# Κλασική Ηλεκτροδυναμική

## Ενότητα 9: Η συνάρτηση Green σε σφαιρικές συντεταγμένες

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

# Σκοποί ενότητας

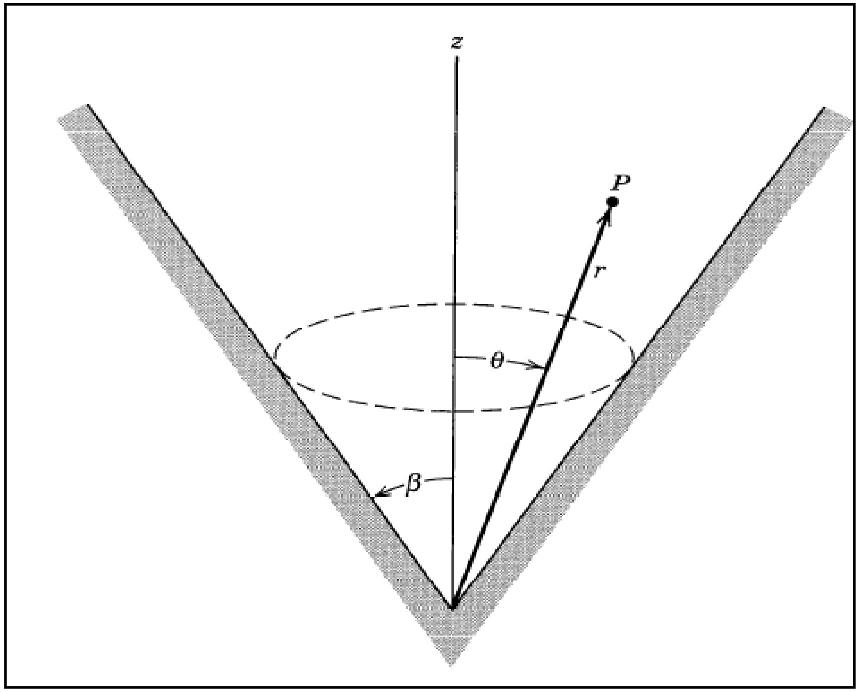
- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει επιπλέον εφαρμογές στην σφαιρική συμμετρία και να εντάξει στην μελέτη των προβλημάτων τις σφαιρικές αρμονικές. Ακόμη μελετάται η μορφή της συνάρτησης Green στις σφαιρικές συντεταγμένες.

# Περιεχόμενα ενότητας

- Υπολογισμός πεδίου σε κωνική τομή
- Σφαιρικές αρμονικές
- Η συνάρτηση Green σε σφαιρικές συντεταμένες
- Εφαρμογές

# Πεδίο σε κωνική τομή-Το πρόβλημα

## Εικόνα 1




## Επεξήγηση προβλήματος

- Θα θεωρήσουμε ένα πρόβλημα, το οποίο παρουσιάζει μεν αζιμουθιακή συμμετρία, αλλά σε αντίθεση με όσα έχουμε πει μέχρι στιγμής, το εύρος της γωνίας $\theta$ είναι συγκεκριμένο. Έχουμε δηλαδή ότι $0 \leq \theta \leq \beta$ και $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Με λίγα λόγια, η περιοχή ενδιαφέροντος περιλαμβάνει μόνο τον βόρειο πόλο ($\theta = 0$) και όχι και τον νότιο ($\theta = \pi$) όπως συνήθως.
- Έχουμε λοιπόν, μια κωνική τομή με πεπερασμένο δυναμικό στην επιφάνειά της που σχηματίζει γωνία $\beta$ με τον άξονα $z$ και ψάχνουμε το δυναμικό και το πεδίο στο σημείο P.

# Η γωνιακή εξίσωση του προβλήματος

- Στις προηγούμενες περιπτώσεις, όπου υπήρχε η συμμετρία, αναπτύσσαμε την σειρά που αφορούσε τα πολυώνυμα Legendre γύρω από το σημείο $x = 0$. Τώρα που η συμμετρία έχει χαθεί, ίσως είναι πιο βολικό να αναπτύξουμε την σειρά γυρώ από τον ένα πόλο, δηλ. το σημείο $x = 1$.
- Έτσι, πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητής. Η νέα μας μεταβλητή είναι $\xi = \frac{1}{2}(1 - x)$.
- Άρα η εξίσωση Legendre παίρνει την μορφή

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi(1-\xi)\frac{dP}{d\xi}\right] + \nu(\nu+1)\mathrm{P} = 0.$$

# Λύση

- Θεωρούμε λύση της μορφής $P(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$.
- Αντικαθιστούμε την λύση στην εξίσωση και βρίσκουμε την σχέση που έχουν οι συντελεστές μεταξύ τους. Καταλήγουμε ότι

$$\mathrm{P}_\nu(\xi) = 1 + \frac{(-\nu)(\nu+1)}{1!\,1!}\xi + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)}{2!\,2!}\xi^2 + \cdots$$

- Όταν $\nu$ ακέραιος, παρατηρούμε ότι η παραπάνω σειρά είναι ουσιαστικά τα γνωστά πολυώνυμα Legendre. Όταν ο $\nu$ δεν είναι ακέραιος (να σημειώσουμε ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν υπάρχει κάποια συνθήκη που να περιορίζει τον $\nu$ σαν ακέραιο, σε αναλογία με το αντίστοιχο πρόβλημα με τις πλάκες σε πολικές συντεταγμένες που είδαμε σε προηγούμενη ενότητα), τότε η παραπάνω σειρά αντιπροσωπεύει μια λύση που είναι γνωστή ως «συνάρτηση Legendre πρώτου είδους και τάξης $\nu$»).

# Υπεργεωμετρικές συναρτήσεις

- Η σειρά που μόλις εξάγαμε ανήκει σε μια ευρύτερη κατηγορία συναρτήσεων που ονομάζονται υπεργεωμετρικές.
- Συγκεκριμένα αποτελεί ένα παράδειγμα της υπεργεωμετρικής συνάρτησης

$$ {}_2F_1(a,b,c,z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots $$

- Επομένως η συνάρτηση Legendre συναρτήσει των υπεργεωμετρικών συναρτήσεων γράφεται ως

$$ \mathrm{P}_\nu(x) = {}_2F_1(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1-x}{2}) $$

# Το δυναμικό

- Η λύση της εξίσωσης Laplace λαμβάνοντας υπ' οψη ότι δεν επιθυμούμε απειρισμό του δυναμικού καθώς $r \to 0$, είναι της μορφής
$$\Phi(\mathrm{r},\theta) = \mathrm{A}r^{\nu}\mathrm{P}_{\nu}(cos\theta).$$
- Θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι μηδέν για $\theta = \beta$ και άρα $P_{\nu}(cos\beta) = 0$. Αυτή είναι η συνθήκη που αφορά τα $\nu$.
- Από αυτήν την συνθήκη βλέπουμε ότι η εξίσωση έχει μια απειρία λύσεων,$\nu = \nu_k$, τις οποίες ταξινομούμε: Για $\nu = \nu_1$, $x = cos\beta$ είναι η πρώτος μηδενισμός του $\mathrm{P}_{\nu_1}(x)$. Για $\nu = \nu_2$, $\mathrm{x} = \cos\beta$, είναι ο δεύτερος μηδενισμός του $P_{\nu_2}(x)$ κτλ..
- Η πλήρης λύση του δυναμικού γράφεται ως
$$\Phi(\mathrm{r},\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(cos\theta).$$
- Αν ενδιαφερόμαστε για την λύση στην γειτονιά του $r = 0$, κρατάμε μόνο τον πρώτο όρο

$\Phi(\mathrm{r},\theta) = \mathrm{A}r^{\nu}\mathrm{P}_{\nu}(cos\theta)$, όπου $\nu$ είναι η μικρότερη ρίζα της $P_{\nu}(cos\beta) = 0$.

# Το ηλεκτρικό πεδίο

- Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$\mathrm{E}_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cong -\nu \mathrm{A} r^{\nu-1} \mathrm{P}_\nu(cos\theta),$$

$$\mathrm{E}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \cong \mathrm{A} r^{\nu-1} sin\theta P'_\nu(cos\theta).$$

- Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι

$\sigma(r) = -\frac{\mathrm{E}_\theta}{4\pi}$ για $\theta = \beta$. Άρα

$\sigma(r) \cong -\frac{\mathrm{A}}{4\pi} r^{\nu-1} sin\beta P'_\nu(cos\beta).$

# Γενικευμένα πολυώνυμα Legendre

- Όταν μελετούσαμε την εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες είχαμε βρει ότι

$$Q(\varphi) = e^{im\varphi} \text{ και } \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x) = 0\,.$$

- Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί με προβλήματα αζιμουθιακής συμμετρίας, δηλ. έχουμε θέσει $m = 0$. Σε περίπτωση που δεν έχουμε αζιμουθιακή συμμετρία ($m \neq 0$) η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι τα γενικευμένα πολυώνυμα Legendre. Δίνονται από τον τύπο του Rodriguez:

$$P_l{}^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \text{ με } |m| \leq l.$$

- Ακόμη ισχύει ότι $P_l{}^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!P_l{}^m(x)}{(l+m)!}$.

- Η σχέση ορθογωνιότητας είναι

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}{}^m(x)P_l{}^m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l'l}.$$

# Σφαιρικές αρμονικές

- Γενικά η λύση της Laplace αποτελείται από γινόμενα των παραγόντων $r, \theta, \varphi$. Μπορούμε να ενοποιήσουμε το γωνιακό κομμάτι.
- Από την ενοποίηση των γωνιακών παραμέτρων προκύπτουν ορθοκανονικές συναρτήσεις που ονομάζονται «σφαιρικές αρμονικές».
- Οι σφαιρικές αρμονικές, λαμβάνοντας υπ' όψη και την κανονικοποίησή τους, θα δίνονται από την σχέση

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l{}^m(cos\theta)e^{im\varphi}.$$

- Ακόμη, $Y_{l,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{lm}{}^*(\theta,\varphi)$.

# Σχέση ορθογωνιότητας και πληρότητας σφαιρικών αρμονικών

- Η σχέση ορθογωνιότητας είναι

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \, \mathrm{Y}_{l'm'}{}^{*}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm}.$$

- Η σχέση πληρότητας είναι

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}{}^{*}(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\delta(cos\theta - cos\theta').$$

- Άρα η γενική λύση για το δυναμικό συναρτήσει των σφαιρικών αρμονικών γράφεται ως

$$\Phi(\mathrm{r},\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^{l} + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

# Παράδειγμα χρήσης σφαιρικών αρμονικών

- Έστω μια σφαίρα ακτίνας $a$ με τις εξείς συνοριακές συνθήκες για το δυναμικό:

$V\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \varphi\right) = \begin{cases} +\mathrm{V}, 0 \le \varphi \le \pi \\ -\mathrm{V}, \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$ και $V\left(\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right) = 0.$

- Ψάχνουμε το δυναμικό στο εσωτερικό της σφαίρας.
- Επειδή δεν επιθυμούμε απειρισμό του δυναμικού όταν $r \to 0$, η λύση θα είναι της μορφής

$\Phi(\mathrm{r}, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$

- Αν προσδιορίσουμε τον συντελεστή $A_{lm}$ η ακριβής μορφή της λύσης θα είναι γνωστή.
- Για $r = a$ έχουμε

$$\Phi(\alpha, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} A_{lm}\, a^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

# Προσδιορισμός συντελεστή

- Όπως συνήθως σε αυτές τις περιπτώσεις εκμεταλλευόμαστε την σχέση ορθογωνιότητας:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Y}_{l'm'}{}^{*}(\theta,\varphi)\,\Phi(\alpha,\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \sum_{l,m} A_{lm}\, a^{l} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Y}_{l'm'}{}^{*}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\, sin\theta d\theta \Longrightarrow$$

$$\mathrm{A}_{lm} = a^{-l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Y}_{lm}{}^{*}\,(\theta,\varphi)\Phi(\alpha,\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

- Στην συνέχεια «σπάμε» κατάλληλα το ολοκλήρωμα ανάλογα με την μορφή του $\Phi(\alpha,\theta,\varphi)$.

