Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 11: Εφαρμογή στις κυλινδρικές συντεταγμένες

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσει μια εφαρμογή στις κυλινδρικές συντεταγμένες.

Περιεχόμενα ενότητας

- Εφαρμογή στις κυλινδρικές συντεταγμένες.

Το πρόβλημα

- Έχουμε έναν κύλινδρο ακτίνας α που το κέντρο της κάτω βάσης είναι για $z = 0$. Το ύψος του κυλίνδρου εκτείνεται έως $z = L$. Οι συνοριακές μας συνθήκες είναι οι εξείς: Ο κύλινδρος έχει δυναμικό $V_1(\rho, \varphi)$ στην επάνω βάση, $V_2(\rho, \varphi)$ στην κάτω βάση και $V_3(\rho, \varphi)$ στην παράπλευρη επιφάνεια.
- Ψάχνουμε το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου.
- Θα διασπάσουμε το πρόβλημά μας σε τρία ισοδύναμα. Στο πρώτο θα θεωρήσουμε ότι οι συνοριακές μας συνθήκες είναι $V_1(\rho, \varphi)$ στην επάνω βάση και μηδέν στην κάτω και την παράπλευρη επιφάνεια, στο δεύτερο οι συνοριακές συνθήκες θα είναι $V_2(\rho, \varphi)$ στην κάτω βάση και μηδέν στις υπόλοιπες περιοχές και στο τρίτο το δυναμικό θα είναι $V_3(\rho, \varphi)$ στην παράπλευρη επιφάνεια και μηδέν στις υπόλοιπες περιοχές. Το δυναμικό που ψάχνουμε θα είναι το άθροισμα των δυναμικών καθενός από τα επιμέρους προβλήματα.

Υποπρόβλημα 1

- Το δυναμικό είναι $V_1(\rho,\varphi)$ στην πάνω βάση και μηδέν στις υπόλοιπες περιοχές.
- Υπενθυμίζουμε ότι η γενική λύση της εξίσωσης Laplace είναι $\Phi(\rho,\varphi,\mathrm{z})=\mathrm{R}(\rho)\mathrm{Q}(\varphi)\mathrm{Z}(\mathrm{z})$, όπου

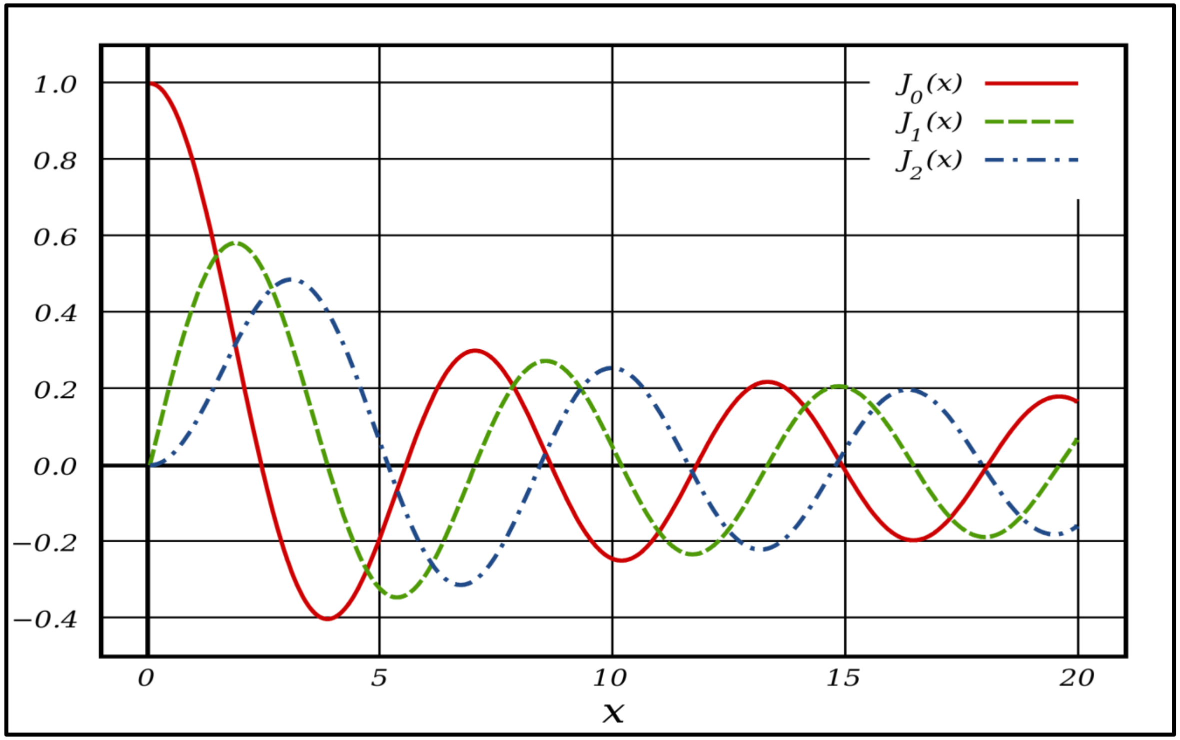
$$R(\rho)=\mathrm{A}J_\nu(\kappa\rho)+\mathrm{BN}_\nu(\kappa\rho),$$
$$Q(\varphi)=Csin\nu\varphi+\mathrm{Dsin}\nu\varphi,$$
$$\mathrm{Z}(\mathrm{z})=\mathrm{Esinh}(\kappa\mathrm{z})+\mathrm{Fcosh}(\kappa\mathrm{z}).$$

Συνοριακές συνθήκες

- Για να έχουμε πεπερασμένο δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου (όταν $\rho \to 0$), θα πρέπει $\mathrm{B} = 0$.
- Ακόμη $\Phi(\rho, \varphi, \mathrm{z} = 0) = 0 \Rightarrow$
$$\mathrm{Esinh}(0) + \mathrm{Fcosh}(0) = 0 \Rightarrow F = 0.$$
- $\Phi(\rho = a, \varphi, \mathrm{z}) = 0 \Longrightarrow AJ_{\nu}(\kappa a) = 0.$

Οι λύσεις της Bessel είναι $\mathrm{J}_{\nu n}(x_{\nu n}) = 0$. Ο πρώτος δείκτης δηλώνει την ταυτότητα της Bessel και ο δεύτερος τον αριθμό των ριζών για την συγκεκριμένη Bessel. Άρα $\kappa_{\nu n} = \frac{x_{\nu n}}{a}$. Παρακάτω φαίνονται μερικά παραδείγματα συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους.

Γραφική απεικόνιση των Bessel πρώτης τάξης



Απεικονίζονται οι τρεις πρώτες συναρτήσεις Bessel πρώτης τάξης ($\nu = 0, \nu = 1, \nu = 2$). Η μεταβλητή x είναι η $\kappa\rho$ ($x = \kappa\rho$).

Ολοκλήρωση εφαρμογής συνοριακών συνθηκών

- Σύμφωνα με τα παραπάνω η λύση για το δυναμικό γράφεται

$$\Phi(\rho,\varphi,\mathrm{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n}\mathrm{J}_{\nu}(\kappa_{\nu n}\rho)\mathrm{E}_{\nu n}\mathrm{sinh}(\kappa_{\nu n}z)[\mathrm{C}_{\nu n}\sin(\nu\varphi) + \mathrm{D}_{\nu n}\cos(\nu\varphi)] \Rightarrow$$

$$\Phi(\rho,\varphi,\mathrm{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_{\nu}(\kappa_{\nu n}\rho)\mathrm{sinh}(\kappa_{\nu n}z)[\mathrm{A}_{\nu n}\sin(\nu\varphi) + \mathrm{B}_{\nu n}\cos(\nu\varphi)].$$

- Η τελευταία συνοριακή συνθήκη είναι

$$\Phi(\rho,\varphi,\mathrm{z}=\mathrm{L}) = \mathrm{V}_1(\rho,\varphi) \Rightarrow$$

$$\mathrm{V}_1(\rho,\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_{\nu}(\kappa_{\nu n}\rho)\mathrm{sinh}(\kappa_{\nu n}L)[\mathrm{A}_{\nu n}\sin(\nu\varphi) + \mathrm{B}_{\nu n}\cos(\nu\varphi)].$$

Οι σχέσεις ορθογωνιότητας

- Θα κάνουμε χρήση δύο σχέσεων ορθογωνιότητας για να προχωρήσουμε:

1. Ορθογωνιότητα συναρτήσεων Bessel:

$$\int_0^a J_\nu(\kappa_{\nu n'}\rho)J_\nu(\kappa_{\nu n}\rho)\rho d\rho = \frac{\alpha^2}{2}[\mathrm{J}_{\nu+1}(\kappa_{\nu n}\alpha)]^2\delta_{n'n}.$$

2. Ορθογωνιότητα τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos\nu'\varphi\right]\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos\nu\varphi\right]d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}sin\nu'\varphi\right]\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}sin\nu\varphi\right]d\varphi = \delta_{\nu'\nu}\,.$$

Εφαρμογή πρώτης σχέσης ορθογωνιότητας

- Εφαρμόζουμε την σχέση ορθογωνιότητας για τις συναρτήσεις Bessel και έχουμε:

$$\int_0^{\alpha} \mathrm{J}_\nu\,(\kappa_{\nu n'}\rho)\rho V(\rho,\varphi)d\rho =$$

