Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 10: Εφαρμογές στις σφαιρικές και εισαγωγή στις κυλινδρικές συντεταγμένες

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

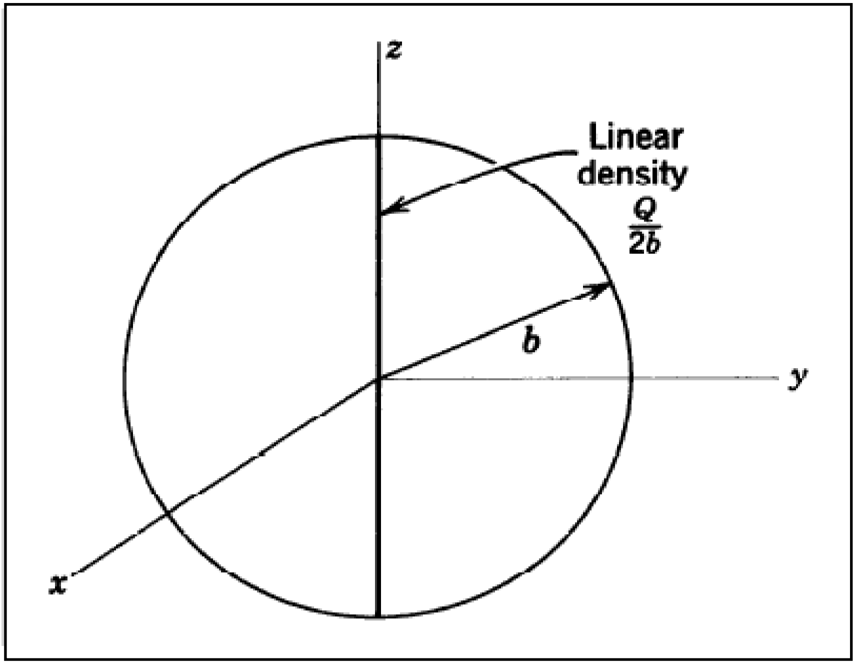
- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει μερικές ακόμη εφαρμογές για την ολοκλήρωση του μέρους που αφορά τις σφαιρικές συντεταγμένες και η εισαγωγή στην μελέτη της εξίσωσης Laplace στις κυλινδρικές συντεταγμένες.

Περιεχόμενα ενότητας

- Εφαρμογές στις σφαιρικές συντεταγμένες
- Η εξίσωση Laplace στις κυλινδρικές

Εφαρμογή 1

Εικόνα 1



- Στο πρόβλημά μας έχουμε μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου μήκους $2b$, ολικού φορτίου Q, στο εσωτερικό γειωμένης, αγώγιμης σφαίρας ακτίνας b. Η γραμμή φορτίου είναι τοποθετημένη όπως στο σχήμα. Ψάχνουμε το δυναμικό στο εσωτερικό της σφαίρας.

Εύρεση πυκνότητας $\rho(\boldsymbol{x}')$

- Όπως συνήθως, θα εκφράσουμε την πυκνότητα με συναρτήσεις δέλτα.
- Το φορτίο πρέπει να μηδενίζεται παντού εκτός από τις γωνίες $\theta' = 0, \theta' = \pi$.
- Άρα η $\rho(\boldsymbol{x}')$ θα είναι της μορφής

$$\rho(\boldsymbol{x}') = \mathrm{A}[\delta(cos\theta' - 1) + \delta(cos\theta' + 1)].$$

- Ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\int \rho(\boldsymbol{x}')\, d^3x' = \int \mathrm{A}[\delta(cos\theta' - 1) + \delta(cos\theta' + 1)]d^3x' =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \mathrm{A}[\delta(cos\theta' - 1) + \delta(cos\theta' + 1)]\, sin\theta' d\theta' \int_0^{\infty} r'^2\, dr'$$

