Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 18: Νόμοι Maxwell

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσίασει τις εξισώσεις Maxwell.

Περιεχόμενα ενότητας

- Νόμος επαγωγής-Faraday
- Οι εξισώσεις Maxwell
- Βάθμωση Coulomb και Lorentz
- Η κυματική εξίσωση Helmholtz

Νόμος Faraday

- Μέχρι στιγμής μελετήσαμε τι συμβαίνει στην μαγνητοστατική. Η ερώτηση που προκύπτει είναι τι επακολουθεί, όταν το μαγνητικό πεδίο αλλάζει με τον χρόνο.
- O Faraday παρατήρησε ότι οι κινούμενοι μαγνήτες ή τα κινούμενα καλώδια ηλεκτρικού ρεύματος ή η αλλαγή του ρεύματος στα καλώδια, μπορεί να προκαλέσει την δημιουργία ρεύματος σε κοντινά καλώδια.
- Αυτό σημαίνει ότι μαγνητικά πεδία που μεταβάλλονται με τον χρόνο, δημιουργούν ηλεκτρικά πεδία, τα οποία προκαλούν το ηλεκτρικό ρεύμα. Μαθηματικά ο νόμος Faraday αποτυπώνεται σε ολοκληρωτική μορφή ως

$$\int \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{dl} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}\, da.$$

- Το " − “ προκύπτει από τον κανόνα του Lenz. Σύμφωνα με αυτόν, η διεύθυνση του επαγόμενου ρεύματος θα είναι αντίθετη της αλλαγής που το προκάλεσε.
- Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Stokes και προκύπτει ότι

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0.$$

Μια ανακεφαλαίωση των νόμων

- Άρα μέχρι στιγμής έχουμε συμπεράνει ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι

1. $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{tot}$, Νόμος Gauss
2. $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$, Νόμος επαγωγής Faraday
3. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, Νόμος μη ύπαρξης μαγνητικών μονοπόλων
4. $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi \boldsymbol{J}_{tot}}{c}$, Νόμος Ampére για στατικά ρεύματα

Το πρόβλημα αυτών των εξισώσεων

- Αυτές οι εξισώσεις είναι ανεπαρκείς, αν θεωρήσουμε μη στατικές καταστάσεις.
- Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα που εμφανίζεται είναι το εξής:

Παίρνουμε την απόκλιση και στα δύο μέλη στον νόμο Ampére και έχουμε:

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{4\pi \nabla \cdot \boldsymbol{J_{tot}}}{c}$. Η απόκλιση του στροβιλισμού είναι πάντα μηδέν. Επομένως θα πρέπει πάντα $\nabla \cdot \boldsymbol{J_{tot}} = 0$. Αυτή η εξίσωση ισχύει μεν για στατικές καταστάσεις, αλλά για μη στατικές παίρνει την μορφή $\nabla \cdot \boldsymbol{J_{tot}} = -\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t}$. Προφανώς έρχεται σε αντίθεση με αυτά που μόλις αναφέραμε.

Νόμος Ampére με την διόρθωση Maxwell

- Παίρνουμε την εξίσωση συνέχειας και χρησιμοποιούμε τον νόμο Gauss:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J_{tot}} = -\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{4\pi\partial t}$$

Αν προσθέσουμε στην εξίσωση την ποσότητα $c\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$, δεν αλλάζει ουσιαστικά κάτι γιατί είναι μια μηδενική ποσότητα.

- Έχουμε λοιπόν

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J_{tot}} = -\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{4\pi\partial t} + c\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

- Ολοκληρώνουμε και στα δύο μέλη και καταλήγουμε στον διορθωμένο από τον Maxwell νόμο Ampére:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J_{tot}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Η φιλοσοφία λοιπόν του Maxwell ήταν να προσθέσει ένα επιπλέον όρο στον νόμο Ampére, τέτοιον ώστε να ισχύει η εξίσωση συνέχειας και να εξαλειφθεί αυτή η αντίθεση που προέκυπτε.

Οι νόμοι Maxwell

- Έτσι καταλήγουμε στους τέσσερις νόμους Maxwell που περιγράφουν το σύνολο της ηλεκτροδυναμικής:

1. $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{tot}$,
2. $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$,
3. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$,
4. $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{tot}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$.

Σχέση βαθμωτού και διανυσματικού δυναμικού

- Επειδή $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, μπορούμε να ορίσουμε το μαγνητικό πεδίο συναρτήσει του στροβιλισμού του διανυσματικού δυναμικού, δηλαδή $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ (διότι $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$).
- Αντικαθιστούμε στον νόμο Faraday και έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right] = 0$$

- Άρα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση Φ τέτοια ώστε

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi.$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας

- Αν αντικαταστήσουμε αυτήν την έκφραση στους νόμους Gauss και Maxwell-Ampére παίρνουμε

$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -4\pi\rho_{tot}$ και

$\nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] - \nabla^2\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{tot}$.

- Υπάρχει μια ελευθερία στο πώς θα επιλέξουμε τα δυναμικά, με σκοπό φυσικά η επιλογή μας να μην μεταβάλει κάθε φορά τις τιμές των πεδίων.
- Επειδή $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε το μετασχηματισμό $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda$. Με αυτόν τον μετασχηματισμό είναι φανερό, ότι το πεδίο $\boldsymbol{B}$ παραμένει αναλλοίωτο.
- Για να μην μεταβληθεί το πεδίο $\boldsymbol{E}$ της σχέσης $\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$, πραγματοποιούμε ταυτόχρονα τον μετασχηματισμό

$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$. Αυτή η εξίσωση μαζί με την $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda$ είναι οι λεγόμενοι μετασχηματισμοί βαθμίδας.

Συνθήκη Lorentz

- Η ελευθερία επιλογής των δυναμικών μας επιτρέπει να επιλέξουμε δυναμικά τέτοια ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$.
- Με αυτήν την συνθήκη, οι εξισώσεις

$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -4\pi\rho_{tot}$ και

$\nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] - \nabla^2 \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{tot}$ γίνονται ανεξάρτητες. Δηλαδή καταλήγουμε στις

$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_{tot}$ και $\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{tot}$.

- Η συνθήκη $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ καλείται συνθήκη Lorentz.

Βαθμίδα Lorentz

- Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να έχουμε ότι

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

- Άρα αν βρεθεί μια συνάρτηση Λ, που να ικανοποιεί την $\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$, τότε τα νέα δυναμικά $\mathbf{A}', \Phi'$ ικανοποιούν την συνθήκη Lorentz.

- Οι συνθήκες $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda, \Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$,

$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$, απαρτίζουν την βαθμίδα Lorentz.

Χρησιμότητα βαθμίδας Lorentz

- Η βαθμίδα Lorentz χρησιμοποιείται ευρέως κυρίως για δύο λόγους: 1)Οδηγεί στις κυματικές εξισώσεις

$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_{tot}$ και $\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{tot}$,
οι οποίες αντιμετωπίζουν τα $\mathbf{A}$ και Φ ισοδύναμα,

2) είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων γεγονός που «ταιριάζει» στις απαιτήσεις της ειδικής σχετικότητας.

Βαθμίδα Coulomb

- Στην βαθμίδα Coulomb επιλέγουμε $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.
- Τότε οι αρχικές εξισώσεις

$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -4\pi\rho_{tot}$ και

$\nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] - \nabla^2\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{tot}$ καταλήγουν στις

$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho_{tot}$ και $\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{tot} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

- Η πρώτη εξίσωση είναι η ίδια με της ηλεκτροστατικής. Αυτό σημαίνει ότι όταν η πυκνότητα φορτίου μεταβάλλεται με τον χρόνο, το βαθμωτό δυναμικό συμπεριφέρεται σαν στατικό. Το διανυσματικό δυναμικό ικανοποιεί την κυματική εξίσωση γεγονός που επιβάλει μέγιστη ταχύτητα διάδοσης c.

Κυματική εξίσωση Helmholtz (I)

- Η βασική δομή των κυματικών εξισώσεων είναι της μορφής

$\nabla^2\Psi(\mathbf{x},\mathrm{t}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{x},\mathrm{t}) = 4\pi\mathrm{f}(\mathbf{x},\mathrm{t})$, όπου $\mathrm{f}(\mathbf{x},\mathrm{t})$ είναι ο όρος πηγής.

- Αναφέρουμε τον μετασχηματισμό Fourier:

$$\Psi(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}\,(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$

$$\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{x},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\mathbf{x},\mathrm{t})\,e^{i\omega t}d\omega.$$

- Όταν οι αναπαραστάσεις των $\Psi(\mathbf{x},\mathrm{t}), \mathrm{f}(\mathbf{x},\mathrm{t})$ εισέρχονται στην κυματική εξίσωση, τότε αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{x},\omega)$ ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{x},\omega) = -4\pi\tilde{f}(\boldsymbol{x},\omega).$$

Κυματική εξίσωση Helmholtz (II)

- Πράγματι κάνοντας την αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla^2\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{x},\omega)+\frac{(-i\omega)^2}{c^2}\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{x},\omega)\right]e^{-i\omega t}d\omega$$

$$=-4\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

- Ισχύει ότι $k^2=\frac{(-i\omega)^2}{c^2}$. Επομένως καταλήγουμε στην εξίσωση Helmholtz
$(\nabla^2+k^2)\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{x},\omega)=-4\pi\tilde{f}(\boldsymbol{x},\omega)$.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Νόμοι Maxwell». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης