Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 17: Μαγνητοστατική σε υλικά

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να ολοκληρώσει τα στοιχεία θεωρίας που αφορούν την πολυπολική ανάπτυξη και να αναπτύξει την μαγνητοστατική σε υλικά.

Περιεχόμενα ενότητας

- Μαγνητική διπολική ροπή
- Εφαρμογή
- Μαγνήτιση και μαγνητικό πεδίο
- Συνοριακές συνθήκες στην μαγνητοστατική
- Εφαρμογή

Πολυπολική ανάπτυξη

- Στην προηγούμενη ενότητα είχαμε καταλήξει ότι το διανυσματικό δυναμικό μακρυά από την κατανομή ρεύματος είναι $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\int \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}'$.
- Γράφουμε αυτήν την έκφραση συναρτήσει των συνιστωσών: $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\int \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}' =$

$$\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\int (x_j\, x_j{}')(J_i\hat{x}_i)d^3\boldsymbol{x}'.$$

- Θυμίζουμε την σχέση $\int f\boldsymbol{J}\cdot\nabla' g d^3\boldsymbol{x}' = -\int g(\nabla' f)\cdot\boldsymbol{J}d^3\boldsymbol{x}'$.
- Θέτουμε $f = x'_i, g = x'_j$. Τότε $\nabla' f = \hat{x}_i, \nabla' g = \hat{x}_j$.

Το διανυσματικό δυναμικό-Τελική έκφραση

- Αντικαθιστώντας προκύπει ότι

$\int x'_i \, J_j \, d^3\boldsymbol{x}' = -\int x'_j J_i d^3\boldsymbol{x}'$.

- Χρησιμοποιώντας αυτήν την έκφραση έχουμε για το διανυσματικό δυναμικό ότι

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\hat{x}_i x_j \left[\int J_j \, x'_i d^3\boldsymbol{x}' - \int J_i \, x'_j d^3\boldsymbol{x}'\right] =$$

$$-\frac{1}{2c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\hat{x}_i x_j \int [J_j x'_i - J_i x'_j] d^3\boldsymbol{x}'$$

- Στην παραπάνω έκφραση εννοείται το διπλό άθροισμα με δείκτες τα i, j. Αν αντικαταστήσουμε αναλυτικά τις συνιστώσες και ομαδοποιήσουμε τους όρους μπορούμε να γράψουμε την εξής έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\int d^3\boldsymbol{x}' \, \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J})$$

Η μαγνητική διπολική ροπή και το αντίστοιχο πεδίο

- Το δυναμικό επομένως πολύ μακρυά από την κατανομή ρεύματος είναι

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x} \times \int d^3\boldsymbol{x}'\,(\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J})$$

- Ορίζουμε την μαγνητική διπολική ροπή ως

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\int d^3\boldsymbol{x}'\,(\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J})$$

- Το μαγνητικό διπολικό πεδίο είναι

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|^3}.$$

Εφαρμογή 1

- Να βρεθεί η μαγνητική ροπή κλειστού βρόγχου που διαρέεται από ρεύμα.
- Η μαγνητική ροπή είναι

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) d^3\,\boldsymbol{x} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{x} \times (I\boldsymbol{dl}) = \frac{I}{2c}\int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{dl}$$

Όμως $d\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{dl}$, το στοιχειώδες εμβαδό. Άρα

$\boldsymbol{m} = \frac{I}{c}\boldsymbol{A}$, όπου $\boldsymbol{A}$ το εμβαδόν της περιοχής.

Εφαρμογή 2

- Να βρεθεί η μαγνητική ροπή κινούμενων φορτισμένων σωματιδίων με φορτία q_i, μάζες M_i με ταχύτητες $\boldsymbol{v}_i$.
- Η πυκνότητα ρεύματος γράφεται ως

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = q_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i})\boldsymbol{v}_i$. Επομένως

$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c} q_i \int \boldsymbol{x}' \times [\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{i}})\boldsymbol{v}_i] d^3\boldsymbol{x}' =$
$\frac{1}{2c}[q_i(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{v}_i)]$. Η στροφορμή ορίζεται ως

$\boldsymbol{L_i} = \mathrm{M}_i(\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{v}_i)$. Άρα $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c} q_i \frac{\mathbf{L}_i}{M_i}$.

Μαγνητοστατική σε υλικά

- Μέχρι στιγμής είδαμε την θεμελίωση της μαγνητοστατικής στο κενό. Αν όμως η κατανομή ρεύματος βρίσκεται μέσα σε υλικό, τότε πρέπει να λάβουμε υπ’ όψη επιπλέον φαινόμενα που σχετίζονται με την απόκριση του υλικού στο μαγνητικό πεδίο.
- Όπως στην ηλεκτροστατική είχαμε την πόλωση, έτσι κι εδώ ορίζουμε το μέγεθος «μαγνήτιση», $\mathbf{M}$, που εκφράζει την πυκνότητα μαγνητικής διπολικής ροπής.
- Ορίζουμε την ποσότητα $\mathbf{H}$ ως το μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από ελεύθερα ρεύματα. Το πεδίο $4\pi\mathbf{M}$ οφείλεται στην μαγνήτιση του υλικού και πιο συγκεκριμένα στα δέσμια ρεύματα. Το πεδίο $\mathbf{B}$ είναι το ολικό μαγνητικό πεδίο(ή μαγνητική επαγωγή), που οφείλεται στα ελεύθερα ρεύματα και στην μαγνήτιση του υλικού. Δηλαδή ισχύει η σχέση $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\mathbf{M}$.

Το διανυσματικό δυναμικό παρουσία υλικών

- Είπαμε ότι για ένα δίπολο ισχύει ότι $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$.
- Για να εκφράσουμε το δυναμικό παρουσία υλικών, ολοκληρώνουμε αυτήν την ποσότητα στον χώρο και προσθέτουμε σε αυτήν το δυναμικό που οφείλεται στα ελευθερα ρεύματα, προκειμένου να έχουμε το συνολικό δυναμικό στον χώρο:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathrm{J}(\mathbf{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' + \int \frac{M(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} d^3\boldsymbol{x}'$$

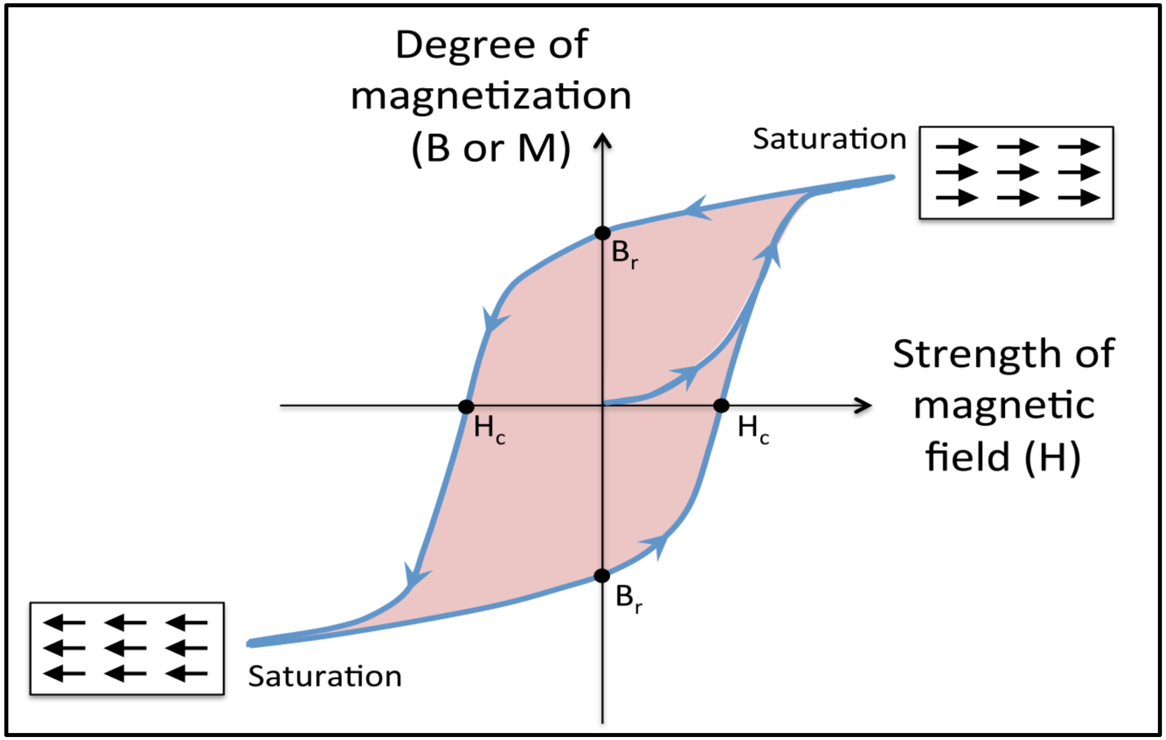
- Η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \mathrm{c}\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}'$$

Είδη μαγνητικών υλικών

- Οι ιδιότητες των μαγνητικών υλικών μπορούν να εκφραστούν με μια σχέση της μορφής $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Η σταθερά μ εξαρτάται από το υλικό και ονομάζεται διαπερατότητα.
- Η ισχύς αυτής της σχέσης δεν περιλαμβάνει τα σιδηρομαγνητικά υλικά.
- Για παραμαγνητικά υλικά $\mu > 1$ και για διαμαγνητικά $\mu < 1$.
- Για τα σιδηρομαγνητικά υλικά ισχύει μια μη γραμμική σχέση της μορφής $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H})$.
- Το φαινόμενο της υστέρησης (που φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια) αποτυπώνει την μη γραμμικότητα. Η μορφή της $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{H})$ εξαρτάται από τον τρόπο που έχουμε προετοιμάσει το υλικό.

Βρόχος υστέρησης



Συνοριακές συνθήκες

- Οι συνοριακές συνθήκες σε μαγνητικά υλικά είναι

$(\mathbf{B_2} - \mathbf{B_1}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ και

$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H_2} - \boldsymbol{H_1}) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{K}$**,** όπου $\boldsymbol{K}$ η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος.

Νόμος Ampére

- Είπαμε ότι το διανυσματικό δυναμικό είναι

$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + c\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}'$. Ορίζουμε την πυκνότητα ρεύματος που προέρχεται από την μαγνήτιση ως

$\boldsymbol{J}_M = c\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')$. Άρα η ολική πυκνότητα ρεύματος είναι $\boldsymbol{J}_{tot} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_M$.

- Από τον νόμο Ampére έχουμε $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}[\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_M] \Rightarrow$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + 4\pi(\nabla \times \mathbf{M}) \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

- Αυτός είναι ο νόμος Ampére με βάση το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}$.

Λίγα ακόμη στοιχεία θεωρίας

- Πριν προχωρήσουμε σε εφαρμογή θα δούμε κάποια ακόμη στοιχεία θεωρίας.
- Είπαμε ότι ο νόμος Ampére είναι $\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$.
- Στην περίπτωση που $\boldsymbol{J} = 0$, ο νόμος Ampére γίνεται $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$.
- Έτσι το πεδίο H μπορεί να γραφεί ως $\boldsymbol{H} = -\nabla \Phi_{\mathrm{M}}$.
- Από την σχέση $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{H} + 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi_{\mathrm{M}} = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} = -4\pi \rho_{\mathrm{M}},$$

όπου ρ_{M} εκφράζει πυκνότητα μαγνητικού φορτίου.

Το δυναμικό Φ_{M}

- Με δεδομένο ότι το Φ_{M} υπακούει στην εξίσωση $\nabla^2\Phi_{\mathrm{M}} = -4\pi\rho_{\mathrm{M}}$, ισχύει ότι

$$\Phi_{\mathrm{M}} = \int \frac{\rho_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \int \frac{-\nabla' M(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

- Πραγματοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση και έχουμε

$$\int \frac{-\nabla' M(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \int \frac{\nabla M(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} =$$

$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}') - \int \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\prime|}\,d^3\boldsymbol{x}$. Ο πρώτος όρος μηδενίζεται. Άρα

$$\Phi_{\mathrm{M}} = -\nabla\int \frac{\mathbf{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3\boldsymbol{x}'.$$

Εφαρμογή

- Έχουμε μια ομοιόμορφα μαγνητισμένη σφαίρα ακτίνας α με μαγνήτιση $\mathbf{M} = \mathrm{M}_0 \hat{z}$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το δυναμικό Φ_{M}.
- **Σημείωση**: Η έκφραση για το δυναμικό Φ_{M} διαφέρει όταν το υλικό παρουσιάζει μαγνήτιση στο εσωτερικό. Έχουμε $\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_{\mathrm{M}} \Rightarrow \int \nabla \cdot \mathbf{M} dV = \int \rho_{\mathrm{M}}\, dV$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης και έχουμε:

$$\int \mathbf{M} \cdot \hat{n} da = \int \sigma\, da \Rightarrow \mathbf{M} \cdot \hat{n} = \sigma_{\mathrm{M}}.$$

Αυτήν την επιφανειακή πυκνότητα πρέπει να την λάβουμε υπ’ όψη στο υπάρχον δυναμικό και γι’ αυτό γράφουμε

$$\Phi_{\mathrm{M}} = -\nabla \int \frac{\mathbf{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' + \int \frac{\mathbf{M} \cdot \hat{n} da'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}.$$

Συνέχεια εφαρμογής

- Επειδή η σφαίρα είναι ομοιόμορφα μαγνητισμένη η μαγνήτιση είναι σταθερή και άρα το ολοκλήρωμα όγκου μηδενίζεται. Έχουμε $\hat{n}' \cdot \hat{z}' = cos\theta'$ και $da' = a^2 d\Omega'$.
- Επομένως

$$\Phi_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{M_0 cos\theta'}{|x - x'|} a^2 d\Omega'$$

- Το Φ_{M} ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.
- Έχουμε

$$\frac{1}{|x - x'|} = 4\pi \sum_{l,m}^{\infty} \frac{{r_<}^{l}}{{r_>}^{l+1}} \frac{1}{2l+1} {Y_{lm}}^{*}(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Το δυναμικό

- Το δυναμικό λοιπόν θα γράφεται ως

$$\Phi_{\mathrm{M}}(x) = 4\pi \sum_{l,m}^{\infty} \frac{r_<{}^{l}}{r_>{}^{l+1}} \frac{1}{2l+1} \int \alpha^2\, \mathrm{M}_0 Y_{lm}{}^{*}(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi) cos\theta' d\Omega'$$

- Έχουμε $\mathrm{Y}_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta$. Άρα η παραπάνω έκφραση γράφεται

$\Phi_{\mathrm{M}}(x) = 4\pi\alpha^2\mathrm{M}_0 \sum_{l,m}^{\infty} \frac{r_<{}^{l}}{r_>{}^{l+1}} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\theta,\varphi) \int Y_{lm}{}^{*}(\theta',\varphi') \sqrt{\frac{4\pi}{3}}$
$\mathrm{Y}_{10}(\theta',\varphi') d\Omega'$.

- Προκειμένου να μην υπάρχει μηδενισμός θα πρέπει $l = 1, m = 0$.
- Επομένως η τελική έκφραση για το δυναμικό είναι

$$\Phi_{\mathrm{M}}(x) = \frac{4\pi}{3} \alpha^2 \mathrm{M}_0 \frac{r_<}{r_>{}^{2}} cos\theta$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Μαγνητοστατική σε υλικά». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnetic_hysteresis.png