$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} sinh(\kappa_{\nu n}L)\,[A_{\nu n}\sin(\nu\varphi) + \mathrm{B}_{\nu n}\cos(\nu\varphi)]$
$\int_0^{\alpha} \mathrm{J}_\nu\,(\kappa_{\nu n'}\rho)J_\nu(\kappa_{\nu n}\rho)\rho d\rho =$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} sinh(\kappa_{\nu n}L)\,[A_{\nu n}\sin(\nu\varphi) + \mathrm{B}_{\nu n}\cos(\nu\varphi)]\,\frac{\alpha^2}{2}[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n}a)]^2\delta_{n'n} =$$

$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sinh(\kappa_{\nu n'}L)\frac{\alpha^2}{2}[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n'}a)]^2 A_{\nu n'}\sin(\nu\varphi) +$
$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sinh(\kappa_{\nu n'}L)\frac{\alpha^2}{2}[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n'}a)]^2 B_{\nu n'}\cos(\nu\varphi).$

Εφαρμογή δεύτερης σχέσης ορθογωνιότητας

- Καταλήξαμε ότι

$$\int_0^{\alpha} \mathrm{J}_\nu\,(\kappa_{\nu n'}\rho)\rho V(\rho,\varphi)d\rho =$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sinh(\kappa_{\nu n'}L)\,\frac{\alpha^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n'}a)]^2 A_{\nu n'} \sin(\nu\varphi) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sinh(\kappa_{\nu n'}L)\,\frac{\alpha^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n'}a)]^2 B_{\nu n'} \cos(\nu\varphi).$$

- Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους συντελεστές θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έτσι θα έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} sin\nu'\varphi d\varphi \int_0^{\alpha} \mathrm{J}_\nu\,(\kappa_{\nu n'}\rho)\rho V(\rho,\varphi)d\rho =$$

$$\sqrt{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \sinh(\kappa_{\nu n'}L)\,\frac{\alpha^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n'}a)]^2 A_{\nu n'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\nu'\varphi)\,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\nu\varphi)\,d\varphi +$$

$$\sqrt{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \sinh(\kappa_{\nu n'}L)\,\frac{\alpha^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n'}a)]^2 \mathrm{B}_{\nu n'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\nu'\varphi)\,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\nu\varphi) d\varphi$$

Εύρεση συντελεστή $A_{\nu n}$

- Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται, διότι είναι μηδέν το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\nu'\varphi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\nu\varphi) d\varphi$.
- Άρα καταλήγουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\nu'\varphi) d\varphi \int_0^{\alpha} \mathrm{J}_\nu\,(\kappa_{\nu n'}\rho)\rho V(\rho,\varphi) d\rho =$$

$$\sqrt{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sinh(\kappa_{\nu n'} L) \frac{\alpha^2}{2} [J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n'} a)]^2\, \mathrm{A}_{\nu n'} \delta_{\nu\nu'} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}_{\nu n} = \frac{2}{\pi\alpha^2} \frac{1}{\sinh(\kappa_{\nu n} L)} \frac{1}{[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n} a)]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \sin(\nu\varphi) \mathrm{J}_\nu\,(\kappa_{\nu n}\rho)\rho V(\rho,\varphi) d\rho d\varphi$$

Εύρεση συντελεστή $\mathrm{B}_{\nu n}$ και υποπρόβλημα 2

- Για να βρούμε τον συντελεστή $\mathrm{B}_{\nu n}$, η μόνη αλλαγή είναι ότι χρησιμοποιούμε την σχέση ορθογωνιότητας
$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos\nu'\varphi\right]\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos\nu\varphi\right]d\varphi=\delta_{\nu'\nu}.$$
- Έτσι βρίσκουμε ότι
$$\mathrm{B}_{\nu n}=\frac{2}{\pi\alpha^2}\frac{1}{\sinh(\kappa_{\nu n}L)}\frac{1}{[J_{\nu+1}(\kappa_{\nu n}a)]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\cos(\nu\varphi)\mathrm{J}_\nu\,(\kappa_{\nu n}\rho)\rho V(\rho,\varphi)d\rho d\varphi\,.$$
- Στο υποπρόβλημα 2 οι συνοριακές μας συνθήκες είναι $V_2(\rho,\varphi)$ στην κάτω βάση και μηδέν στις υπόλοιπες περιοχές. Η διαδικασία είναι η ίδια με το υποπρόβλημα 1, μόνο που η γενική λύση για το δυναμικό είναι τώρα της μορφής
$$\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_\nu(\kappa_{\nu n}\rho)\sinh(\kappa_{\nu n}(z-\mathrm{L}))[\mathrm{A}_{\nu n}\sin(\nu\varphi)+\mathrm{B}_{\nu n}\cos(\nu\varphi)].$$

