



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 13: Πολυπολική ανάπτυξη

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει την πολυπολική ανάπτυξη του δυναμικού σε σφαιρικές και καρτεσιανές συντεταγμένες.

Περιεχόμενα ενότητας

- Πολυπολική ανάπτυξη δυναμικού σε σφαιρικές συντεταγμένες
- Πολυπολική ανάπτυξη δυναμικού σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εισαγωγή

- Έστω πυκνότητα φορτίου που βρίσκεται εντός συγκεκριμένου εύρους.
- «Μακριά» από την περιοχή της κατανομής φορτίου, η πυκνότητα φορτίου συμπεριφέρεται σαν σφαίρα ή σημειακό φορτίο.
- Άρα, μακριά από την περιοχή της κατανομής, μπορούμε να αναπτύξουμε το δυναμικό σε σφαιρικές αρμονικές και να κρατήσουμε τους πρώτους όρους. Μ' αυτόν τον τρόπο θα έχουμε μια πολύ καλή προσέγγιση του δυναμικού.
- Αυτή η λογική εύρεσης του δυναμικού χρησιμεύει στις περιπτώσεις που η κατανομή φορτίου είναι αρκετά πολύπλοκη και δυσκολεύει τον υπολογισμό του δυναμικού.



Πολυπολική ανάπτυξη σε σφαιρικές

- Θέλουμε να βρούμε το δυναμικό, μακριά από την κατανομή φορτίου.
- Είχαμε πει ότι

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

- Στην περίπτωση μας θεωρούμε ότι $r \gg r'$. Άρα

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi).$$



Θεώρημα Green και πολυπολικές ροπές

- Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας το θεώρημα Green.
- Επομένως θα έχουμε:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int \rho(\mathbf{x}') r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\varphi' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

- Ορίζουμε τους συντελεστές

$$q_{lm} = \int \rho(\mathbf{x}') r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\varphi' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

- Αυτές είναι οι πολυπολικές ροπές σε σφαιρικές συντεταγμένες.
- Έτσι η έκφραση για το δυναμικό (το πολυπολικό ανάπτυγμα του δυναμικού) είναι

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} q_{lm}.$$



Ο μονοπολικός όρος

- Για $l = 0$, θα έχουμε και $m = 0$. Αυτός είναι ο μονοπολικός όρος.
- Θα ισχύει λοιπόν ότι $q_{00} = \int \rho(x') Y_{00}^*(\theta', \varphi') d^3x'$.
Έχουμε ότι $Y_{00}^*(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ και $\int \rho(x') d^3x' = Q$.
- Οπότε $q_{00} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$ και $\Phi_0(x) = \frac{Q}{r}$.
- Παρατηρούμε ότι η μονοπολική ροπή q_{00} είναι ανάλογη του φορτίου.



Διπολικοί όροι (I)

- Ο δεύτερος όρος του αναπτύγματος είναι για $l = 1$. Άρα οι δυνατές τιμές του m είναι $m = -1, 0, 1$.

- Έχουμε $q_{10} = \int \rho(r', \theta', \varphi') r' Y_{10}^*(\theta', \varphi') r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$,

με $Y_{10}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta'$. Επομένως

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(r', \theta', \varphi') r'^2 \sin\theta' r' \cos\theta' dr' d\theta' d\varphi'.$$

- Όμως $r' \cos\theta' = z'$. Στο σημείο αυτό, ορίζουμε την ηλεκτρική διπολική ροπή ως $\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x'$. Άρα θα έχουμε

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') z' d^3 x'$$

- Το ολοκλήρωμα $\int \rho(\mathbf{x}') z' d^3 x'$ είναι η z συνιστώσα της διπολικής ροπής.



Διπολικοί όροι (II)

- Άρα $q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$.
- Επίσης, $q_{11} = \int \rho(r', \theta', \varphi') Y_{11}^*(\theta', \varphi') r' r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$,
όπου

$$Y_{11}^*(\theta', \varphi') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi'}. \text{ Αντικαθιστούμε}$$

$e^{-i\varphi'} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ και καταλήγουμε ότι

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left[\int \rho(x') x'^d{}^3 x' - i \int \rho(x') y' d^3 x' \right] = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} [p_x - ip_y]$$

- Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $q_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} [p_x + ip_y]$



Πολυπολικό ανάπτυγμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες

- Αναπτύσσουμε κατά Taylor την συνάρτηση $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$.
- Το ανάπτυγμα Taylor γενικά για μια συνάρτηση $f(\mathbf{x}')$ σε τρεις διαστάσεις είναι

$$f(\mathbf{x}') = f(0) + \frac{\partial f(0)}{\partial x'_i} x'_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x'_i \partial x'_j} x'_i x'_j + \dots$$

- Άρα για την $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{x}|} + x'_i \left[\frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{x'=0} \\ &+ \frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{x'=0} + \dots \end{aligned}$$



Υπολογισμός των όρων

- Για τον δεύτερο όρο θα έχουμε

$$x'_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_{x'=0} = x'_i \left[\frac{(x - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]_{x'=0} = x'_i \frac{r_i}{r^3}$$

- Για τον τρίτο όρο θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_{x'=0} \Big| = \\ & = \frac{1}{2} x'_1 x'_1 \frac{\partial^2}{\partial x'_1{}^2} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_{x'=0} \Big| + \frac{1}{2} x'_1 x'_2 \frac{\partial^2}{\partial x'_1 \partial x'_2} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_{x'=0} \Big| + \dots \end{aligned}$$

με $i, j = 1, 2, 3$ και $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{\frac{1}{2}}}$.



Το δυναμικό

- Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$\frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_{x'=0} = \frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}.$$

- Επομένως για το δυναμικό θα έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \\ &= \int \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} + x'_i \frac{r_i}{r^3} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \right] d^3 x' = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x' + \frac{1}{r^2} \hat{r}_i \int \rho(\mathbf{x}') x'_i d^3 x' + \frac{1}{2} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int \rho(\mathbf{x}') x'_i x'_j d^3 x'$$



Το δυναμικό και η τετραπολική ροπή

- Ο πρώτος όρος είναι ο μονοπολικός και είναι

$$q = \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x'.$$

- Ο δεύτερος είναι ο διπολικός και είναι

$$p_i = \int \rho(\mathbf{x}') x'_i d^3 x'.$$

- Ορίζουμε το τετράπολο ως $Q_{ij} = \int 3\rho(\mathbf{x}') x'_i x'_j d^3 x'.$

- Έτσι το δυναμικό (μέχρι τον τετραπολικό όρο) γράφεται

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{r} + \frac{1}{r^2} p_i \hat{r}_i + \frac{1}{6} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} Q_{ij} + \dots$$



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής «**Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Πολυπολική ανάπτυξη**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2015**.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.