# Θεώρημα προσθετικότητας και δυναμικό μοναδιαίου φορτίου

- Σύμφωνα με το θεώρημα προσθετικότητας των σφαιρικών αρμονικών,αν δύο διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{x}'$ με σφαιρικές συντεταγμένες $(r, \theta, \varphi)$ και $(r', \theta', \varphi')$ αντίστοιχα σχηματίζουν γωνία $\gamma$, τότε

$$\mathrm{P}_l(cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}{}^{*}(\theta', \varphi') \mathrm{Y}_{lm}(\theta, \varphi).$$

- Αυτό το ανάπτυγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσουμε το δυναμικό του μοναδιαίου φορτίου, συναρτήσει των σφαιρικών αρμονικών.
- Στην προηγούμενη ενότητα είχαμε αναφέρει ότι

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{r_<{}^{l}}{r_>{}^{l+1}} P_l(cos\gamma).$$

- Κάνοντας χρήση του θεωρήματος προσθετικότητας το δυναμικό μοναδιαίου φορτίου, λμαβάνει την μορφή:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<{}^{l}}{r_>{}^{l+1}} Y_{lm}{}^{*}(\theta', \varphi') \mathrm{Y}_{lm}(\theta, \varphi).$$

# Συνάρτηση Green σε σφαίρα

- Σε προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι η συνάρτηση Green σε σφαίρα ακτίνας $a$ είναι το δυναμικό που οφείλεται σε μοναδιαίο φορτίο και το είδωλό του. Δηλαδή,

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{\left|\frac{x'}{a}\vec{x} - \frac{a}{x'}\vec{x}'\right|} =$$

$$\frac{1}{|x\hat{x} - x'\hat{x}'|} - \frac{1}{\left|\frac{x'x}{a}\hat{x} - a\hat{x}'\right|}$$

- Ταυτόχρονα έχουμε το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{{r_<}^{l}}{{r_>}^{l+1}} {Y_{lm}}^{*}(\theta',\varphi') \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi).$$

Με βάση αυτό θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση Green σε σφαίρα για τις διάφορες περιπτώσεις.Θα εφαρμόσουμε δηλ. τον τύπο του αναπτύγματος και για τους δύο όρους της Green, διαχωρίζοντας περιπτώσεις.

# Συνάρτηση Green σε σφαίρα-εξωτερικό πρόβλημα

- Γενικά (ανεξάρτητα από το αν έχουμε εσωτερικό ή εξωτερικό πρόβλημα), αναλύοντας τις περιπτώσεις μας, παίρνουμε τα αναπτύγματα:

1. $\frac{1}{|r-r'|} = 4\pi \sum_{m,l} \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{(l+1)}} Y_{lm}{}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$, για $r < r'$.
2. $\frac{1}{|r-r'|} = 4\pi \sum_{m,l} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{(l+1)}} Y_{lm}{}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$, για $r > r'$.

- Εξετάζουμε πρώτα το εξωτερικό πρόβλημα. Για τον δεύτερο όρο της Green έχουμε ότι η θέση $\vec{x}'$ του μοναδιαίου φορτίου είναι πάντα μεγαλύτερη της $a$, το ίδιο και η θέση παρατήρησης $\vec{x}$. Άρα $\frac{xx'}{a} > a$. Γίνεται φανερό ότι για τον δεύτερο όρο της Green θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο ανάπτυγμα. Για τον πρώτο όρο,

γνωρίζουμε μεν ότι $x > a, x' > a$ (αφού έχουμε το εξωτερικό πρόβλημα), όμως μπορεί $x > x'$ ή $x < x'$. Για τον λόγο αυτό, για τον πρώτο όρο θα λάβουμε υπ' όψη και τα δύο αναπτύγματα, διαχωρίζοντας τις περιπτώσεις.