Υποπρόβλημα 3

- Στο υποπρόβλημα 3 η παράπλευρη επιφάνεια έχει δυναμικό $V_3(\rho,\varphi)$ και οι βάσεις μηδενικό δυναμικό.
- Επειδή επιθυμούμε μηδενικό δυναμικό σε πάνω και κάτω βάση θα πρέπει οι λύσεις $Z(z)$ να είναι ημίτονα και συνημίτονα (και όχι υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα).
- Έτσι, έχοντας ως αφετηρία την εξίσωση Laplace, γράφουμε:

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}R'+\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{Q}Q''=-\frac{Z''}{Z}=\kappa^2\Rightarrow$$

$$\mathrm{Z}''+\kappa^2 Z=0\Rightarrow Z(z)=Asin(kz)+Bcos(kz)$$

- Περιμένουμε οι ακτινικές λύσεις να μην είναι της ίδιας μορφής, όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, καθώς έχουμε θέσει με $+\kappa^2$ και όχι $-\kappa^2$.

Η ακτινική εξίσωση

- Εφ' όσον προσδιορίσαμε την λύση $Z(z)$ γράφουμε:

$$\frac{\rho^2}{R}R'' + \rho\frac{1}{R}R' + \frac{1}{Q}Q'' - \kappa^2\rho^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho^2}{R}R'' + \rho\frac{1}{R}R' - \kappa^2\rho^2 = -\frac{Q''}{Q} = +\nu^2 \Longrightarrow$$

$$Q'' + \nu^2 Q = 0 \Longrightarrow Q(\varphi) = Csin\nu\varphi + Dcos\nu\varphi$$

- Έτσι η ακτινική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\kappa^2\rho}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \left(1 + \frac{\nu^2}{\kappa^2\rho^2}\right)R = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2R}{d(\kappa\rho)^2} + \frac{1}{\kappa\rho}\frac{d\mathrm{R}}{d(\kappa\rho)} - \left(1 + \frac{\nu^2}{\kappa^2\rho^2}\right)R = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\mathrm{R}}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$$

όπου έχουμε θέσει $x = \kappa\rho$.

Λύσεις

- Η παραπάνω εξίσωση είναι η λεγόμενη τροποποιημένη εξίσωση Bessel. Για να την φέρουμε στην ήδη γνωστή μορφή της εξίσωσης Bessel, θέτουμε $x = iy$.
- Έτσι, καταλήγουμε στην γνωστή εξίσωση Bessel:

$$\frac{d^2R}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dR}{dy}\left[1 - \frac{\nu^2}{y^2}\right]R = 0.$$

- Οι λύσεις είναι οι $\mathrm{I}_\nu(x) = i^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(ix)$ και

$\mathrm{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\mathrm{H}_\nu{}^{(1)}(ix)$. Η συνάρτηση H_ν είναι η συνάρτηση Hankel για την οποία ισχύει:

$$\mathrm{H}_\nu{}^{(1)}(ix) = \mathrm{J}_\nu(x) + iN_\nu(x),$$
$$\mathrm{H}_\nu{}^{(2)}(ix) = \mathrm{J}_\nu(x) - iN_\nu(x).$$

- Η γενική λύση είναι $\mathrm{R}(\rho) = \mathrm{E}\mathrm{I}_\nu(\kappa\rho) + FK_\nu(\kappa\rho)$.

Η λύση για το δυναμικό

- Επειδή το δυναμικό πρέπει να είναι πεπερασμένο για $\rho \to 0$ θα πρέπει $F = 0$.
- Η γενική λύση γράφεται λοιπόν ως

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_\nu\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) [A_{\nu n} sin\nu\varphi + B_{\nu n} cos\nu\varphi]$$

- Μας μένει να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία συνοριακή συνθήκη: $V_3(\rho, \varphi) = \Phi(\rho = b, \varphi, z) \Rightarrow$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_\nu\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) [A_{\nu n} sin\nu\varphi + B_{\nu n} cos\nu\varphi] = V_3(\rho, \varphi)$$

- Οι συναρτήσεις $I_\nu\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)$ είναι σταθερές. Άρα δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε την σχέση ορθογωνιότητας που αφορά τις Bessel.
- Προχωράμε κάνοντας χρήση της σχέσης ορθογωνιότητας που αφορά τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές και έχουμε επιλύσει το πρόβλημα.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Εφαρμογή στις κυλινδρικές συντεταγμένες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Εικόνα 1:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bessel_Functions_(1st_Kind,_n%3D0,1,2).svg