Υπολογισμός πυκνότητας $\rho(\boldsymbol{x}')$- Συνέχεια

- Όμως $Q = \int \rho(\boldsymbol{x}')\, d^3x'$.
- Επομένως

$$Q = 2\pi \mathrm{A} \int_0^{\pi} [\delta(cos\theta' - 1) + \delta(cos\theta' + 1)]\, d(-cos\theta') \int_0^b r'^2\, dr' \Rightarrow$$

$$Q = 2\pi \mathrm{A}(1+1) \int_0^b r'^2\, dr'.$$

- Παρατηρούμε ότι το φορτίο εξαρτάται από το ολοκλήρωμα της απόστασης. Επειδή η γραμμική πυκνότητα $\lambda = \frac{Q}{2b}$ πρέπει να είναι σταθερή, πολλαπλασιάζουμε την έκφραση της $\rho(\boldsymbol{x}')$ με τον παράγοντα $\frac{1}{r'^2}$.
- Έτσι θα έχουμε $\rho(\boldsymbol{x}') = \mathrm{A}\frac{1}{r'^2}[\delta(cos\theta' - 1) + \delta(cos\theta' + 1)] \Rightarrow$

$$Q = 4\pi \mathrm{A} \int_0^b dr' \Rightarrow A = \frac{Q}{4\pi b}.$$

Τελική έκφραση πυκνότητας $\rho(\boldsymbol{x}')$- Συνάρτηση Green

- Άρα η τελική έκφραση για την $\rho(\boldsymbol{x}')$ είναι

$$\rho(\boldsymbol{x}') = \frac{Q}{4\pi b}\frac{1}{r'^2}[\delta(cos\theta' - 1) + \delta(cos\theta' + 1)].$$

- Η συνάρτηση Green για το εσωτερικό πρόβλημα είναι

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 4\pi\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left[\frac{r_<{}^l}{r_>{}^{(l+1)}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right]Y_{lm}{}^*(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$$

- Το πρόβλημά μας παρουσιάζει αζιμουθιακή συμμετρία. Άρα οι σφαιρικές αρμονικές θα δίνονται από την έκφραση

$$\mathrm{Y}_{l0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\mathrm{P}_l(cos\theta).$$

- Άρα η συνάρτηση Green γίνεται

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \sum_{l,m}\left[\frac{r_<{}^l}{r_>{}^{(l+1)}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right]\mathrm{P}_l(cos\theta')\mathrm{P}_l(cos\theta).$$

Το δυναμικό

- Έχοντας προσδιορίσει την πυκνότητα $\rho(x')$ και την συνάρτηση Green, είμαστε έτοιμοι να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Green για την εύρεση του δυναμικού.
- Επιβιώνει μόνο ο πρώτος όρος του θεωρήματος Green, διότι οι συνοριακές μας συνθήκες επιβάλλουν μηδέν το δυναμικό της επιφάνειας.
- Άρα $\Phi(\mathbf{x}) = \int \rho(\boldsymbol{x}')\, G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}' =$

$$\int \sum_{l,m} \left[\frac{r_<{}^l}{r_>{}^{(l+1)}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right] \mathrm{P}_l(cos\theta')\mathrm{P}_l(cos\theta)$$

$$\frac{Q}{4\pi b}\frac{1}{r'^2}[\delta(cos\theta' - 1) + \delta(cos\theta' + 1)]d^3\boldsymbol{x}' =$$

$$\sum_l P_l\,(cos\theta)\frac{Q}{2b}\{P_l(1) + P_l(-1)\}\int_0^b \left[\frac{r_<{}^l}{r_>{}^{(l+1)}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right] dr'\,.$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος

- Το ολοκλήρωμα $\int_0^b \left[\frac{{r_<}^l}{{r_>}^{(l+1)}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right] dr'$ το σπάμε σε δύο προκειμένου να υπολογιστεί:

$$\int_0^b \left[\frac{{r_<}^l}{{r_>}^{(l+1)}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right] dr' =$$

$$\int_0^r \left[\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right] dr' + \int_r^b \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{b}\left(\frac{rr'}{b^2}\right)^l\right] dr' =$$

$$\frac{2l+1}{l(l+1)}\left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^l\right]$$

- Άρα η τελική έκφραση για το δυναμικό είναι

$$\Phi(\mathrm{x}) = \sum_l P_l\,(cos\theta)\,\frac{Q}{2b}\{P_l(1) + P_l(-1)\}\,\frac{2l+1}{l(l+1)}\left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^l\right]$$

Η συνάρτηση Green από πρώτες αρχές

- Είδαμε πώς κατασκευάζεται η συνάρτηση Green με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών.
- Τώρα θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση Green από πρώτες αρχές: Η συνάρτηση Green ικανοποιεί την εξίσωση Poisson,

$\nabla^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, με $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 0$ για x' on S.

