Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 22: Κυματοπακέτα-Κυματοδηγοί

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσει την έννοια του κυματοπακέτου, που αποτελεί την γενική λύση της κυματικής εξίσωσης. Στην συνέχεια, εξάγονται οι σχέσεις Kramers-Kronig, οι οποίες αποτελούν εκφράσεις του πραγματικού και φανταστικού μέρους της διηλεκτρικής σταθεράς. Τέλος, μελετώνται οι κυματοδηγοί, που είναι ουσιαστικά «ειδικές» κατασκευές από κατάλληλα τοποθετημένα υλικά στα οποία το κύμα διαδίδεται κατά μήκος δεδομένου άξονα.

Περιεχόμενα ενότητας

- Κυματοπακέτα
- Σχέσεις Kramers-Kronig
- Κυματοδηγοί

Κυματοπακέτα-Εισαγωγή

- Η έννοια του κυματοπακέτου είναι συνυφασμένη με ένα εύρος συχνοτήτων (και όχι μόνο με μία συχνότητα).
- Όταν έχουμε υλικό του οποίου η διηλεκτρική σταθερά εξαρτάται από την συχνότητα, οι διαφορετικές συνιστώσες του κυματοπακέτου αλληλεπιδρούν με διαφορετικό τρόπο με το υλικό.
- Για απλότητα, θα μελετήσουμε την συμπεριφορά μίας συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου, έστω $u(x,t)$, έτσι ώστε $E_x(x,t) = u(x,t)$.

Κυματοπακέτα-Μελέτη

- Η λύση της κυματικής εξίσωσης είναι(όπως έχουμε αναφέρει) $u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, όπου $k = \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\omega}{c}$, με $\mu = \mu(\omega), \varepsilon = \varepsilon(\omega)$.
- Η γενική λύση είναι μια επαλληλία όλων των δυνατών λύσεων: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)} dk$.
- Αυτή η έκφραση ουσιαστικά είναι μετασχηματισμός Fourier και για να βρούμε τα πλάτη $A(k)$ βασιζόμαστε στην αντίστοιχη θεωρία.
- Έστω ότι γνωρίζουμε το κυματοπακέτο την $t = 0$. Θα έχουμε δηλαδή, $u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{ikx} dk$.
- Τότε $A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-ikx}\, dx$.

Ομαδική και φασική ταχύτητα

- Φασική ταχύτητα είναι η ταχύτητα μίας συνιστώσας που χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένο κυματάριθμο.
- Ομαδική ταχύτητα είναι η ταχύτητα με την οποία οδεύει το κυματοπακέτο ως μια ολότητα.
- Αν η απόκριση του υλικού με την συχνότητα είναι σχετικά μικρή, τότε μπορούμε να αναπτύξουμε την συχνότητα σε σειρά Taylor και να κρατήσουμε τους πρώτους όρους:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + (k-k_0)\left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k=k_0}.$$

- Αντικαθιστούμε αυτήν την έκφραση στην γενική λύση και έχουμε:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i\left(kx-\omega(k_0)t-(k-k_0)\left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k=k_0}t\right)}\,dk =$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{it\left(-\omega(k_0)+k_0\left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k=k_0}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{ik\left(x-\left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k=k_0}t\right)} dk$$

Λίγες παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε ότι ουσιαστικά το ολοκλήρωμα είναι η αρχική κυματομορφή μετατοπισμένη κατά $\left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k=k_0}$.
- Άρα γενικά η κυματομορφή μένει η ίδια (εκτός από τον παράγοντα φάσης έξω από το ολοκλήρωμα) και οδεύει με την ταχύτητα ομάδας $v_g = \left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k=k_0}$.
- Επίσης $v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}, k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$. Άρα $v_g = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}}$.

Σχέσεις Kramers-Kronig (Διαδικασία εξαγωγής (Ι)

- Ξεκινάμε από την σχέση:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega)=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega)$$

- Πραγματοποιούμε μετασχηματισμό Fourier και έχουμε:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega)\ e^{-i\omega t}d\omega.$$

- Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Fourier και στο πεδίο $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t')e^{i\omega t'}\,dt'e^{-i\omega t}\,d\omega\Rightarrow$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\varepsilon(\omega)e^{i\omega(t'-t)}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t')$$

- Προσθέτουμε και αφαιρούμε το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\varepsilon(\omega)e^{i\omega(t'-t)}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t')$$

Σχέσεις Kramers-Kronig (Διαδικασία εξαγωγής (II)

- Συνεχίζουμε τις πράξεις και έχουμε:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t'-t)}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t')$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \varepsilon(\omega) e^{i\omega(t'-t)}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t') \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, [\varepsilon(\omega) - 1] e^{i\omega(t'-t)}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t')$$

- Πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας

$t' \to t - \tau$:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t-\tau)(\varepsilon(\omega) - 1)$$

Σχέσεις Kramers-Kronig (Διαδικασία εξαγωγής (III))

- Θέτουμε $G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau}[\varepsilon(\omega) - 1]$. Επομένως

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t - \tau) d\tau$$

- Μόνο τα πεδία μιας προηγούμενης χρονικής στιγμής τ μπορούν να επηρεάσουν τα πεδία μιας μεταγενέστερης t (αιτιότητα). Για τον λόγο αυτό, μπορούμε να θέσουμε το κάτω άκρο του ολοκληρώματος με την τιμή μηδέν.

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \int_{0}^{\infty} G(\tau) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t - \tau) d\tau\ .$$

- Η $G(\tau)$ είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Fourier της επιδεκτικότητας. Θα ισχύει ότι

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_{0}^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau}\, d\tau'$$

Θεώρημα Cauchy

- Η διηλεκτρική σταθερά είναι μια αναλυτική συνάρτηση και έστω ότι η συχνότητα ω είναι κάποιος μιγαδικός αριθμός.
- Το θεώρημα Cauchy διατυπώνεται μαθηματικά ως

$$\oint \frac{f(\omega')}{\omega' - z} d\omega' = 2\pi i f(z).$$

- Στην δική μας περίπτωση $f(\omega') = \varepsilon(\omega') - 1$.
- Επομένως $\oint \frac{\varepsilon(\omega')-1}{\omega'-z} d\omega' = 2\pi i(\varepsilon(z) - 1) \Rightarrow$

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - z} d\omega'$$

Τελικές σχέσεις

- Θέτουμε $z = \omega + i\delta$. Θεωρούμε $\delta \longrightarrow 0$. Η καμπύλη C (πάνω στην οποία υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα) επιλέγεται να περιέχει τον άξονα των πραγματικών ω και ένα ημικύκλιο στο άνω ημισφαίριο, που τερματίζει στα άπειρα.
- Έτσι καταλήγουμε ότι

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi i} P \oint \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

- Ο τελεστής P σημαίνει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε όλα τα σημεία εκτός από τους πόλους.
- Αν διαχωρίσουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος παίρνουμε τις σχέσεις Kramers-Kronig:

$$Re\big(\varepsilon(\omega)\big) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im(\varepsilon(\omega'))}{\omega' - \omega} d\omega',$$

$$Im\big(\varepsilon(\omega)\big) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re\big(\varepsilon(\omega')\big) - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Κυματοδηγοί-Εξισώσεις Maxwell

- Θα μελετήσουμε την διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μεταλλικούς κυλίνδρους. Αν αυτοί έχουν πεπερασμένη επιφάνεια, τότε κάνουμε λόγο για κοιλότητες, διαφορετικά για κυματοδηγούς.
- Αν τα πεδία έχουν αρμονική χρονική εξάρτηση, (δηλαδή της μορφής $e^{i\omega t}$), οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν την μορφή:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}\ (\mathbf{1}), \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \nabla \times \boldsymbol{B} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\boldsymbol{E}(\mathbf{2})$$

- Τα πεδία $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$,με βάση τα παραπάνω, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\left(\nabla^2 + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = 0$$

Γενικές εκφράσεις των πεδίων

- Γράφουμε τις γενικές λύσεις ως
$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y)e^{\pm ik_z z}e^{-i\omega t},$$
$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = \boldsymbol{B}(x,y)e^{\pm ik_z z}e^{-i\omega t}$$
- Αυτές οι λύσεις αναπαριστούν κύματα που ταξιδεύουν κατά μήκος του άξονα του κυματοδηγού (δηλαδή τον z).
- Αναλύουμε τώρα τα πεδία σε συνιστώσες κάθετες στον άξονα του κυματοδηγού(δείκτης t) και συνιστώσες παράλληλες στον άξονα (δείκτης z).
- Άρα μπορούμε να γράψουμε
$$\nabla = \nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t + ik_z\hat{z},$$
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_z + \boldsymbol{E}_t = \begin{cases} \boldsymbol{E}_z = \hat{z}E_z \\ \boldsymbol{E}_t = (\hat{z}\times\boldsymbol{E})\times\hat{z} \end{cases},$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_z + \boldsymbol{B}_t = \begin{cases} \boldsymbol{B}_z = \hat{z}B_z \\ \boldsymbol{B}_t = (\hat{z}\times\boldsymbol{B})\times\hat{z} \end{cases}$$

Υπολογισμοί

- **Σημείωση**: Η σχέση $\nabla = \nabla_t + ik_z\hat{z}$ ισχύει γιατί γνωρίζουμε την εξάρτηση των πεδίων από την συνιστώσα z και τον χρόνο, δηλαδή:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} = ik_z\boldsymbol{E}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{E}$$

- Ομοίως και για το πεδίο $\boldsymbol{B}$.
- Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$(\nabla_t + \hat{z}ik_z) \times (\hat{z}E_z + \boldsymbol{E}_t) = \frac{i\omega}{c}(\hat{z}B_z + \boldsymbol{B}_t)$$

$$(\nabla_t + \hat{z}ik_z) \times (\hat{z}B_z + \boldsymbol{B}_t) = -\frac{i\mu\varepsilon\omega}{c}(\hat{z}E_z + \boldsymbol{E}_t)$$

- Οι κάθετες συνιστώσες είναι λοιπόν

$$(\nabla_t E_z \times \hat{z}) + ik_z(\hat{z} \times \boldsymbol{E}_t) = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}_t \quad (3)$$

$$(\nabla_t B_z \times \hat{z}) + ik_z(\hat{z} \times \boldsymbol{B}_t) = -\frac{i\mu\varepsilon\omega}{c}\boldsymbol{E}_t \quad (4)$$

Συνέχεια υπολογισμών

- Από την (3) έχουμε:

$$\boldsymbol{B}_t = \frac{c}{i\omega}[(\nabla_t E_z \times \hat{z}) + ik_z(\hat{z} \times \boldsymbol{E}_t)].$$

- Αντικαθιστούμε αυτήν την έκφραση στην (4):

$$(\nabla_t B_z \times \hat{z}) + k_z \frac{c}{\omega}(\hat{z} \times [(\nabla_t E_z \times \hat{z}) + ik_z(\hat{z} \times \boldsymbol{E}_t)])$$

$$= -\frac{i\mu\varepsilon\omega}{c}\boldsymbol{E}_t \Rightarrow$$

$$(\nabla_t B_z \times \hat{z}) + k_z \frac{c}{\omega}\nabla_t E_z + ic\frac{{k_z}^2}{\omega}\boldsymbol{E}_t = -\frac{i\mu\varepsilon\omega}{c}\boldsymbol{E}_t \Rightarrow$$

$$\omega c(\nabla_t B_z \times \hat{z}) + k_z c^2 \nabla_t E_z - ic^2 {k_z}^2 \boldsymbol{E}_t = -i\mu\varepsilon\omega^2 \boldsymbol{E}_t \Rightarrow$$

$$\omega c(\nabla_t B_z \times \hat{z}) + k_z c^2 \nabla_t E_z = -i(\mu\varepsilon\omega^2 - c^2 {k_z}^2)\boldsymbol{E}_t$$

Τελικές εκφράσεις

- Λύνοντας την τελευταία έκφραση ως προς $\boldsymbol{E}_t$ έχουμε

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{i}{\left(\mu\varepsilon\omega^2 - c^2{k_z}^2\right)}\left[\omega c(\nabla_t B_z \times \hat{z}) + k_z c^2 \nabla_t E_z\right]$$

- Αντικαθιστώντας αυτήν την έκφραση στην (3) προσδιορίζουμε το $\boldsymbol{B}_t$.
- Θα είναι

$$\mathbf{B}_t = \frac{i}{\left(\mu\varepsilon\omega^2 - c^2{k_z}^2\right)}\left[-\mu\varepsilon\omega c(\nabla_t \mathrm{E}_z \times \hat{z}) + k_z c^2 \nabla_t \mathrm{B}_z\right].$$

- Αυτές αποτελούν τις εξισώσεις των κυματοδηγών.

TE και TM modes

- Μπορούμε να διαχωρίσουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

1. Την περίπτωση όπου $\mathrm{E}_z = 0$, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι αποκλειστικά εγκάρσιο (“Transverse Electric” ή “TE” mode). Τότε οι εξισώσεις των κυματοδηγών παίρνουν την μορφή

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{i}{\left(\mu\varepsilon\omega^2 - c^2 {k_z}^2\right)}\left[\omega c(\nabla_t B_z \times \hat{z})\right], \mathbf{B}_t = \frac{i k_z c^2 \nabla_t \mathrm{B}_z}{\left(\mu\varepsilon\omega^2 - c^2 {k_z}^2\right)}.$$

2. Την περίπτωση όπου $\mathrm{B}_z = 0$, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο είναι αποκλειστικά εγκάρσιο (“Transverse Magnetic” ή “TM” mode). Τότε οι εξισώσεις των κυματοδηγών παίρνουν την μορφή

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{i k_z c^2 \nabla_t E_z}{\left(\mu\varepsilon\omega^2 - c^2 {k_z}^2\right)}, \mathbf{B}_t = \frac{i}{\left(\mu\varepsilon\omega^2 - c^2 {k_z}^2\right)}\left[-\mu\varepsilon\omega c(\nabla_t \mathrm{E}_z \times \hat{z})\right].$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Κυματοπακέτα-Κυματοδηγοί». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης