ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(Υποχρεωτικό 4ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος

Προβλήματα Σειρά # 4 : Η γέννεση της σύγχρονης Κβαντομηχανικής
Αντιστοιχεί στα

(α) Κεφάλαιο 4 του Krane
(β) Κεφάλαιο 4 των Serway /Moses/Moyer
(γ) Στην Ενότητα 4 του αναρτημένου στο e-class Οδηγού Μελέτης

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.
Η ένδειξη √ υποδηλώνει πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί σε πρώτη ανάγνωση.

Ι. Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός της ύλης (υπόθεση de Broglie και πειραματική της επαλήθευση)

√ **Πρόβλημα 1.** Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου που βρίσκεται στην πρώτη και τη δεύτερη τροχιά Bohr του ατόμου του υδρογόνου.
[Απ. λ_1= 3,32 Å, λ_2= 6,64 Å]
√ **Πρόβλημα 2.** Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie:
(α) Ενός σώματος μάζας 2gr που κινείται με ταχύτητα 500m/s.
(β) Ενός ελεύθερου πρωτονίου που κινείται με ταχύτητα 10^6 m/s. Σκεφτείτε πρώτα εάν είναι σχετικιστικό.
(γ) Ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου κινητικής ενέργειας K=50 eV. Σκεφτείτε πρώτα εάν είναι σχετικιστικό.
[Απ. λ= (α) 6,62x10^{-32} cm (β) $3,97\times10^{-13}$ m (γ) 0,173nm]
√ **Πρόβλημα 3.** (α) Ποια θα είναι η κινητική ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου με μήκος κύματος de Broglie 0,10 nm;
(β) Ποια θα είναι η κινητική ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου με μήκος κύματος de Broglie 10^{-14} m;
[Υπόδειξη: Υπολογίστε αρχικά την ποσότητα pc για να δείτε εάν είναι σχετικιστικό.]
[Απ. (α) 150eV (β) ~124 MeV]
√ **Πρόβλημα 4. Α.** Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_0 και φορτίου q επιταχύνεται από την ηρεμία μέσω διαφοράς δυναμικού ΔV μεταξύ δύο σημείων ενός ηλεκτρικού πεδίου. Εάν η κίνησή του είναι μη σχετικιστική να αποδειχθεί ότι το μήκος κύματος de Broglie του σωματιδίου δίνεται από την έκφραση:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 q\Delta V}}$$

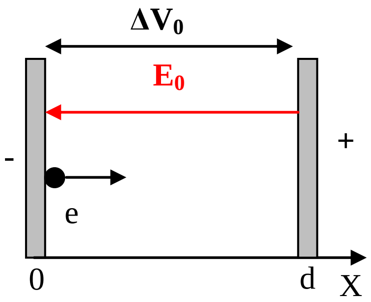
Β. Εάν η διαφορά δυναμικού είναι τόσο μεγάλη ώστε να οδηγήσει σε σχετικιστική κίνηση του σωματιδίου, να αποδειχθεί ότι τότε:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{q^2\Delta V^2 + 2m_0c^2 q\Delta V}}$$

Αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση, εάν το σωμάτιο είναι ηλεκτρόνιο, μεταπίπτει στην:

$$\lambda_e(\text{Å}) = \frac{12,4}{\sqrt{\Delta V}\sqrt{1+\dfrac{q_e\Delta V}{2m_{e0}c^2}}}$$

με $q_e\Delta V,\ m_{e0}c^2$ σε eV
και ΔV την αριθμητική τιμή της τάσης.



Γ. Ένα αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο π.χ ενός πυκνωτή εντάσεως E_0=100V/cm και απόστασης μεταξύ των οπλισμών του d=6cm. (α) Μέσω ποιάς διαφοράς δυναμικού ΔV μέσα στο πεδίο πρέπει να επιταχυνθεί το αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο ώστε το μήκος κύματος de Broglie του να είναι 1,2x10^{-10}m; Θεωρείστε ότι αυτό ξεκινά από τυχαία θέση μέσα στο πεδίο. Ελέγξτε πρώτα εάν κινείται σχετικιστικά. [Υπόδειξη: Υπολογίστε αρχικά την ποσότητα pc.]
(β) Θεωρείστε ότι το ηλεκτρόνιο ξεκινά από την ηρεμία στη θέση x=0. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie του στη θέση x=6cm. Ελέγξτε πρώτα εάν κινείται σχετικιστικά.
[Γενική Υπόδειξη: Προσπαθείστε να διευκολύνεστε δουλεύοντας σε eV. Π.χ η σχέση $p^2/2m$ γράφεται και $p^2c^2/2mc^2$]
[Απ. (α) pc~10KeV, ΔV~100V (β) pc=24,5KeV , λ=0,5 Å]

Πρόβλημα 5. Α. Να εξαχθεί η σχέση διασποράς ω(k) για ελεύθερο σχετικιστικό σωμάτιο μάζας ηρεμίας m_0 με βάση την αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού του de Broglie. Συγκεκριμένα αποδείξτε ότι:

$$\omega(k) = \sqrt{k^2c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2}}$$

[Υπόδειξη : Ακολουθείστε το σκεπτικό για το μη σχετικιστικό σωμάτιο που έγινε στο μάθημα λαμβάνοντας υπόψιν την ενέργεια σχετικιστικού σωματιδίου.]
Β. Να αποδειχθεί ότι η φασική ταχύτητα του υλικού κύματος κατά de Broglie που συνοδεύει ένα ελεύθερο σχετικιστικό σωμάτιο μάζας ηρεμίας m_0 δίδεται από την έκφραση:

$$\upsilon_p = c\sqrt{1+\left(\frac{m_0c}{\hbar k}\right)^2}$$

Γ. Θεωρείστε ένα σχετικιστικό κυματόδεμα που αναπαριστά ένα ελεύθερο σχετικιστικό σωμάτιο μάζας ηρεμίας m_0. Το κυματόδεμα έχει κεντρικό κυματαριθμό k_0. Να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα ομάδας του κυματοδέματος δίδεται από την έκφραση:

$$\upsilon_g = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{m_0c}{\hbar k_0}\right)^2}}$$

ΙΙ. Αρχή της αβεβαιότητας

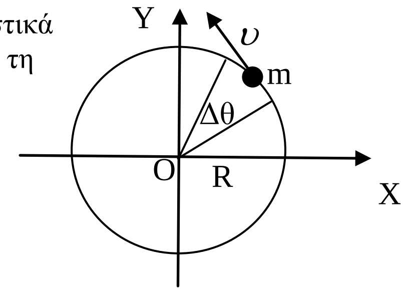
√ **Πρόβλημα 6.** Θεωρείστε ότι ένα σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα και ότι η ορμή του μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια 0,001%. Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης του:
(α) Εάν το σωματίδιο έχει μάζα 5x10^{-3} kgr και κινείται με ταχύτητα 2 m/s.
(β) Εάν το σωματίδιο είναι ηλεκτρόνιο και κινείται με ταχύτητα 2 x10^{8} m/s.
[Υπόδειξη: Σκεφτείτε ότι Δp/p=0,001. Στο (β) έχουμε σχετικιστικό σωμάτιο; Ποια είναι η μάζα κίνησής του;] [Απ. (α) Δx≥5,28x10^{-20} Å (β) Δx≥ 2,41Å]
√ **Πρόβλημα 7.** Το μήκος κύματος λ ενός φωτονίου είναι γνωστό με ακρίβεια Δλ.
(α) Να αποδείξετε ότι η αβεβαιότητα στην ορμή του δίδεται από την έκφραση:

$$\Delta p = \left|-\frac{h}{\lambda^2}\right|\Delta\lambda = p\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

(β) Εάν για ένα φωτόνιο το θεωρούμενο μήκος κύματός του λ=3000Å προσδιορίζεται με ακρίβεια 10^{-6} %, να υπολογιστεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης του.
[Υπόδειξη: ΔF(x)=[dF(x)/dx]Δx]

[Απ. Δx≥23,9mm]

√**Πρόβλημα 8.** Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται μη σχετικιστικά σε κύκλο ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου υ. Ξεκινώντας από τη σχέση αβεβαιότητας ορμής-θέσης να αποδείξετε τη σχέση αβεβαιότητας στροφορμής-γωνίας: $(\Delta L)(\Delta\theta) \geq \frac{\hbar}{2}$

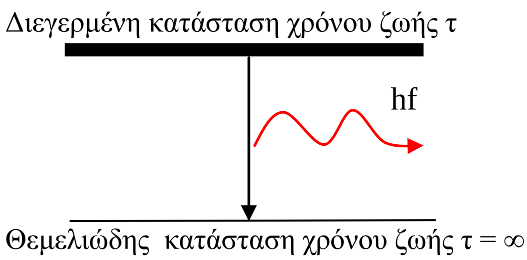


√ **Πρόβλημα 9.** Είναι γνωστό ότι κατά τη μετάβαση ενός ηλεκτρονίου από μία διεγερμένη κατάσταση στη θεμελιώδη ενός ατόμου εκπέμπεται ένα φωτόνιο μήκους κύματος λ. Εάν σε ένα άτομο ο χρόνος ζωής μίας διεγερμένης κατάστασης είναι Δt = τ, να αποδειχθεί ότι το εύρος της αντίστοιχης γραμμής του φάσματος εκπομπής Δλ δίδεται από τη σχέση:

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi c\tau}$$

Να γίνει αριθμητική εφαρμογή για λ=6000Å και τ=10^{-9} s.

[Απ. Δλ ≥ 955x10^{-6}Å]



√ •**Πρόβλημα 10.** Η ενέργεια ενός μονοδιάστατου μικροσκοπικού ταλαντωτή δίδεται από την γενική έκφραση:

$$E = \frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}Cx^2$$

(α) Κάνοντας χρήση της αρχής της αβεβαιότητας να αποδείξετε ότι:

$$E > \frac{h^2}{32\pi^2 m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}C(\Delta x)^2$$

(β) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα θέσης που αντιστοιχεί σε ελάχιστη ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ελάχιστη ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή δίδεται από την έκφραση:

$$E_{\min} = \frac{1}{2}hf, \;\; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{m}}$$

[Υπόδειξη: Σκεφτείτε ότι πρέπει $p_x > \Delta p_x$ και $x > \Delta x$ καθώς και ότι $(\Delta p_x)(\Delta x) \geq h/4\pi$]