ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 8: Προβλήματα σφαιρικών συντεταγμένων με αζιμουθιακή συμμετρία

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι η εύρεση αναπτύγματος για το δυναμικό μοναδιαίου φορτίου σε πολυώνυμα Legendre. Αυτή θα είναι μια χρήσιμη έκφραση, που χρησιμοποιείται σε μια ποικιλία προβλημάτων.

Περιεχόμενα ενότητας

- Δυναμικό μοναδιαίου φορτίου και πολυώνυμα Legendre
- Εφαρμογή

Το πρόβλημά μας

- Έστω το τρισορθογώνιο σύστημα (x, y, z). Έστω ότι έχουμε μοναδιαίο φορτίο στην θέση $\vec{x}'$ και ψάχνουμε το δυναμικό στην θέση $\vec{x}$. (Θυμίζουμε ότι αυτοί συμβολισμοί αναφέρονται στον χώρο και όχι στον άξονα x αποκλειστικά). Η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{x}'$ είναι γ.

- Γνωρίζουμε για το δυναμικό μοναδιαίου φορτίου ότι

$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ με $|\vec{x} - \vec{x}'| = [x^2 + x'^2 - 2xx' cos\gamma]^{1/2}$,

$$cos\gamma = sin\theta sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta cos\theta' .$$

- Θα θεωρήσουμε ότι το φορτίο είναι πάνω στον άξονα z και τότε $\theta' = 0$ και $cos\gamma = cos\theta$. Σ' αυτήν την περίπτωση το πρόβλημά μας αποκτά αζιμουθιακή συμμετρία και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η λύση για το δυναμικό είναι:

$$\Phi(\mathrm{r}, \theta) = \sum_l \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(cos\theta).$$

Παρατήρηση: Αν δεν είχαμε αζιμουθιακή συμμετρία, η γενική λύση του δυναμικού θα ήταν $\Phi(\mathrm{r}, \theta) = \sum_l \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(cos\gamma)$.

Παρατηρήσεις

- **Γενική παρατήρηση**:Επειδή έχουμε αζιμουθιακή συμμετρία, οι συντελεστές A_l, B_l δεν θα μεταβάλλονται στα διάφορα σημεία του χώρου. Άρα αν τους βρούμε στον πόλο,(που έχουμε τοποθετήσει το φορτίο) θα είναι σαν να τους έχουμε υπολογίσει για οποιοδήποτε σημείο. Τοποθετούμε λοιπόν για την δική μας διευκόλυνση και το σημείο παρατήρησης στον πόλο.
- Έχουμε σύμφωνα με τα παραπάνω

$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|r-r'|}$, όπου r είναι το σημείο παρατήρησης πάνω στον άξονα z και r' είναι το σημείο όπου έχουμε τοποθετήσει το φορτίο.

Περίπτωση α)

- Στην συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $r > r'$ και
2. $r < r'$.

- Ας πάρουμε την πρώτη περίπτωση.Θα ισχύει

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r\left(1 - \frac{r'}{r}\right)} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r'}{r}\right)^{-1}.$$

- Γνωρίζουμε ότι ισχύει η γεωμετρική πρόοδος

$$\frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + w^3 + .. + w^n = S, w < 1.$$

Ο τύπος της γεωμετρικής προόδου

- **Απόδειξη:**

Πολλαπλασιάζουμε την S με w, άρα

$$wS = w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n+1}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη κι έχουμε

$wS - S = (w^{n+1} + w^n + w^{n-1} + .. + w^2 + w) - (w^n + w^{n-1} + \cdots + w + 1).$

Άρα $S = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1}$. Όταν $n \to \infty$, τότε $w^{n+1} \to 0$ και

$S = \frac{1}{1-w} = \sum_{l=0}^{\infty} w^l$.

Το δυναμικό στις περιπτώσεις α) και β).

- Για την περίπτωση α), αν θεωρήσουμε ότι $w = \frac{r'}{r} < 1$, έχουμε

$$\frac{1}{r-r'} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{1}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}}$$

- Με την ίδια λογική βρίσκουμε ότι για την περίπτωση β) ισχύει ό

$$\frac{1}{r-r'} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{(l+1)}}$$

- Αν θέλουμε να συνοψίσουμε τις δύο περιπτώσεις σε μία έκφραση γράφουμε

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{{r_<}^l}{{r_>}^{l+1}}.$$

- Η παραπάνω έκφραση δηλώνει το γεγονός ότι πάντα στον αριθμητή θα μπαίνει το μικρότερο r, ενώ στον παρανομαστή το μεγαλύτερο.

Προσδιορισμός συντελεστών

- Όταν $r > r'$, έχουμε

$$\Phi(\mathrm{r}, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}).$$

Επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι $\mathrm{A}_l = 0, B_l = (r')^l$.

- Ανάλογα όταν $r < r'$, έχουμε:

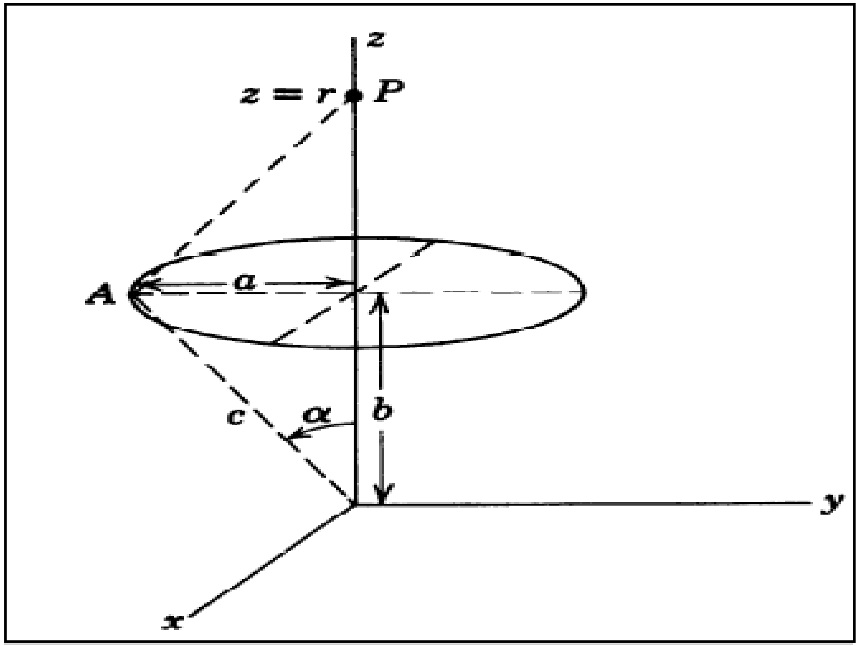
$$\Phi(\mathrm{r}, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{(l+1)}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}).$$

Επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι $\mathrm{A}_l = \frac{1}{r'^{(l+1)}}, B_l = 0$.

- Για ένα σημείο παρατήρησης που δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα z, το δυναμικό θα είναι $\Phi(\mathrm{r}, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{{r_<}^l}{{r_>}^{l+1}} P_l(cos\theta)$.

Άσκηση

Εικόνα 1



Εκφώνηση:

- Έχουμε έναν δακτύλιο ακτίνας α. Έχει φορτίο q ομοιόμορφα κατανεμημένο. Το κέντρο του βρίσκεται σε απόσταση $z = b$. Ψάχνουμε το δυναμικό για σημείο παρατήρησης στον άξονα z.

Επίλυση

- Το δυναμικό στο σημείο P του άξονα συμμετρίας με $z = r$, είναι $\Phi(\mathrm{z}=\mathrm{r}) = \frac{q}{|\mathrm{AP}|} = \frac{q}{(r^2+c^2-2crcos\alpha)^{1/2}}$, με

$c^2 = a^2 + b^2$ και $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$.

- Αν τώρα αναπτύξουμε το δυναμικό βασιζόμενοι στον γενικό τύπο $\Phi(\mathrm{z}=\mathrm{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{{r_<}^{l}}{{r_>}^{l+1}} P_l(cos\alpha)$ παίρνουμε τις εξείς εκφράσεις:

A) Για $r > c$, $\Phi(\mathrm{z}=\mathrm{r}) = \mathrm{q}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(cos\alpha)$ και

B) Για $r < c$, $\Phi(\mathrm{z}=\mathrm{r}) = \mathrm{q}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{c^{l+1}} P_l(cos\alpha)$.

- Το δυναμικό για οποιοδήποτε σημείο παρατήρησης στον χώρο θα δίνεται από την γενική έκφραση

$$\Phi(\mathrm{r},\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{{r_<}^{l}}{{r_>}^{l+1}} P_l(cos\alpha)\mathrm{P}_l(cos\theta).$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Πρόβλημα μοναδιαίου φορτίου». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics