

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

(Υποχρεωτικό 4^{ου} Εξαμήνου)

Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος

Προβλήματα Σειρά # 1 : Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός του φωτός Αντιστοιχεί στα

(α) Κεφάλαιο 3 του Krane [Ενότητες 3.1-3.4 και 3.6]

(β) Κεφάλαιο 2 των Serway /Moses/Moyer [Ενότητες 2.1-2.6]

(γ) Στην Ενότητα 1 του αναρτημένου στο e-class Οδηγού Μελέτης

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.

Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.

Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.

Η ένδειξη ✓ υποδηλώνει πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί σε πρώτη ανάγνωση.

I. Ακτινοβολία του Μέλανος Σώματος

✓**Πρόβλημα 1.** Ανάβουμε στο μέγιστο το μεγάλο μάτι της κουζίνας μας. Θεωρώντας ότι αυτό απαιτεί ισχύ λειτουργίας της τάξεως του 1kW, και ότι έχει ακτίνα $r \sim 10\text{cm}$, υπολογίστε τη θερμοκρασία του θεωρώντας το ως μέλαν σώμα. Δίδεται η σταθερά Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$. [Απ. 592 °C]

✓**Πρόβλημα 2.** Να αποδειχθεί ότι η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος του Planck μεταπίπτει στην αντίστοιχη των Rayleigh-Jeans (κλασική συμπεριφορά) για $T \rightarrow \infty$. Αναρωτηθείτε γιατί συμβαίνει αυτό. [Υπόδειξη: Πόση είναι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών ενός αρμονικού ταλαντωτή με βάση την ερμηνεία του Planck; Συγκρίνατέ την με την ποσότητα $k_B T$ που αποτελεί μέτρο της θερμικής ενέργειας καθώς $T \rightarrow \infty$.]

✓**Πρόβλημα 3. Α.** Η επιφάνεια του Ήλιου έχει θερμοκρασία περίπου 6000 K. Σε ποιο μήκος κύματος εκπέμπει ο Ήλιος την μέγιστη ένταση του; [Απ. 483nm]

Β. (α) Υποθέτοντας ότι ο Ήλιος ακτινοβολεί σαν ιδανικό μέλαν σώμα σε θερμοκρασία 6000 K, ποια είναι η ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας της ηλιακής ακτινοβολίας που εκπέμπεται στην περιοχή από 550,0 nm έως 552,0 nm; (β) Ποιο κλάσμα της συνολικής ηλιακής ακτινοβολίας αντιπροσωπεύει αυτή η τιμή; [Απ. (α) $1,9 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ (β) 0,26%]

✓**Πρόβλημα 4.** Για ένα μέλαν σώμα, η ακτινοβολούμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας είναι $1,440 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$ σε ένα εύρος 0,00833 cm γύρω από ένα μήκος κύματος 0,133 cm. Ποια είναι η θερμοκρασία του μέλανος αυτού σώματος; [Απ. 2,724 K]

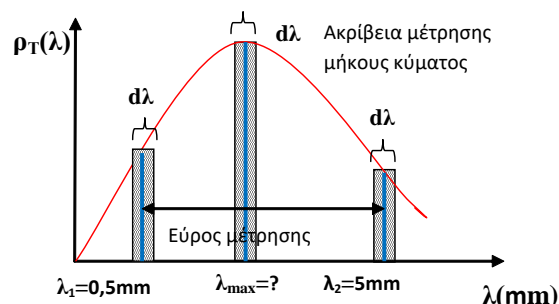
✓**Πρόβλημα 5.** Ένα μέλαν σώμα βρίσκεται σε θερμοκρασία 2,725K. Ένα όργανο μετρά την εκπεμπόμενη ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας της θερμικής ακτινοβολίας του σώματος σαρώνοντας τα μήκη κύματος από 0,5mm έως και 5 mm.

(α) Θα ανιχνεύσει το μήκος κύματος στο οποίο εκπέμπεται η μέγιστη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας της θερμικής ακτινοβολίας του σώματος;

(β) Εάν το όργανο έχει ένα συνολικό εύρος σφάλματος (συμπεριλαμβάνεται όλο το \pm) 3×10^{-4} mm στον προσδιορισμό του κάθε μήκους κύματος που μετρά, (i) πόση είναι η μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας που θα ανιχνεύσει πρακτικά; (ii) πόση είναι ελάχιστη εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας που θα ανιχνεύσει πρακτικά;

[Απ. (α) Ναι (β) (i) $5,79 \times 10^{-10} \text{ W/m}^2$ (ii) $1,91 \times 10^{-11} \text{ W/m}^2$]

[Υπόδειξη: Το διπλανό σχήμα απεικονίζει την διαδικασία της μέτρησης στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Το ελάχιστο θα είναι σε ένα από τα δύο ακραία μήκη κύματος. Σε ποιο; Κάντε τον σχετικό υπολογισμό και στα δύο!]