# Εξωτερικό πρόβλημα-Τελική έκφραση Green

- Άρα καταλήγουμε στις εξείς περιπτώσεις για το εξωτερικό πρόβλημα της συνάρτησης Green σε σφαίρα:

$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1}\left[\frac{r^l}{r'^{(l+1)}} - \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr\prime}\right)^{l+1}\right] Y_{lm}{}^*(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$, για $r < r'$ και

$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1}\left[\frac{r'^l}{r^{(l+1)}} - \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr\prime}\right)^{l+1}\right] Y_{lm}{}^*(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$, για $r > r'$.

# Εσωτερικό πρόβλημα-Τελική έκφραση Green

- Στην περίπτωση που έχουμε το εσωτερικό πρόβλημα τα $x, x'$ θα είναι πάντοτε μικρότερα της ακτίνας $a$, δηλ. $\frac{xx'}{a} < a$, ανεξάρτητα από το αν $x > x'$ ή $x < x'$. Έτσι, για τον δεύτερο όρο της Green, χρησιμοποιούμε το πρώτο ανάπτυγμα. Για τον πρώτο, θα πάρουμε περιπτώσεις.

- Έτσι καταλήγουμε στις εξείς σχέσεις για το εσωτερικό πρόβλημα:

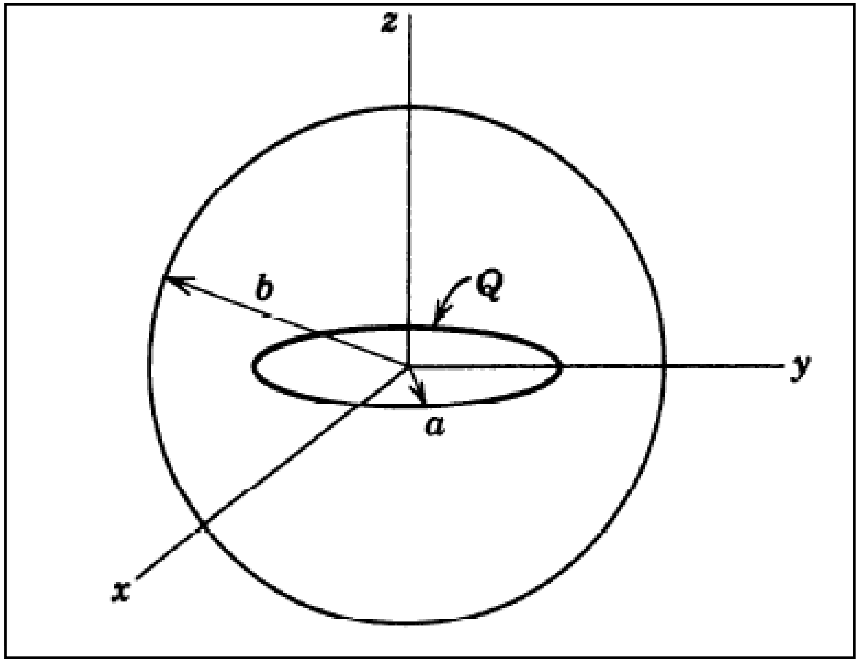
$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[ \frac{r^l}{r'^{(l+1)}} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}{}^*(\theta', \varphi') \mathrm{Y}_{lm}(\theta, \varphi) \text{ για } r < r'$$

και

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[ \frac{r'^l}{r^{(l+1)}} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}{}^*(\theta', \varphi') \mathrm{Y}_{lm}(\theta, \varphi), \text{ για } r > r'.$$

# Εφαρμογή

**Εικόνα 2**




- Έχουμε έναν ομοιόμορφα φορτισμένο δακτύλιο φορτίου $Q$, ακτίνας $a$, στο εσωτερικό αγώγιμης, γειωμένης σφαίρας ακτίνας $b$. Ψάχνουμε το δυναμικό στον χώρο.

# Επίλυση-Εύρεση πυκνότητας $\rho(\boldsymbol{x}')$

- Σύμφωνα με το θεώρημα Green το δυναμικό θα δίνεται από την σχέση

$\Phi(\mathbf{x}) = \int \rho(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d^3x'$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται διότι από τις συνοριακές συνθήκες το δυναμικό της επιφάνειας είναι $V(\theta',\varphi') = 0$.

- Εκφράζουμε αρχικά την $\rho(\boldsymbol{x}')$ με την βοήθεια των συναρτήσεων δέλτα. Να θυμίσουμε ότι η μορφή της δέλτα σε σφαιρικές συντεταγένες είναι

$\delta(x - x') = \frac{1}{r^2}\delta(r - r')\delta(\varphi - \varphi')\delta(cos\theta - cos\theta')$.

- Το φορτίο θα πρέπει να είναι παντού μηδέν, εκτός από $r = a$ και $\theta = \frac{\pi}{2}$. Άρα θα υπάρχουν οι παράγοντες

$\delta(r' - a), \delta\left(cos\theta' - cos\frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως η μορφή της $\rho(\boldsymbol{x}')$ θα είναι

$\rho(\boldsymbol{x}') = C\delta(r' - a)\delta(cos\theta')$, όπου η σταθερά $C$ πρέπει να προσδιοριστεί.

# Πυκνότητα $\rho(\boldsymbol{x}')$-Τελική μορφή

- Γνωρίζουμε ότι $Q = \int \rho(x')\, d^3x'$.
- $\int \rho(x')d^3x' = A\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \delta(cos\theta')\, sin\theta' \int_0^{\infty} \delta(r' - a)\, r'^2 dr' \Rightarrow$

$$Q = 2\pi\alpha^2 \mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{A} = \frac{Q}{2\pi\alpha^2}.$$

- Άρα η τελική μορφή της $\rho(\boldsymbol{x}')$ είναι:

$$\rho(\boldsymbol{x}') = \frac{Q}{2\pi\alpha^2}\delta(r' - a)\delta(cos\theta')$$

# Προσδιορισμός συνάρτησης Green

- Έστω ότι έχουμε το εσωτερικό πρόβλημα. Τότε μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση Green σύμφωνα με όσα έχουμε πει ως

$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1}\left[\frac{{r_<}^{l}}{{r_>}^{(l+1)}} - \frac{(rr\prime)^{l}}{b^{2l+1}}\right] {Y_{lm}}^{*}(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$. Με αυτήν την γραφή έχουμε ενοποιήσει τις δύο περιπτώσεις σε μία.

- Άρα

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{Q}{2\pi a^2}\int_0^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(r'-a)\delta(cos\theta')$$
$$4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1}\left[\frac{{r_<}^{l}}{{r_>}^{(l+1)}} - \frac{(rr')^{l}}{b^{2l+1}}\right] {Y_{lm}}^{*}(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) r'^2 sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

- Το πρόβλημά μας παρουσιάζει αζιμουθιακή συμμετρία , διότι η πυκνότητα φορτίου δεν παρουσιάζει εξάρτηση από την γωνία $\varphi$. Άρα $m = 0$ και $\mathrm{Y}_{l0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\mathrm{P}_l(cos\theta)$.

# Τελική έκφραση για το δυναμικό

- Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της δέλτα, η τελική έκφραση για το δυναμικό είναι

$$\Phi(\mathrm{x}) = Q\sum_{l} P_l(0)\left[\frac{{r_<}^{l}}{{r_>}^{(l+1)}} - \frac{(ra)^l}{b^{2l+1}}\right]P_l(cos\theta).$$

Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Η συνάρτηση Green σε σφαιρικές συντεταγμένες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Εικόνα 2: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics