Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 7: Εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να μελετήσει και να επιλύσει την εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Περιεχόμενα ενότητας

- Τεμνόμενες πλάκες δυναμικού V υπό γωνία β (πρόβλημα πολικών συντεταγμένων)
- Εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

Πλάκες δυναμικού V υπό γωνία β

- Θεωρούμε δυο τεμνόμενες πλάκες. Η μία βρίσκεται στον άξονα x και η άλλη στον άξονα y. Σχηματίζουν γωνία β. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι
$$\Phi(\mathrm{r}, \varphi = 0) = \mathrm{V}, \Phi(\mathrm{r}, \varphi = \beta) = \mathrm{V}.$$

Ψάχνουμε το δυναμικό στον χώρο.

- Έχουμε πρόβλημα διδιάστατο και θα γίνει χρήση πολικών συντεταγμένων.

- Η γενική λύση της Laplace είναι:

$$\Phi(\mathrm{r}, \varphi) = a_0 + b_0 lnr + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathrm{C}_\nu sin\nu\varphi + \mathrm{D}_\nu cos\nu\varphi)(A_\nu r^\nu + \mathrm{B}_\nu r^{-\nu}).$$

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

- Για να μην έχουμε απειρισμό του δυναμικού όταν $r \to 0$, θέτουμε $b_0 = 0$ και $\mathrm{B}_\nu = 0$.
- Από την συνοριακή συνθήκη $\Phi(\mathrm{r}, \varphi = 0) = \mathrm{V}$, έχουμε:

$$V = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \mathrm{A}_\nu D_\nu$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω ισότητα θα πρέπει

$V = a_0, \mathrm{D}_\nu = 0.$

- Άρα η γενική λύση γίνεται

$$\Phi(\mathrm{r}, \varphi) = V + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{C}_\nu sin\nu\varphi r^\nu$$

- Με την εφαρμογή της δεύτερης συνοριακής συνθήκης $\Phi(\mathrm{r}, \varphi = \beta) = \mathrm{V}$ έχουμε $V = V + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{C}_\nu sin\nu\beta r^\nu \Longrightarrow sin\nu\beta = 0 \Longrightarrow \nu\beta = m\pi \Longrightarrow \nu = \frac{m\pi}{\beta}$.

Υπολογισμός ηλεκτρικού πεδίου και επιφανειακής πυκνότητας

- Η λύση για το δυναμικό είναι λοιπόν της μορφής
  $\Phi(\mathrm{r}, \varphi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{C}_m sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi r^{\frac{m\pi}{\beta}}$.

Αν ψάχνουμε το δυναμικό πολύ κοντά στην γωνία, τότε $r \longrightarrow 0, m = 1$.
Επομένως $\Phi(\mathrm{r}, \varphi) = V + \mathrm{C}_1 sin \frac{\pi}{\beta} \varphi r^{\frac{\pi}{\beta}}$.

- Για το ηλεκτρικό πεδίο θα ισχύει $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_r \hat{e}_r + E_\varphi \hat{e}_\varphi$.
- Υπολογίζουμε την κάθε συνιστώσα ξεχωριστά:

$$\mathrm{E}_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\mathrm{C}_1 \sin\left(\frac{\pi}{\beta}\varphi\right) \frac{\pi}{\beta} r^{\frac{\pi}{\beta}-1}, \mathrm{E}_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -C_1 \frac{\pi}{\beta} r^{\frac{\pi}{\beta}-1} cos\left(\frac{\pi}{\beta}\varphi\right).$$

- Για την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου έχουμε

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{4\pi} C_1 \frac{\pi}{\beta} r^{\frac{\pi}{\beta}-1} cos\left(\frac{\pi}{\beta}\varphi\right).$$

Εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

- Η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r\Phi] + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right] + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = 0, \text{όπου}$$

$$\Phi = \Phi(\mathrm{r}, \theta, \varphi).$$

Εφαρμόζουμε την Μ.Χ.Μ και θέτουμε

$$\Phi(\mathrm{r}, \theta, \varphi) = \mathrm{R}(\mathrm{r})\mathrm{P}(\theta)\mathrm{Q}(\varphi).$$

- Αντικαθιστώντας την λύση στην εξίσωση καταλήγουμε

$$r sin^2\theta R^{-1}\frac{d^2}{dr^2}(rR) + sin\theta P^{-1}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\mathrm{P}}{d\theta}\right) + Q^{-1}(\varphi)\frac{d^2}{d^2\varphi}Q(\varphi) = 0$$

Μορφή Q(ϕ)

- Θέτουμε $Q^{-1}(\varphi)\frac{d^2}{d^2\varphi}Q(\varphi) = -m^2$ (1) και

$rsin^2\theta R^{-1}\frac{d^2}{dr^2}(rR) + sin\theta P^{-1}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{\theta}}\right) = m^2$. (2)

- Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\frac{d^2Q(\varphi)}{d^2\varphi} + m^2Q(\varphi) = 0 \Longrightarrow$

$$Q(\varphi) = e^{im\varphi}$$

- Θα πρέπει $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi) \Longrightarrow e^{i2\pi m} = 1 \Longrightarrow m \exists Z$.
- Σε περίπτωση αζιμουθιακής συμμετρίας έχουμε $m = 0$. Άρα

$Q''(\varphi) = 0 \Longrightarrow Q(\varphi) = \mathrm{A} + \mathrm{B}\varphi$, και επειδή πρέπει να ικανοποιείται η περιοδικότητα (δηλ. $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi)$), ισχύει ότι $Q(\varphi) = \mathrm{A}$. (Τα A και B είναι σταθερές).

Εξίσωση Legendre

- Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές στην εξίσωση (2) και καταλήγουμε στις εξισώσεις
$$rR^{-1}\frac{d^2}{dr^2}(rR) = -\frac{1}{sin\theta}P^{-1}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\mathrm{P}}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{sin^2\theta} = l(l+1).$$
- Για το γωνιακό κομμάτι της παραπάνω εξίσωσης έχουμε
$$\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\mathrm{P}}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{sin^2\theta}\right]\mathrm{P}(\theta) = 0.$$
- Πραγματοποιώντας μια αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $cos\theta = x$, οπότε $sin\theta = \sqrt{1-x^2}$ και $dx = -sin\theta d\theta$, καταλήγουμε στην γενικευμένη εξίσωση Legendre:
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x) = 0.$$

Πολυώνυμα Legendre

- Λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Legendre είναι τα γενικευμένα πολυώνυμα Legendre. Στην περίπτωσή μας για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει αζιμουθιακή συμμετρία, (δηλ. $m = 0$) και η εξίσωση Legendre γίνεται:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right] + [l(l+1)]P(x) = 0.$$

- Θεωρούμε λύση απειροσειρά της μορφής $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση καταλήγουμε στον αναδρομικό τύπο για τον προσδιορισμό των συντελεστών

$$\alpha_{n+2} = \frac{-l(l+1) + n(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

- Επιθυμούμε την σύγκλιση της απειροσειράς. Συγκλίνει για $|x| < 1$. Θέλουμε όμως να συγκλίνει και για $|x| = 1$, δηλ. στους πόλους. Για να συμβεί αυτό, πρέπει κάποια στιγμή να τερματίζεται, δηλ. $l(l+1) = n(n+1)$. Ο μέγιστος δείκτης της απειροσειράς θα είναι λοιπόν για $n = l$.

Σχέση ορθογωνιότητας πολυωνύμων Legendre

- Τα πολυώνυμα Legendre βρίσκονται απ’ ευθείας από τον τύπο του Rodriguez,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l.$$

- Τα πολυώνυμα Legendre είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,+1]$. Η σχέση ορθογωνιότητας είναι $\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}_{l'}(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l'l}$.
- Άρα τα κανονικοποιημένα πολυώνυμα Legendre είναι τα

$$U_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x).$$

- Συναρτήσει της γωνίας η σχέση ορθογωνιότητας είναι

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_{l'}(cos\theta)\mathrm{P}_l(cos\theta)sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{l'l}$$

Ακτινική εξίσωση και γενική λύση

- Η ακτινική εξίσωση όπως έχουμε αναφέρει είναι

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) - \frac{l(l+1)R}{r} = 0 \Longrightarrow$$

$$R(r) = A_l r^{-(l+1)} + B_l r^l$$

- Η γενική λύση της εξίσωσης Laplace για σφαιρικές συντεταγμένες και στην περίπτωση της αζιμουθιακής συμμετρίας είναι

$$\Phi(\mathrm{r}, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^{-(l+1)} + B_l r^l\right) P_l(cos\theta).$$

Πρόβλημα ημισφαιρίων με διαφορετικά δυναμικά

- Θα σκιαγραφήσουμε το πρόβλημα μιας σφαίρας ακτίνας α που στην επιφάνειά της έχει δυναμικό $V(\theta)$. Η συνάρτηση του δυναμικού μπορεί να είναι

$$V(\theta) = \begin{cases} \mathrm{V}, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\mathrm{V}, \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Ψάχνουμε το δυναμικό στο εσωτερικό της σφαίρας.

Επίλυση

- Όπως είδαμε η γενική λύση είναι της μορφής

$\Phi(\mathrm{r},\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^{-(l+1)} + B_l r^l\right)P_l(cos\theta)$.

- Για να μην έχουμε απειρισμό της λύσης καθώς $r \to 0$, θέτουμε $A_l = 0$.
- Άρα η λύση γίνεται $\Phi(\mathrm{r},\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(cos\theta)$.
- Από την συνθήκη $\Phi(\mathrm{r} = \alpha, \theta) = \mathrm{V}(\theta)$, έχουμε ότι

$$\mathrm{V}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \alpha^l P_l(cos\theta).$$

Εύρεση συντελεστή

- Κάνουμε χρήση της σχέσης ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre προκειμένου να προσδιορίσουμε τον συντελεστή B_l.
- Όταν προσδιορίσουμε τον συντελεστή έχουμε ουσιαστικά την ολοκληρωμένη λύση για το δυναμικό στον χώρο.
- Επομένως

$$\int_0^{\pi} V(\theta)\mathrm{P}_{l'}(cos\theta)sin\theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^l \int_0^{\pi} P_l(cos\theta)\mathrm{P}_{l'}(cos\theta)sin\theta d\theta \Longrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} V(\theta)\mathrm{P}_{l'}(cos\theta)sin\theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^l \frac{2}{2l+1}\delta_{l'l} \Longrightarrow$$

$$B_l = \frac{2l+1}{2}\frac{1}{a^l}\int_0^{\pi} V(\theta)\mathrm{P}_l(cos\theta)sin\theta d\theta$$

- Ανάλογα με την μορφή που έχει κάθε φορά το δυναμικό $V(\theta)$, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης