < E < 0$

[Απ. (α) $R=\frac{U_0^2}{\left(\sqrt{E+U_0}+\sqrt{E}\right)^4}$, $T=\frac{4\sqrt{E\left(E+U_0\right)}}{\left(\sqrt{E+U_0}+\sqrt{E}\right)^2}$ (β) $R=1,\ T=0$]

Πρόβλημα 16. Σωμάτιο μάζας m κινείται έχοντας ενέργεια Ε στο πεδίο δυναμικής ενέργειας του σχήματος:

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -U_0, & x>0\end{cases}$$



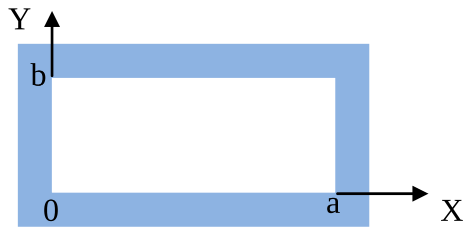
Να υπολογιστεί η πιθανότητα ανάκλασής του στο σκαλοπάτι. Αριθμητική εφαρμογή για E=4eV και U_0=5eV.

[Απ. $R=\frac{U_0^2}{\left(\sqrt{E+U_0}+\sqrt{E}\right)^4}=\frac{1}{25}$]

V. Διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα-εκφυλισμός.

Πρόβλημα 17. Σωματίδιο βρίσκεται σε τριδιάστατο απειρόβαθο κιβώτιο δυναμικής ενέργειας διαστάσεων L. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί σε μία μέτρηση της θέσης στο διάστημα $0 \le x,y,z \le L/4$ όταν βρίσκεται στη θεμελιώδη ενεργειακή του κατάσταση.
[Απ. 0,04=4%]

√**Πρόβλημα 18.** (α) Σωματίδιο βρίσκεται σε διδιάστατο απειρόβαθο παραλληλόγραμμο δυναμικής ενέργειας διαστάσεων a, b (a > b):

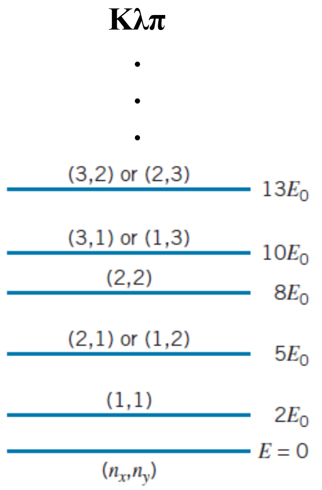


$$U(x,y)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 0\le y\le b\\ \infty, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

Να βρεθεί η μορφή των κυματοσυναρτήσεων που περιγράφουν την κατάστασή του καθώς και το ενεργειακό του φάσμα. [Υπόδειξη: Εφαρμόστε κατά γράμμα ότι κάναμε στο μάθημα στην περίπτωση του τριδιάστατου προβλήματος.]
(β) Θεωρείστε στη συνέχεια ότι a=b=L. Τι παρατηρείτε;
[Απ.(α)

$$E_{n_x n_y}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}\right),\quad \psi_{n_x n_y}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right),\; n_x \;\kappa\alpha\iota\; n_y=1,2,3...$$

(β) Εκφυλισμός



$$E_0=\frac{h^2}{8mL^2}$$

]

VI. Μονοηλεκτρονιακά Άτομα.

√**Πρόβλημα 19.** Για ένα άτομο υδρογόνου (Z=1) στη θεμελιώδη κατάσταση, να υπολογιστεί η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιό του σε απόσταση μεταξύ α_0 και $1{,}01\alpha_0$ από τον πυρήνα. α_0 είναι η ακτίνα Bohr που ισούται με 0,53Å. [Απ. 0,0054]
√**Πρόβλημα 20.** Για ένα άτομο υδρογόνου (Z=1) στη θεμελιώδη κατάσταση, να υπολογιστεί η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιό του στο εσωτερικό μίας σφαίρας με κέντρο τον πυρήνα και ακτίνα α_0. [Απ. 1/3]
Δίδεται το ολοκλήρωμα:

$$\int x^2 e^{ax}dx=\frac{x^2e^{ax}}{a}-\frac{2xe^{ax}}{a^2}+\frac{2e^{ax}}{a^3}$$

√**Πρόβλημα 21.** Για ένα άτομο υδρογόνου (Z=1) στην κατάσταση 1s, να υπολογιστεί η μέση δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου και να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του προτύπου του Bohr για n=1. [Υπόδειξη: Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι συνάρτηση μόνο της θέσης. Η μέση τιμή μίας τέτοιας συνάρτησης είναι γενικά $<f(r)>=\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)|\psi(r)|^2\,dr$. Στο μονοηλεκτρονιακό άτομο τα όρια ολοκλήρωσης είναι προφανώς από 0 έως ∞.]

√**Πρόβλημα 22.** (α) Ένα ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου βρίσκεται στην κατάσταση 5g και μεταβαίνει στη θεμελιώδη κατάσταση 1s εκπέμποντας φωτόνια μεταπηδώντας σε διάφορες στάθμες χαμηλότερης ενέργειας. Κάντε ένα διάγραμμα παρόμοιο με αυτό της σελίδας 27 της Ενότητας 6 του Οδηγού Μελέτης του μαθήματος που να δείχνει τις επιτρεπόμενες σειρές μεταβάσεων. (β)Επαναλάβατε εάν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κατάσταση 5d.

√**Πρόβλημα 23.** Οι Stern-Gerlach πραγματοποίησαν το πείραμα χρησιμοποιώντας άτομα αργύρου στη θεμελιώδη τους κατάσταση. Παρά το ότι ο άργυρος είναι πολυηλεκτρονιακό άτομο, η τιμή του ℓ στη θεμελιώδη του κατάσταση είναι μηδέν. Επομένως αναμένονταν ένα ίχνος. Αντ' αυτού παρατηρούνται δύο (Σχήμα). Τα δύο ίχνη είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα X και αναμένεται να απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=2Δz. (α) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την απόσταση μεταξύ των δύο ιχνών (έγινε στο μάθημα και περιέχεται στην Ενότητα 6 του Οδηγού Μελέτης). (β) Οι παράμετροι του πειράματος ήταν: dBz/dz = 1,4T/mm, x = 3,5 cm, v = 750 m/s. Η μάζα του ατόμου του αργύρου είναι : m_{Ag}= 1,8 × 10^{-25} kg. Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των δύο ιχνών.
[Απ. 0,16mm]