✓ **Πρόβλημα 6. Α.** Ξεκινώντας από την έκφραση του Planck για την φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας συναρτήσει του μήκους κύματος ενός μέλανος σώματος $\rho(\lambda, T)$, να εξαγάγετε την έκφραση που δίνει τις μεταβολές της $\Delta\rho_\lambda(T)$ για μεταβολές της θερμοκρασίας ΔT σε δεδομένο μήκος κύματος.

[Υπόδειξη: $\Delta\rho_\lambda(T) = \frac{d\rho_\lambda(T)}{dT} \Delta T$] [Απ. $\Delta\rho_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{e^{hc/\lambda k_B T}}{(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^2} \frac{hc}{\lambda k_B T^2} \Delta T$]

Β. Εφαρμογή στην ανίχνευση της ακτινοβολίας υποβάθρου. Η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου που ανιχνεύεται στο Σύμπαν ακολουθεί φασματική κατανομή μέλανος σώματος σε θερμοκρασία 2,725 K (!!!) και θεωρείται ότι αποτελεί κατάλοιπο της «μεγάλης έκρηξης» που το δημιούργησε αντιστοιχίζόμενη στην συνεχή ψύξη του. Βρίσκεται δε στην μικροκυματική περιοχή του Η/Μ φάσματος. Ακριβείς μετρήσεις που έγιναν από τον δορυφόρο WMAP που εκτοξεύτηκε το 2001 διέγνωσαν μικρές θερμοκρασιακές διακυμάνσεις της τάξεως των $2 \times 10^{-5} K$ περί την γενικά αποδεκτή θερμοκρασία των 2,725K. Αυτές αποδόθηκαν στην ύπαρξη περιοχών του πρώιμου σύμπαντος με διαφορετικές πυκνότητες. Ποια είναι η διαφορά στη φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας, γύρω από το μέγιστό της, μεταξύ των «θερμών» και «ψυχρών» περιοχών της ακτινοβολίας υποβάθρου;

[Απ. $7,1 \times 10^{-8} W/m^3$]

✓ **Πρόβλημα 7.** Να αποδειχθεί ότι η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος του Planck ικανοποιεί τον νόμο των Stefan-Boltzmann. Θεωρήστε γνωστό το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Από εδώ αναδεικνύεται και η εξάρτηση της σταθεράς Stefan-Boltzmann από τις θεμελιώδεις σταθερές h και c :

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3}$$

Επαληθεύσατε την τιμή της.

• **Πρόβλημα 8.** Να υπολογιστεί η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος του οποίου η φασματική κατανομή της αφετικής του ικανότητας σε μήκος κύματος 200nm είναι 3,82 φορές την αντίστοιχη στα 400nm. [Απ. 18.000,00 K]

[Υπόδειξη: Θα πρέπει να καταλήξετε στην έκφραση $\frac{e^{\frac{35987}{T}} - 1}{e^{\frac{71974}{T}} - 1} = (3,82)(0,5)^5 = 0,1194$.

Θέσατε $e^{\frac{35987}{T}} = x$. Θα πρέπει να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-1}{x^2-1} = 0,1194$ και από εκεί να βρείτε το T .]

✓ **Πρόβλημα 9.** (α) Ακολουθώντας τη μέθοδο του Παραδείγματος 6 που λύθηκε στο μάθημα, να αποδείξετε ότι η φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος $\rho_T(f)$ εμφανίζει μέγιστο σε δεδομένη θερμοκρασία που ικανοποιεί τη σχέση

$$f_{max}/T = \text{σταθερά}$$

Τι εκφράζει το αποτέλεσμα;

[Υπόδειξη: Θα πρέπει να καταλήξετε στην εξίσωση $3(e^x - 1) - xe^x = 0$ που έχει γραφική λύση την $x_0 \sim 2,82$]

(β) Συγκρίνατε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 6 (Νόμος Μετατοπίσεως του Wien ως προς το μήκος κύματος) με αυτό του ερωτήματος (α) (Νόμος Μετατοπίσεως του Wien ως προς τη συχνότητα). Μπορούμε να πάμε από το πρώτο στο δεύτερο θεωρώντας ότι $\lambda_{max} f_{max} = c$;

• **Πρόβλημα 10.** Κατά την ανάλυση της έκφρασης του Planck για τη φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος εμφανίζεται ο όρος:

$$\zeta = e^{-\frac{hf}{k_B T}} + e^{-\frac{2hf}{k_B T}} + e^{-\frac{3hf}{k_B T}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nhf}{k_B T}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta hf}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Να αποδείξετε ότι όντως

$$-\frac{1}{\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \right) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

θεωρώντας γνωστό το ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-na} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a})^n = \frac{1}{1-e^{-a}} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-na} = \frac{e^{-a}}{(1-e^{-a})^2}$$

II. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

✓ **Πρόβλημα 11.** Θεωρείστε τα μέταλλα λίθιο (Li), βηρύλλιο (Be) και υδράργυρο (Hg), που έχουν έργα εξόδου 2,3 eV, 3,9 eV, και 4,5 eV αντίστοιχα. Αν ακτινοβολία μήκους κύματος 300 nm προσπέσει σε καθένα από αυτά τα μέταλλα προσδιορίστε (α) ποια θα εμφανίσουν φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και (β) τη μέγιστη κινητική ενέργεια (σε eV) των εκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων.

[Απ. (α) Δύο από αυτά (β) 1,83eV και 0,23 eV]

✓ **Πρόβλημα 12.** Φως μήκους κύματος 500 nm προσπίπτει σε μεταλλική επιφάνεια. Εάν η διαφορά δυναμικού αποκοπής για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι 0,45 V, βρείτε: (α) τη μέγιστη ενέργεια των εκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων (β) το έργο εξόδου του μετάλλου και (γ) το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα αποκοπής για το φαινόμενο στο συγκεκριμένο μέταλλο.

[Απ. (α) 0,45eV (β) 2,03 eV (γ) 612 nm]

✓ **Πρόβλημα 13.** Μια φωτεινή πηγή μήκους κύματος λ φωτίζει ένα μέταλλο που εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια με μέγιστη κινητική ενέργεια 1,00 eV. Μια δεύτερη πηγή μήκους κύματος λ/2 οδηγεί σε εκπομπή φωτοηλεκτρονίων από το ίδιο μέταλλο με μέγιστη κινητική ενέργεια 4,00 eV. Ποιο είναι το έργο εξόδου του μετάλλου;

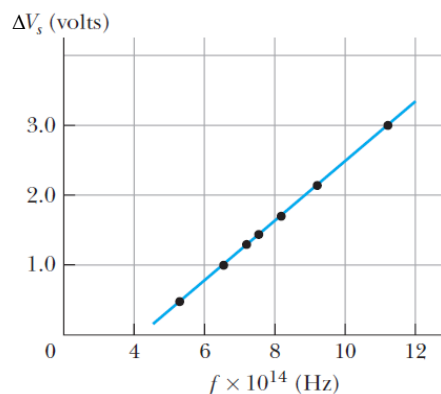
[Απ. 2eV]

✓ **Πρόβλημα 14.** Όταν το μεταλλικό νάτριο φωτίζεται με φως μήκους κύματος $4,20 \times 10^2$ nm, η διαφορά δυναμικού αποκοπής του φωτοηλεκτρικού φαινομένου βρίσκεται 0,65 V. Όταν το μήκος κύματος αλλάζει σε $3,10 \times 10^2$ nm, βρίσκεται ίση προς 1,69 V. Χρησιμοποιώντας μόνο αυτά τα δεδομένα και τις τιμές της ταχύτητας του φωτός και του ηλεκτρονιακού φορτίου, βρείτε (α) μια τιμή για τη σταθερά του Planck και (β) το έργο εξόδου του νατρίου.

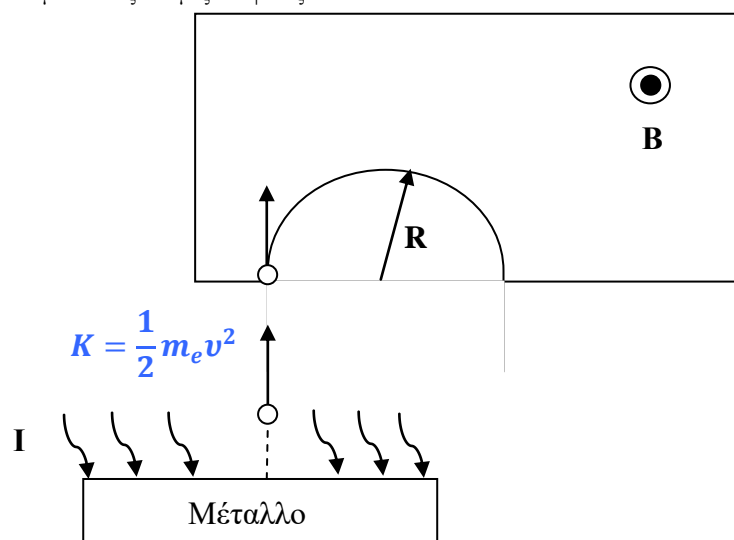
[Απ. (α) $4,10 \times 10^{-15}$ eV/s, (β) 2,28eV]

Πρόβλημα 15. Το σχήμα δείχνει τη διαφορά δυναμικού αποκοπής συναρτήσει της συχνότητας των προσπίπτοντων φωτονίων για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο στο νάτριο. Χρησιμοποιήστε αυτά τα δεδομένα για να βρείτε (α) το έργο εξόδου του μετάλλου (β) τον λόγο h/q_e . Βρείτε την επι τοις εκατό διαφορά του υπολογισμού σας από την γενικώς αποδεκτή τιμή. (γ) το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα αποκοπής του φαινομένου. (Δεδομένα από την πρωτότυπη εργασία του R. A. Millikan, Phys. Rev. 7: 362, 1916.)

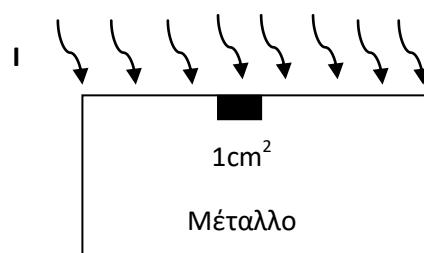
[Απ. (α) 1,6eV (β) 4×10^{-15} Vs, 3% (γ) 775 nm]



✓ **Πρόβλημα 16.** Φωτόνια μήκους κύματος 450 nm προσπίπτουν σε μέταλλο. Τα πιο ενεργητικά ηλεκτρόνια που εκτοξεύονται από το μέταλλο εισέρχονται στο χώρο ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής $2,0 \times 10^{-5}$ T σε διεύθυνση κάθετη προς τις δυναμικές γραμμές του. Εκεί κάμπτονται σε ένα κυκλικό τόξο ακτίνας 20 cm. Ποιο είναι το έργο εξόδου του μετάλλου; [Απ. 1,35eV]



✓**Πρόβλημα 17.** Υπεριώδες φως προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια ενός μετάλλου με έργο εξόδου 3,44eV. Το προσπίπτον φως έχει ένταση $I=0,055 \text{ W/m}^2$. Τα εκπεμπόμενα φωτοηλεκτρόνια έχουν μέγιστη ταχύτητα $v_{\max}=4,2 \times 10^5 \text{ m/s}$. Ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων από ένα τετραγωνικό εκατοστό της επιφάνειας του μετάλλου ανά δευτερόλεπτο;



[Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα την ενέργεια που απαιτείται να έχει ένα φωτόνιο για να εξάγει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο. Πρέπει να βρείτε $6,3 \times 10^{-19} \text{ J}$
 [Απ. $8,73 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$]

III. Φωτόνια

✓**Πρόβλημα 18.** Υπολογίστε την ενέργεια σε eV και το μήκος κύματος σε m ενός φωτονίου που έχει συχνότητα (α) $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, (β) 10 GHz, (γ) 30 MHz. Σε ποια περιοχή του φάσματος ανήκουν οι παραπάνω συχνότητες; Σε ποια περιοχή θα δεχόσασταν πιο εύκολα ένα φωτόνιο ως σωματίδιο;

[Απ. (α) 2,07eV, 600nm (β) $4,14 \times 10^{-5} \text{ eV}$ 0,03m (γ) $1,24 \times 10^{-7} \text{ eV}$, 10m]

Πρόβλημα 19. (α) Ένας ραδιοφωνικός σταθμός FM έχει ισχύ εξόδου 100kW και λειτουργεί σε συχνότητα εκπομπής 94 MHz. Πόσα φωτόνια ανά δευτερόλεπτο εκπέμπει ο πομπός; (β) Επαναλάβετε τον υπολογισμό για μια τυπική πηγή ακτίνων X (συσκευή XRD) με ισχύ εξόδου 40kW που εκπέμπει ακτινοβολία συχνότητας $3 \times 10^{20} \text{ Hz}$.

Φανταστείτε ότι ένας ανιχνευτής μπορεί να ανιχνεύσει και τις δύο ακτινοβολίες. Πως θα φαινόταν η λαμβανόμενη ακτινοβολία στην πρώτη περίπτωση (θα μπορούσε να ανιχνεύσει ως διακριτά σωματίδια τέτοιο πλήθος φωτονίων;) και πως στη δεύτερη; Μήπως το πλήθος των εκπεμπόμενων φωτονίων καθορίζει την κυματική-σωματιδιακή φύση της Η/Μ ακτινοβολίας; Συνδυάστε της σκέψεις σας με αυτές του προηγούμενου προβλήματος....

[Απ. (α) $1,6 \times 10^{30}$ φωτόνια/s (β) 2×10^{17} φωτόνια/s]

✓**Πρόβλημα 20.** Ένας πράσινος λαμπτήρας εκπέμπει σε ένα μόνο μήκος κύματος 550nm. Καταναλώνει δε 55W ηλεκτρικής ισχύος και είναι 75% αποδοτικός στη μετατροπή της ηλεκτρικής ενέργειας σε φως. (α) Πόσα φωτόνια εκπέμπει ο λαμπτήρας σε μία ώρα; (β) Υποθέτοντας ότι τα εκπεμπόμενα φωτόνια κατανέμονται ομοιόμορφα στο χώρο, πόσα

φωτόνια ανά sec προσπίπτουν σε ένα φύλλο χαρτί $10 \times 10 \text{ cm}^2$ τοποθετημένο σε απόσταση 10m από τον λαμπτήρα;

[Απ. (α) $1,14 \times 10^{20}$ φωτόνια/sec (β) 9×10^{16} φωτόνια/sec]

✓•**Πρόβλημα 21.** Θεωρείστε ότι ένας αστέρας είναι τόσο βαρύς (μεγάλος λόγος $M_S/R_S \gg \gg 1$) που ακόμη και σε άπειρη απόσταση από αυτόν το απομακρυνόμενο φωτόνιο υφίσταται την βαρυτική του έλξη. Αποδείξτε τότε ότι η συχνότητά του f' στο ∞ συνδέεται με αυτή στην επιφάνεια του αστέρα f με τη σχέση:

$$f' = f e^{-\frac{GM_S}{R_S c^2}}$$

Που μεταπίπτει η παραπάνω σχέση για $M_S/R_S \ll \ll 1$;

[Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι η μείωση της ενέργειας $-hdf$ του απομακρυνόμενου κατά dr από την επιφάνεια του αστέρα φωτονίου, ισούται με το απαιτούμενο έργο για την υπερνίκηση της βαρυτικής έλξης $F_G dr$.]

IV. Φαινόμενο Compton

Στα παρακάτω προβλήματα ανατρέξτε στο σχήμα που επεδείχθη στο μάθημα.

✓•**Πρόβλημα 22.** (α) Να αποδείξετε ότι κατά τη σκέδαση Compton φωτονίου από ακίνητο πρακτικά ηλεκτρόνιο, οι γωνίες σκέδασης των δύο σωματιδίων συνδέονται με τη σχέση:

$$\tan \varphi = \frac{f' \sin \theta}{f - f' \cos \theta} = \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda' - \lambda \cos \theta}$$

(β) Σε μία σκέδαση Compton ένα φωτόνιο ακτίνων X μήκους κύματος $\lambda = 0,500 \text{ nm}$ σκεδάζεται σε γωνία 134° ως προς τη διεύθυνση πρόσπτωσης του σε ακίνητο ηλεκτρόνιο. Σε ποια γωνία (ως προς τη διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτονίου ανακρούεται και ανιχνεύεται το ηλεκτρόνιο;

[Απ. (β) $\varphi = 22,9^\circ$]

✓•**Πρόβλημα 23.** Ένα φωτόνιο αρχικής ενέργειας $0,1 \text{ MeV}$ σκεδάζεται σε σκέδαση Compton σε γωνία 60° . Να υπολογιστούν:

(α) Η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου.

(β) Η κινητική ενέργεια ανάκρουσης του ηλεκτρονίου.

(γ) Η γωνία ανάκρουσης του ηλεκτρονίου.

[Απ. (α) $9,11 \times 10^4 \text{ eV}$ (β) $8,9 \text{ KeV}$ (γ) Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου Προβλήματος 22: $55,4^\circ$]

•**Πρόβλημα 24.** Σε ένα πείραμα Compton τα προσπίπτοντα φωτόνια έχουν μήκος κύματος:

$$\lambda = \frac{\lambda_C}{2}$$

και κάποια από αυτά ανιχνεύονται από έναν μετρητή που έχει τοποθετηθεί σε γωνία 60° ως προς την διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης. Να υπολογιστούν:

(α) Το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου καθώς και η ορμή και η ενέργειά του.

(β) Η ορμή, η ενέργεια και η γωνία σκέδασης του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου.

Τα αποτελέσματα να εκφραστούν συναρτήσει της μάζας ηρεμίας του ηλεκτρονίου m_{0e} και της ταχύτητας του φωτός c .

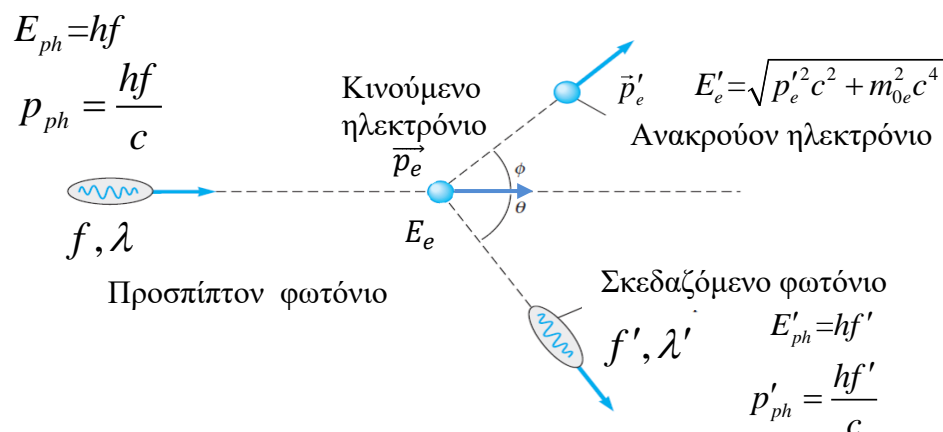
[Απ. (α) $\lambda' = \lambda_c$, $p_{ph}' = m_{0e}c$, $E_{ph}' = m_{0e}c^2$ (β) $E_e' = 2m_{0e}c^2$, $p_e' = (3)^{1/2} m_{0e}c$, $\varphi = 30^\circ$]

•• **Πρόβλημα 25. [Προαιρετικό (Μόνο για εθελοντές)].** Ας θεωρήσουμε ξανά την σκέδαση Compton, αλλά αυτή τη φορά με το ηλεκτρόνιο να μην θεωρείται τελείως ακίνητο, αλλά να έχει ορμή μέτρου p_e κινούμενο στην ίδια κατεύθυνση με αυτή του προσπίπτοντος φωτονίου (κατά τη θετική φορά του άξονα X).

(α) Γράψτε εκ νέου τις εξισώσεις για την διατήρηση ενέργειας και ορμής σ' αυτή την περίπτωση.

(β) Αποδείξτε ότι η έκφραση της αλλαγής του μήκους κύματος του φωτονίου θα είναι τώρα:

$$\Delta\lambda = \frac{h + \lambda p_e}{\sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2} - p_e} (1 - \cos\theta)$$



[Υπόδειξη: Έστω $p_e \neq 0$ η ορμή του ηλεκτρονίου πριν την κρούση. Τότε:

(i) Αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\frac{hf}{c} + p_e = \frac{hf'}{c} \cos\theta + p'_e \cos\phi \quad (\text{Άξονας X})$$

$$\frac{hf'}{c} \sin\theta = p'_e \sin\phi \quad (\text{Άξονας Y})$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$p_e'^2 = \left(\frac{hf}{c} - \frac{hf'}{c} \cos\theta + p_e \right)^2 + \left(\frac{hf'}{c} \sin\theta \right)^2$$

(ii) Αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$hf + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = hf' + \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4} \rightarrow$$

$$p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4 = (hf - hf' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4})^2 \rightarrow$$

$$\left(\left(\frac{hf}{c} - \frac{hf'}{c} \cos\theta + p_e \right)^2 + \left(\frac{hf'}{c} \sin\theta \right)^2 \right) c^2 = (hf - hf' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4})^2 - m_e^2 c^4$$

Κλπ.....]