- Η συνάρτηση δέλτα σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$\delta(x-x') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(cos\theta - cos\theta')$.

- Κάνοντας χρήση της σχέσης πληρότητας για τις σφαιρικές αρμονικές η συνάρτηση δέλτα μπορεί να γραφεί ως

$$\delta(x-x') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{l,m} Y_{lm}{}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Ακτινική εξίσωση

- Η συνάρτηση Green θα έχει ανάπτυγμα της μορφής

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \sum_{l,m} A_{lm}(r|r',\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$$

- Αντικαθιστούμε στην εξίσωση Poisson και έχουμε για την μορφή του παράγοντα $\mathrm{A}_{lm}(r|r',\theta',\varphi')$ ότι

$\mathrm{A}_{lm}(r|r',\theta',\varphi') = g_l(r,r')Y_{lm}{}^*(\theta',\varphi')$ και ισχύει η εξίσωση

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(rg_l(r,r')\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}g_l(r,r') = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r').$$

- Η λύση είναι

$$g_l(r,r') = \begin{cases} \mathrm{A}r^l + Br^{-(l+1)}, r < r' \\ \mathrm{A}'r^l + B'r^{-(l+1)}, r > r' \end{cases}$$

- Οι συντελεστές προσδιορίζονται με βάση τις συνοριακές συνθήκες .

Εφαρμογή 2

- Έστω ότι έχουμε δύο ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνες a, b και $b > a$.
- Οι συνοριακές μας συνθήκες επιβάλουν μηδενισμό της Green και άρα της $g_l(r, r')$ για $r = a$ και $r = b$. Για παράδειγμα, για $r = b$ έχουμε

$\mathrm{A}b^l + Bb^{-(l+1)} = 0 \Rightarrow A = -Bb^{-(2l+1)}$. Άρα

$g_l(r, r') = \mathrm{B}\left[\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}}\right]$. Οι περιπτώσεις μας λοιπόν φαίνονται παρακάτω:

$$g_l(r, r') = \begin{cases} \mathrm{A}\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right), r < r' \\ B'\left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}}\right), r > r' \end{cases}$$

- Επειδή η συνάρτηση Green παρουσιάζει την συμμετρία $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$, (και άρα $g_l(r, r') = g_l(r', r\,)$) μπορούμε να γράψουμε

$$g_l(r, r') = \mathrm{C}\left({r_<}^l - \frac{a^{2l+1}}{{r_<}^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{{r_>}^{l+1}} - \frac{{r_>}^l}{b^{2l+1}}\right)$$

Προσδιορισμός σταθεράς C

- Η σταθερά C πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να μας επιτρέπεται να γράψουμε την $g_l(r,r')$ στην παραπάνω μορφή.
- Αφετηρία για τον προσδιορισμό της σταθεράς είναι η εξίσωση
$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r g_l(r,r')\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r,r') = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r').$$
- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με r και ολοκληρώνουμε στο διάστημα από $r = r' - \varepsilon$ έως $r = r' + \varepsilon$ (όπου ε είναι πολύ μικρό). Το ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου είναι μηδέν και άρα :
$$\left\{\frac{d}{dr}[r g_l(r,r')]\right\}_{r'+\varepsilon} - \left\{\frac{d}{dr}[r g_l(r,r')]\right\}_{r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}$$

Υπολογισμός των όρων

- Θα υπολογίσουμε το κάθε όρο ξεχωριστά. Για τον πρώτο όρο έχουμε:

Για $r = r' + \varepsilon, r_> = r, r_< = r'$. Επομένως

$$\left\{\frac{d}{dr}[rg_l(r,r')]\right\}_{r'+\varepsilon} = \mathrm{C}\left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right)\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}}\right)\right]_{r=r'}$$

$$= -\frac{C}{r'}\left[1 - \left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[l + (l+1)\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]$$

- Ομοίως για τον δεύτερο όρο έχουμε

$$\left\{\frac{d}{dr}[rg_l(r,r')]\right\}_{r'-\varepsilon} = \frac{\mathrm{C}}{r'}\left[l + 1 + l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[1 - \left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]$$

Η συνάρτηση Green

- Αντικαθιστώντας τους όρους που υπολογίσαμε στην εξίσωση

$$\left\{\frac{d}{dr}[rg_l(r,r')]\right\}_{r'+\varepsilon} - \left\{\frac{d}{dr}[rg_l(r,r')]\right\}_{r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}$$

βρίσκουμε ότι $C = \frac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]}$.

- Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση Green γι' αυτό το πρόβλημα είναι

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}{}^{*}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \left(r_<{}^{l} - \frac{a^{2l+1}}{r_<{}^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>{}^{l+1}} - \frac{r_>{}^{l}}{b^{2l+1}}\right)$$

Εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες

- Για τις κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει
$$x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi, z = z.$$
- Η εξίσωση Laplace γράφεται:
$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$
- Θα λυθεί με την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών θεωρώντας λύση της μορφής
$$\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)Q(\varphi)Z(z).$$
- Αντικαθιστούμε την λύση στην εξίσωση, διαιρούμε με την λύση και καταλήγουμε στην
$$\frac{1}{R(\rho)}\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R(\rho)}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2 Q(\varphi)}\frac{d^2Q(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0.$$

Η λύση Z(z), Q(φ)

- Όπως συνήθως, θέτουμε με μια σταθερά:

$$\frac{1}{\mathrm{R}(\rho)}\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho R(\rho)}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2 Q(\varphi)}\frac{d^2Q(\varphi)}{d\varphi^2}$$
$$=-\frac{1}{\mathrm{Z(z)}}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=-\kappa^2.$$

- Άρα $\mathrm{Z}''-\kappa^2\mathrm{Z}=0\Rightarrow \mathrm{Z(z)}=e^{\pm\kappa z}.$

- $\frac{\rho^2}{\mathrm{R}(\rho)}\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\kappa^2\rho^2=-\frac{1}{Q(\varphi)}\frac{d^2Q(\varphi)}{d\varphi^2}=\nu^2.$

- Επομένως $Q''(\varphi)+\nu^2Q(\varphi)=0\Rightarrow$

$$Q(\varphi)=\mathrm{A}_\nu cos\nu\varphi+\mathrm{B}_\nu sin\nu\varphi.$$

Ακτινική εξίσωση

- Η ακτινική εξίσωση είναι
$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\left(-\frac{\nu^2}{\rho^2}+\kappa^2\right)R(\rho)=0.$$
- Πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $x=\kappa\rho$ και η εξίσωση γίνεται:
$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0.$$
- Αυτή είναι η εξίσωση Bessel.

Λύση της Bessel

- Η λύση της Bessel είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους που δίνεται από την σχέση $J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}$.
- Μια άλλη λύση είναι η $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$. Όμως όταν ο ν είναι ακέραιος, δεν υπάρχει γραμμική ανεξαρτησία με την $J_\nu(x)$ κι έτσι πρέπει να βρεθεί άλλη λύση.
- Αυτή είναι η συνάρτηση Neumann ή Bessel δευτέρου είδους. Αποτελεί την δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση.
- Ορίζεται ως $\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin(\nu x)}$.
- Άρα η γενική ακτινική λύση είναι της μορφής

$$R(\rho) = \mathrm{A}_{\nu\kappa}\mathrm{J}_\nu(\kappa\rho) + \mathrm{B}_{\nu\kappa}\mathrm{N}_\nu(\kappa\rho).$$

Συμπεριφορά των λύσεων στα όρια $x \to 0, x \to \infty$

- Για $x \to 0$, έχουμε: $J_\nu(x) \propto x^\nu$ και

$\mathrm{N}_\nu(x) \propto lnx$, για $\nu = 0$, ενώ $\mathrm{N}_\nu(x) \propto \frac{1}{x^\nu}$ για $\nu \neq 0$.

- Για $x \to \infty$, έχουμε $J_\nu(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$ και

$\mathrm{N}_\nu(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x}} sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

- Η γενική λύση της Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι λοιπόν:

$\Phi(\rho, \varphi, z) = (\mathrm{A}_{\nu\kappa}\mathrm{J}_\nu(\kappa\rho) + \mathrm{B}_{\nu\kappa}\mathrm{N}_\nu(\kappa\rho))(\mathrm{C}_{\nu\kappa}cos\nu\varphi + \mathrm{D}_{\nu\kappa}sin\nu\varphi)(\mathrm{E}_{\kappa\nu}e^{\kappa z} + F_{\kappa\nu}e^{-\kappa z})$.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Εφαρμογή στις σφαιρικές και εισαγωγή στις κυλινδρικές συντεταγμένες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics