



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 21: Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

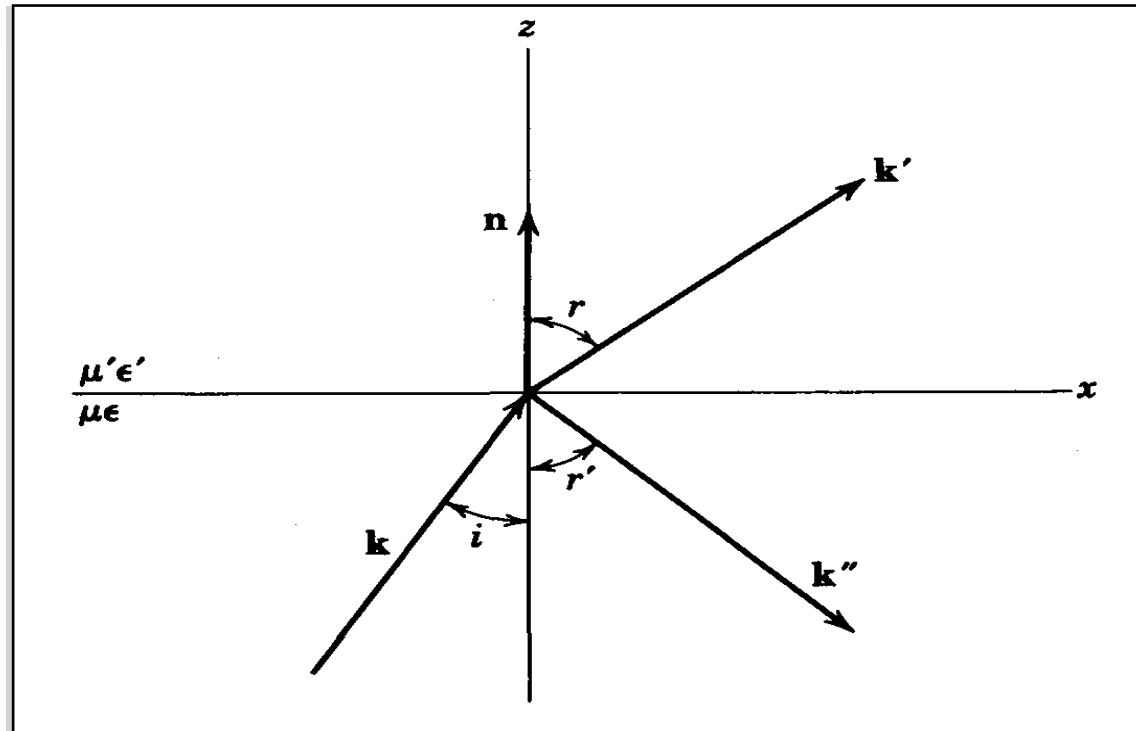
Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να συνεχίσει την μελέτη που αφορά την ανάκλαση και διάθλαση κυμάτων σε συνοριακή επιφάνεια, καθώς και να παρουσιάσει ένα μοριακό μοντέλο για την έκφραση της διηλεκτρικής σταθεράς. Ακόμη βλέπουμε πώς το μοντέλο αυτό αλλάζει στην περίπτωση μετάλλων.

Περιεχόμενα ενότητας

- Ανάκλαση και διάθλαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών
- Ολική ανάκλαση
- Μοριακό μοντέλο για την διηλεκτρική σταθερά
- Περίπτωση μετάλλου

Ανάκλαση-Διάθλαση (Εικόνα 1)

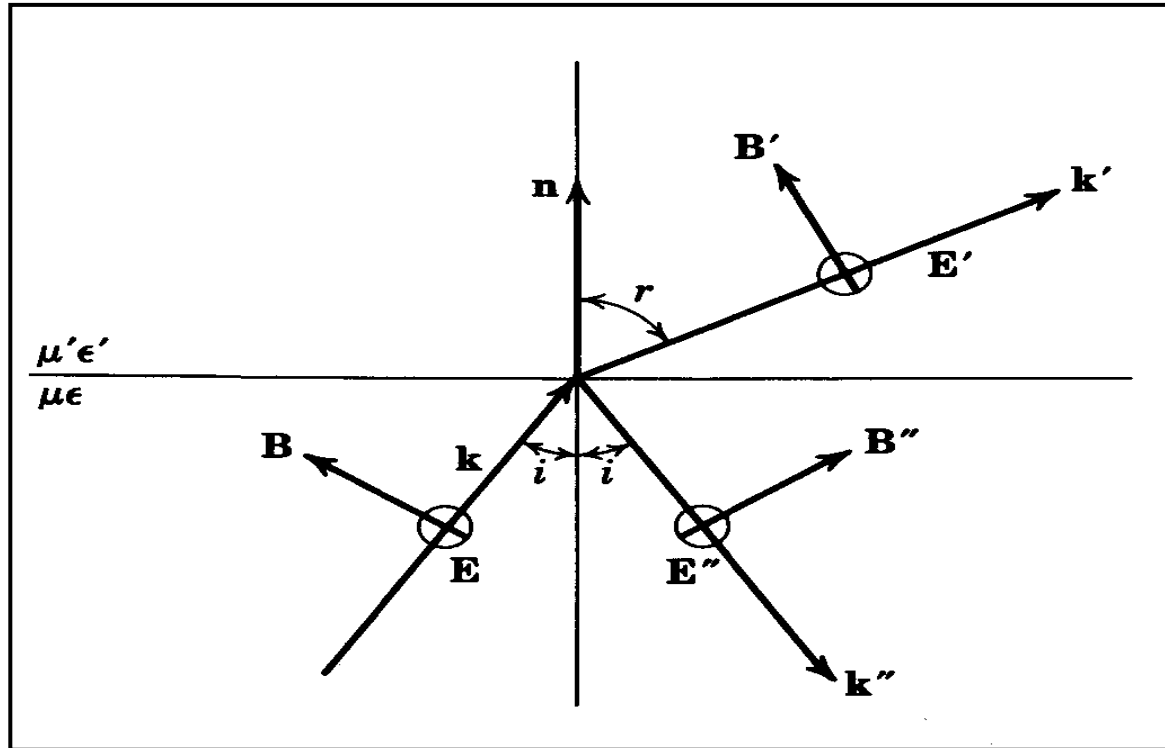


Ανάκλαση και διάθλαση-Συνοριακές συνθήκες

- Με βάση το παραπάνω σχήμα, εξάγουμε την έκφραση των συνοριακών συνθηκών:
 1. Από τον νόμο $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ προκύπτει η συνοριακή συνθήκη $[\varepsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \varepsilon' \mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} = 0$.
 2. Από τον νόμο $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ προκύπτει η συνοριακή συνθήκη $[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} = 0$.
 3. Από τον νόμο $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ προκύπτει η συνοριακή συνθήκη $(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \times \mathbf{n} = 0$.
 4. Από τον νόμο $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ προκύπτει η συνοριακή συνθήκη $\left[\frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \right] \times \mathbf{n} = 0$



Διάνυσμα πόλωσης κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης (Εικόνα 2)



Διάνυσμα πόλωσης κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης

- Θεωρούμε την περίπτωση όπου το διάνυσμα πόλωσης είναι κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης.
- Τότε, επειδή τα ηλεκτρικά πεδία είναι παράλληλα στην επιφάνεια, δεν προκύπτει κάτι από την πρώτη συνοριακή συνθήκη.

- Η τρίτη και τέταρτη συνοριακή συνθήκη δίνουν

$$E_0 + E_0'' - E_0' = 0,$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_0 - E_0'') \cos i - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_0' \cos r = 0$$

- Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη, χρησιμοποιώντας τον νόμο Snell, δίνει ό,τι και η τρίτη.



Εκφράσεις των πλατών

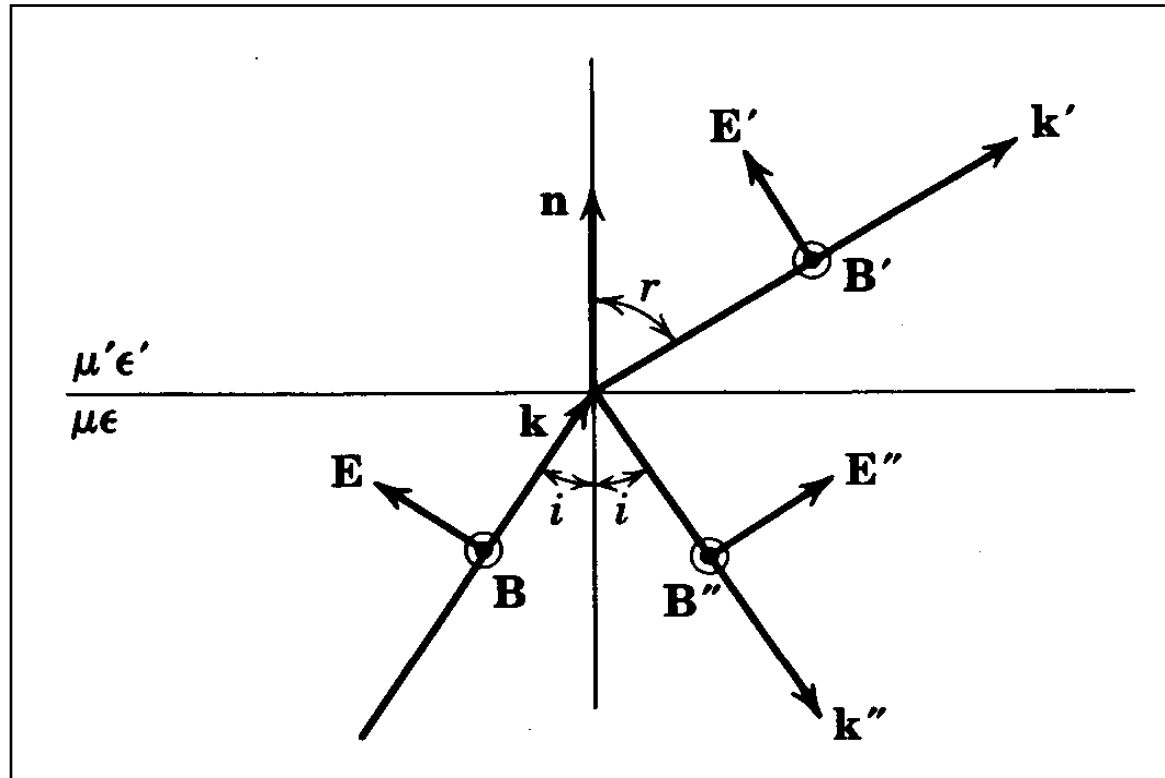
- Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουμε τα σχετικά πλάτη του ανακλώμενου και διαθλώμενου κύματος:

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2}{1 + \frac{\mu \tan i}{\mu' \tan r}} \rightarrow \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i + r)}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{1 - \frac{\mu \tan i}{\mu' \tan r}}{1 + \frac{\mu \tan i}{\mu' \tan r}} \rightarrow -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$$



Διάνυσμα πόλωσης παράλληλο στο επίπεδο πρόσπτωσης (Εικόνα 3)



Διάνυσμα πόλωσης παράλληλο στο επίπεδο πρόσπτωσης

- Στην περίπτωση που το διάνυσμα πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου είναι παράλληλο στο επίπεδο πρόσπτωσης, από την πρώτη, τρίτη και τέταρτη συνοριακή συνθήκη καταλήγουμε ότι

$$\cos i(E_0 - E_0'') - \cos r E_0' = 0,$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(E_0 + E_0'') - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_0' = 0.$$



Εκφράσεις των πλατών

- Οι αντίστοιχες εκφράσεις των σχετικών πλατών του διαθλώμενου και ανακλώμενου κύματος είναι

$$\frac{E_0'}{E_0} = 2 \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{\mu' \varepsilon'}} \frac{\sin 2i}{\sin 2r + \frac{\mu}{\mu'} \sin 2i} \rightarrow \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} \sin 2i - \sin 2r}{\sin 2r + \frac{\mu}{\mu'} \sin 2i} \rightarrow \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}$$



Γωνία Brewster

- Για την περίπτωση όπου η πόλωση είναι παράλληλη στο επίπεδο πρόσπτωσης, υπάρχει μια γωνία πρόσπτωσης, η γωνία Brewster, για την οποία δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα.

- Από τις παραπάνω σχέσεις εύκολα διαπιστώνεται ότι αυτό

συμβαίνει, όταν $r = \frac{\pi}{2} - i$. Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει $\frac{E_0''}{E_0} = 0$.
Θέτοντας για απλότητα $\mu = \mu'$, θα πρέπει $\sin 2i = \sin 2r \Rightarrow$

$$r = \frac{\pi}{2} - i.$$

- Από τον νόμο Snell, $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n'}{n}$, διαπιστώνουμε ότι η γωνία

$$\text{Brewster είναι } i_B = \tan^{-1} \left(\frac{n'}{n} \right).$$



Ολική ανάκλαση

- Κατά το φαινόμενο της ολικής ανάκλασης, η προσπίπτουσα και η ανακλώμενη βρίσκονται στο μέσο με τον μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης ($n > n'$).
- Από τον νόμο Snell καταλαβαίνουμε ότι αν $n > n'$, τότε $r > i$.
- Θα ισχύει $r = \frac{\pi}{2}$, όταν $i = i_0 = \sin^{-1} \left(\frac{n'}{n} \right)$.
- Για κύματα με γωνία πρόσπτωσης $i = i_0$, το διαθλώμενο κύμα διαδίδεται κατά μήκος της επιφάνειας. Γι' αυτήν την γωνία, θα λέμε ότι έχουμε «ολική ανάκλαση».



Τι συμβαίνει όταν $i > i_0$;

- Όταν $i > i_0 \rightarrow \sin r > 1$. Η διαπίστωση αυτή προκύπτει εύκολα ως εξής:

Για $i > i_0 \Rightarrow \sin i > \sin i_0$. Από τον νόμο Snell,
 $\sin i_0 = \frac{n'}{n}$, $\sin i = \sin r \frac{n'}{n}$. Αντικαθιστούμε στην ανισότητα $\sin i > \sin i_0$ και προκύπτει ότι $\sin r > 1$.

- Αυτό δεν μπορεί να ισχύει για πραγματικές γωνίες. Θα υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η r είναι μιγαδική γωνία, δηλ. έστω $r = r_R + ir_I$.



Υπολογισμός $\sin r$, $\cos r$

- Θα έχουμε

$$\begin{aligned}\sin r &= \frac{e^{ir} - e^{-ir}}{2i} = \frac{e^{ir_R} e^{-r_I} - e^{-ir_R} e^{r_I}}{2i} = \\ &= \frac{e^{-r_I}(\cos r_R + i \sin r_R) - e^{r_I}(\cos r_R - i \sin r_R)}{2i} = \\ &= \cos r_R \frac{e^{-r_I} - e^{r_I}}{2i} + i \sin r_R \frac{e^{-r_I} + e^{r_I}}{2i} = \\ &= \sin r_R \cosh r_I + i \cos r_R \sinh r_I.\end{aligned}$$

- Με παρόμοιες πράξεις βρίσκουμε και ότι
 $\cos r = \cos r_R \cosh r_I - i \sin r_R \sinh r_I.$



Συμπεράσματα (I)

- Επειδή επιθυμούμε $\sin r > 1$, θα πρέπει το $\sin r$ κατ' αρχήν να είναι πραγματικός, για να ισχύει η ανισότητα.
- Αυτό επιτυγχάνεται όταν μηδενίζεται το φανταστικό μέρος της έκφρασης, δηλ. όταν $r_R = \frac{\pi}{2}$.
- Άρα $r = \frac{\pi}{2} + ir_I$, $\sin r = \cosh r_I$, $\cos r = -i \sinh r_I$.
- Για να διαπιστώσουμε την φυσική σημασία στρεφόμαστε στις λύσεις της κυματικής εξίσωσης,

$E' = E_0' e^{i(k' \cdot x - \omega t)}$. Πιο συγκεκριμένα

$$k' \cdot x = k'_x x + k'_z z = k' \sin r x + k' \cos r z.$$

- Ο πρώτος όρος είναι πραγματικός και επομένως καταλαβαίνουμε ότι το διαθλώμενο κύμα διαδίδεται στον άξονα x .



Συμπεράσματα (II)

- Ο παράγοντας φάσης που αφορά τον δεύτερο όρο είναι της μορφής

$$e^{i(-ik' \sinh r_I)z} = e^{(-k' \sinh r_I)z}.$$

- Στον άξονα z υπάρχει εκθετική πτώση.
- Δεν υπάρχει επομένως διάδοση κύματος στην περιοχή διάθλασης. Η διάδοση συμβαίνει μόνο στον άξονα x .



Το κλασικό μοντέλο για την διηλεκτρική σταθερά

- Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κλασικό μοντέλο που αφορά την εξάρτηση από την συχνότητα του κύματος της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού.
- Δηλαδή, υπάρχει η περίπτωση που η απόκριση του διηλεκτρικού διαφέρει ανάλογα με την συχνότητα.
- Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρόνιο που είναι δέσμιο σε πυρήνα παρουσία μονοχρωματικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος.
- Θεωρούμε επίσης ότι το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται όπως μια μάζα σε ελατήριο.
- Έχουμε τρία είδη δυνάμεων: Η δύναμη από το πεδίο, η οποία τείνει να μετατοπίσει το ηλεκτρόνιο, η δύναμη «επαναφοράς» από τον πυρήνα και μια δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας του ηλεκτρονίου.



Διπολική ροπή

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα προκύπτει από τον δεύτερο νόμο Νεύτωνα και είναι $-e\mathbf{E} - m\omega'^2\mathbf{x} - m\gamma\frac{d\mathbf{x}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$,

όπου ω'^2 είναι η συχνότητα συντονισμού του συστήματος ελατήριο-μάζα (ηλεκτρόνιο-πυρήνας) και γ η παράμετρος απόσβεσης.

- Το \mathbf{E} έχει την μορφή επίπεδου κύματος και θέτουμε στην διαφορική εξίσωση $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$.
- Θεωρούμε λύση της μορφής $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0e^{i\omega t}$. Την αντικαθιστούμε στην διαφορική και προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{x} = -\frac{e\mathbf{E}}{m(\omega'^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$$

- Έτσι, η διπολική ροπή θα είναι $\mathbf{p} = -e\mathbf{x} = \frac{e^2\mathbf{E}}{m(\omega'^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$



Η πόλωση

- Τα παραπάνω ισχύουν για ένα ηλεκτρόνιο στα πλαίσια του αρμονικού κλασικού μοντέλου.
- Αν τώρα έχουμε f_i ηλεκτρόνια ανά άτομο, η διπολική ροπή θα γράφεται ως

$$\mathbf{p} = \frac{e^2 f_i \mathbf{E}}{m(\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$$

- Για να βρούμε την πόλωση του υλικού πολλαπλασιάζουμε με την πυκνότητα των ατόμων N . Άρα η πόλωση \mathbf{P} θα είναι

$$\mathbf{P} = \frac{e^2 f_i N \mathbf{E}}{m(\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$$



Η διηλεκτρική σταθερά

- Ισχύει ότι $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ για ισότροπο μέσο, όπου χ η επιδεκτικότητα του υλικού.

- Συγκρίνουμε τις εκφράσεις για την πόλωση και συμπεραίνουμε ότι $\chi = \frac{e^2 f_i N}{m(\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$.

- Η διηλεκτρική σταθερά θα είναι

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi = 1 + 4\pi \frac{e^2 f_i N}{m(\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}.$$



Ανώμαλη και ομαλή διασπορά

- Η $\varepsilon(\omega)$ είναι προσεγγιστικά πραγματική για τις περισσότερες συχνότητες. Ο παράγοντας $(\omega_i^2 - \omega^2)^{-1}$ είναι θετικός για $\omega < \omega_i$ και αρνητικός για $\omega > \omega_i$. Επομένως σε χαμηλές συχνότητες, όλοι οι όροι του αθροίσματος (εννοείται άθροιση στους δείκτες i) συνεισφέρουν με θετικό πρόσημο και η $\varepsilon(\omega)$ είναι μεγαλύτερη της μονάδας.
- Στην γειτονιά των ω_i , το πραγματικό μέρος του παρανομαστή μηδενίζεται για $\omega = \omega_i$ κι έτσι ο όρος γίνεται φανταστικός. Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται τα χαρακτηριστικά του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της $\varepsilon(\omega)$ για δύο συχνότητες συντονισμού.
- Η εξάρτηση της διηλεκτρικής σταθεράς από το ω συνθέτει το φαινόμενο της διασποράς. Θα λέμε ότι έχουμε ομαλή διασπορά, όταν το $Re \varepsilon(\omega)$ αυξάνεται με το ω και ανώμαλη διασπορά για το αντίθετο.

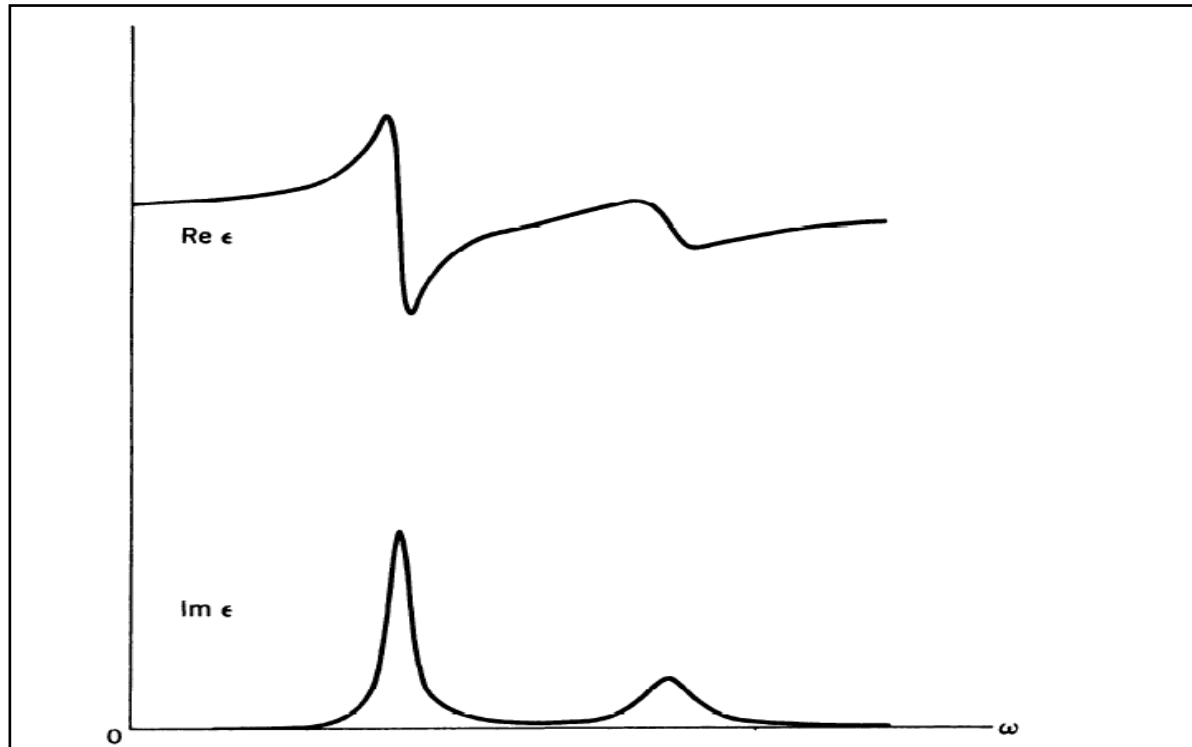


Ανώμαλη και ομαλή διασπορά-Λίγα ακόμη σχόλια

- Η ομαλή διασπορά εμφανίζεται παντού, εκτός από την περιοχή της συχνότητας συντονισμού. Μόνο όταν υπάρχει ανώμαλη διασπορά, το φανταστικό κομμάτι της $\varepsilon(\omega)$ είναι σημαντικό.
- Το θετικό φανταστικό κομμάτι της $\varepsilon(\omega)$ εκφράζει απώλειες ενέργειας που υφίσταται το ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο μέσο. Οι περιοχές όπου το $\text{Im } \varepsilon(\omega)$ είναι σημαντικό, ονομάζονται περιοχές απορρόφησης.



Η διηλεκτρική σταθερά (Εικόνα 4)



Περίπτωση ύπαρξης αγωγιμότητας

- Στο αρμονικό μοντέλο υποθέσαμε ότι τα ηλεκτρόνια είναι δέσμια.
- Τι θα συνέβαινε αν δεν ήταν όλα τα ηλεκτρόνια δέσμια, δηλ. αν υπήρχε αγωγιμότητα; Ποια θα ήταν η έκφρασή της;
- Για τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, δεν θα υπάρχει κάποια δύναμη επαναφοράς και άρα $\omega_i = 0$. Επίσης $f_i = f_0$, είναι ο αριθμός ηλεκτρονίων με $\omega_0 = 0$.

- Η έκφραση της διηλεκτρικής σταθεράς παίρνει την μορφή

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i4\pi \frac{e^2 f_0 N}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}$$

- ε_0 είναι η συνεισφορά από τα υπόλοιπα δίπολα, ενώ ο δεύτερος όρος αφορά τα ελεύθερα ηλεκτρόνια.



Συνέχεια

- Ο νόμος Ampère-Maxwell είναι:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Ο νόμος του Ohm είναι $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ και επίσης $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{1}{c} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \\ \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \mathbf{E} &= \left(\frac{4\pi}{c} \sigma - \frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \right) \mathbf{E} \end{aligned}$$

- Αν θεωρήσουμε ότι τα ηλεκτρόνια δεν είναι εντελώς ελεύθερα, έτσι ώστε $\mathbf{J} = 0$, τότε ο νόμος Ampère είναι

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}$$



Περίπτωση μη αγωγιμότητας

- Συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις συμπεραίνουμε ότι

$$-\frac{i\omega}{c}\varepsilon = \left(\frac{4\pi}{c}\sigma - \frac{i\omega}{c}\varepsilon_0\right).$$

- Ταυτόχρονα γνωρίζουμε ότι

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i4\pi \frac{e^2 f_0 N}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}. \text{ Συμπεραίνουμε από τις}$$

$$\text{δύο τελευταίες σχέσεις ότι } \sigma = \frac{Ne^2 f_0}{\gamma - i\omega}.$$



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής «**Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων**». Έκδοση: **1.0**.

Πάτρα **2015**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Εικόνα 2: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Εικόνα 3: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Εικόνα 4: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από <https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics>

