Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 20: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει ττην θεωρία που αφορά την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μη αγώγιμα μέσα.

Περιεχόμενα ενότητας

- Νόμοι διατήρησης
- Ηλεκτρομαγνητικά κύματα απουσία πηγών
- Γραμμική και ελλειπτική πόλωση
- Ανάκλαση και διάθλαση στην συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών

Νόμοι διατήρησης-Ενέργεια

- Είπαμε ότι το θεώρημα Poynting αποτελεί ουσιαστικά την αρχή διατήρησης της ενέργειας.
- Αν συμβολίσουμε την ολική ενέργεια των σωματιδίων ως E_{mech}, έχουμε

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} d^3 \boldsymbol{x}$$

- Το θεώρημα Poynting εκφράζει την αρχή διατήρησης ενέργειας του σύνθετου συστήματος ως

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_{mech} + E_{field}\right) = -\int \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}\, da$$

όπου E_{field} είναι $E_{field} = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3 x$.

Νόμοι διατήρησης-Ορμή

- Η έκφραση που αναπαριστά την αρχή διατήρησης της ορμής είναι
$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{mech}}+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{field}}\right)_{\alpha}=-\sum_{\beta}\int \mathrm{T}_{\alpha\beta}\, n_{\beta} da$$
- $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{field}}$ είναι η πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ορμής και ορίζεται ως $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{field}}=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}$.
- $\mathrm{T}_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής Maxwell και ορίζεται ως

$\mathrm{T}_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\mathrm{E}_{\beta}+\mathrm{B}_{\alpha}\mathrm{B}_{\beta}-\frac{1}{2}(|\mathrm{E}|^2+|\mathrm{B}|^2)\delta_{\alpha\beta}\right]$. Το γινόμενο $\mathrm{T}_{\alpha\beta}n_{\beta}$ εκφράζει δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας.

- $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{mech}}$ είναι η ορμή που αφορά τα σωματίδια και ισχύει ότι
$$\frac{d\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{mech}}}{dt}=\int\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\right)d^3x$$

Επίπεδα κύματα σε μη αγώγιμα μέσα

- Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των εξισώσεων Maxwell είναι η ύπαρξη λύσεων που αφορούν την ύπαρξη οδευόντων κυμάτων, τα οποία ουσιαστικά αναπαριστούν την μεταφορά ενέργειας από ένα σημείο σε ένα άλλο.
- Το πιο απλό είδος λύσης είναι τα επίπεδα κύματα. Θέλουμε να δούμε πώς οι λύσεις αυτές ανακτώνται στην περίπτωση μη αγώγιμων μέσων. Απουσία πηγών οι εξισώσεις Maxwell γράφονται ως

$$\nabla \cdot \mathrm{E} = 0, \qquad \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times \mathrm{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \times B - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Η κυματική εξίσωση

- Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά με ∇ την σχέση

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

όπου $v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ σταθερά που έχει μονάδες ταχύτητας και είναι χαρακτηριστική του υλικού.

Λύση της κυματικής εξίσωσης

- Οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα γνωστά επίπεδα κύματα, δηλαδή $\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$, με
$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\omega}{c}.$$
- Ομοίως και για το μαγνητικό πεδίο θα ισχύει ότι

$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$.

- Από τις εξισώσεις $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0, \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E_0} = 0, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B_0} = 0$. Πράγματι

$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{E_X} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}E_y + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}E_z = 0$ με

$\mathrm{E}_x = E_{0x}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \mathrm{E}_y = E_{0y}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}-\omega t)}, \mathrm{E}_z = E_{0z}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}-\omega t)}$

- Άρα $k_xE_{0x} + k_yE_{0y} + k_zE_{0z} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E_0} = 0$.

Επιπλέον συμπεράσματα

- Οι σχέσεις $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E_0} = 0, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B_0} = 0$ υποδηλώνουν ότι τα $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ είναι κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης $\boldsymbol{k}$.
- Τα κύματα που ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση ονομάζονται εγκάρσια.
- Αν αντικαταστήσουμε τις λύσεις στην εξίσωση

$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\left(\frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}}{k}\right)$$

- Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\mathbf{B}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Η ενέργεια

- Η ροή ενέργειας των εγκάρσιων κυμάτων είναι ουσιαστικά το πραγματικό μέρος του διανύσματος Poynting, δηλ.

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{8\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{c}{8\pi\mu}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) =$$

$$\frac{c}{8\pi\mu}\sqrt{\mu\varepsilon}\left(\mathbf{E} \times \left(\frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}}{k}\right)^*\right) =$$

$$\frac{1}{8\pi c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|\mathrm{E}_0|^2\,\frac{\boldsymbol{k}}{k}$$

Γραμμική και ελλειπτική πόλωση (Ι)

- Τις λύσεις τις κυματικής εξίσωσης είναι προφανές ότι μπορούμε να τις εκφράσουμε και συναρτήσει μοναδιαίων διανυσμάτων, δηλ. για το ηλεκτρικό πεδίο θα έχουμε $\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$.
- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μόνιμα στην διεύθυνση $\boldsymbol{\varepsilon}$. Θα λέμε ότι είναι γραμμικά πολωμένο με διάνυσμα πόλωσης $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- Για να περιγράψουμε μια γενική κατάσταση πόλωσης, χρειαζόμαστε ένα δεύτερο γραμμικά πλωμένο κύμα, ανεξάρτητο από το πρώτο. Έστω λοιπόν τα κύματα

$\mathbf{E}_1(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}_1\mathrm{E}_1 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \mathbf{E}_2(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}_2\mathrm{E}_2 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ με

$$\mathbf{B}_j = \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E_j}}{k}, j = 1,2$$

τα οποία αναπαριστούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Τα πλάτη $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ είναι γενικά μιγαδικά για να υπάρχει περιθώριο να θεωρήσουμε ότι υπάρχει διαφορά φάσης ανάμεσα στα κύματα.

Γραμμική και ελλειπτική πόλωση (ΙΙ)

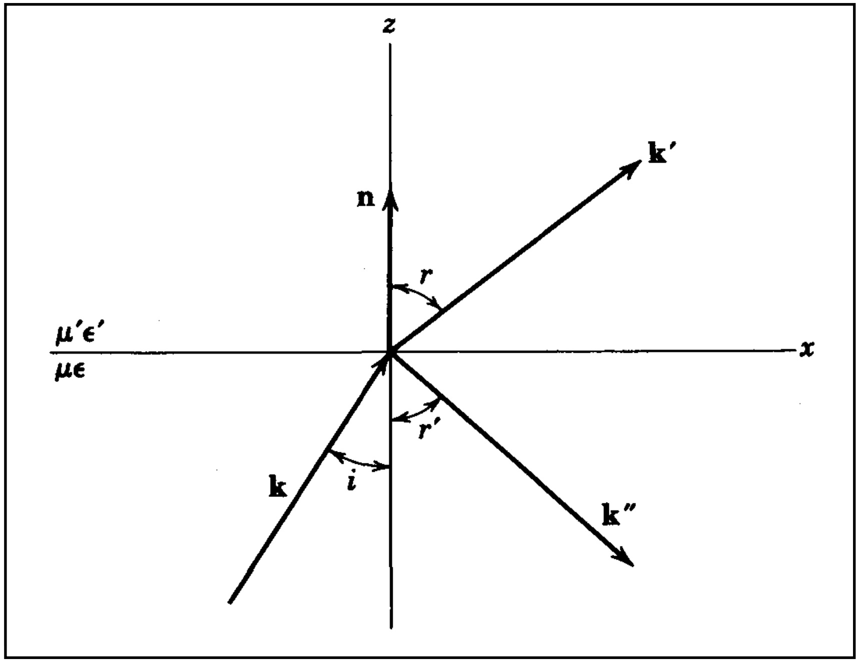
- Μια γενική λύση που αφορά ένα κύμα που διαδίδεται στην διεύθυνση $\boldsymbol{k}$, δίνεται από έναν γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}$:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathrm{E}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \mathrm{E}_2) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)}$$

- Αν τα $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ έχουν την ίδια φάση, τότε η παραπάνω εξίσωση αναπαριστά ένα γραμμικά πολωμένο κύμα με το διάνυσμα πόλωσης να σχηματίζει γωνία $\theta = tan^{-1}\frac{E_2}{E_1}$ με το $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ και πλάτος $\mathrm{E} = \sqrt{{\mathrm{E}_1}^2 + {\mathrm{E}_2}^2}$.
- Αν τα $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ έχουν διαφορετικές φάσεις, τότε κάνουμε λόγο για ελλειπτικά πολωμένο κύμα.

Ανάκλαση και διάθλαση σε διαχωριστική επιφάνεια

Εικόνα 1



- Τα υλικά πάνω και κάτω από την διαχωριστική επιφάνεια έχουν διαπερατότητες και διηλεκτρικές σταθερές ε', μ' και ε, μ αντίστοιχα.
- Ένα επίπεδο κύμα με κυματάνυσμα $\boldsymbol{k}$ και συχνότητα ω προσπίπτει στην διαχωριστική επιφάνεια προερχόμενο από το μέσο ε, μ.
- Το διεθλώμενο και ανακλώμενο κύμα έχουν κυματανύσματα $\boldsymbol{k}'$, $\boldsymbol{k}''$ αντίστοιχα.
- Το $\boldsymbol{n}$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην διαχωριστική επιφάνεια με φορά από το μέσο μ, ε στο μ', ε'.

Τα είδη κυμάτων

- Άρα έχουμε τρία είδη κυμάτων:

1. Προσπίπτον: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \mathbf{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{k}$
2. Διαθλώμενο: $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0{}' e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \mathbf{B}' = \sqrt{\mu'\varepsilon'}\,\frac{\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}'}{k'}$
3. Ανακλώμενο: $\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0'' e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},$

$\mathbf{B}'' = \sqrt{\mu''\varepsilon''}\,\frac{\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}''}{k''}.$

- Από τις συνοριακές συνθήκες αντιλαμβανόμαστε ότι οι παράγοντες φάσης πρέπει να είναι ίσοι στην συνοριακή επιφάνεια: $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})_{z=0} = (\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x})_{z=0} = (\boldsymbol{k}''\cdot x)_{z=0}.$

Νόμος Snell

- Επίσης με βάση τον συμβολισμό της προηγούμενης εικόνας έχουμε $ksini = k'sinr = k''sinr'$.
- Αφού $k'' = k$, βρίσκουμε ότι $i = r'$,δηλ. η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με την γωνία ανάκλασης.
- Τέλος, ο νόμος Snell είναι

$$\frac{sini}{sinr} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon'}{\mu\varepsilon}} = \frac{n'}{n}$$

όπου $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ ο δείκτης διάθλασης του υλικού.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics